Günter Bärwolff

Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure

unter Mitarbeit von
Gottfried Seifert

18. August 2017

Vorwort

In dem vorliegenden Buch sind zum einen langjährige Erfahrungen bei der projektorientierten Zusammenarbeit zwischen Mathematikern, Physikern und Ingenieuren in interdisziplinären Arbeitsgruppen zur Lösung angewandter mathematischer Aufgaben, zum anderen die Erfahrungen bei der mathematischen Grundausbildung von Ingenieurstudenten an der Technischen Universität Berlin zusammengeflossen. Dabei konnten wesentliche Vorstellungen der Kollegen D. Ferus, R.D. Grigorieff, D. Krüger, K. Kutzler und H. Bausch, die ich in den vergangenen 10 Jahren auch in meinen Vorlesungen verwendet habe, dankenswerterweise genutzt werden.
Dieses Lehrbuch hat zum Ziel, in einem Band die mathematischen Inhalte zu behandeln, die üblicherweise im Grundstudium der Ingenieure und Physiker vermittelt werden. Da somit in einem Band ein sehr breites Spektrum zu bearbeiten war, haben wir uns speziell bei den Themen "Funktionentheorie", "Partielle Differentialgleichungen", "Integraltransformationen" und "Variationsrechnung und Optimierung" nur auf Grundlagen konzentriert, die in der Mathematikausbildung von Ingenieuren an der Technischen Universität Berlin seitens der Ingenieurfakultäten für wichtig erachtet wurden. Der Inhalt des Buches bildet die Mathematikkurse weitestgehend ab, die an der Technischen Universität Berlin im Ingenieurgrundstudium vermittelt werden.
Auf Vorschlag einiger in der Mathematikausbildung von Ingenieuren tätigen Fachkollegen anderer Universitäten wurde der ursprünglich vorgesehene Rahmen um Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik beträchtlich erweitert. Diese beiden Kapitel wurden im Wesentlichen von meinem langjährigen Kollegen G. Seifert geschrieben, der durch kritische Hinweise und Verbesserungsvorschläge auch an Teilen des übrigen Textes mitgewirkt hat.
Um das Buch lesbar zu gestalten, war es nicht immer möglich, nur Begriffe zu verwenden, die schon ausführlich besprochen und definiert sind. Es liegt z.B. nahe, die Binomialkoeffizienten im Abschnitt über natürliche Zahlen einzuführen. Um dabei dann auch die binomischen Formeln zur Berechnung von $(a+b)^n$ sinnvoll behandeln zu können, setzen wir voraus, dass a und b reelle Zahlen sind, ohne den Begriff der reellen Zahl an dieser Stelle schon definiert zu haben. Ein anderes Beispiel ist der Vektorbegriff, bei dem wir uns zunächst auf Schulkenntnisse stützen, wenn wir Ungleichungen und Operationen mit komplexen Zahlen graphisch darstellen. Später werden dann die Vektoren als Elemente spezieller abstrakter Vektorräume behandelt. Wir waren bestrebt, die aus Darstellungs- und Lesbarkeitsgründen vorab verwendeten Begriffe in den betreffenden thematischen Abschnitten zu definieren.
Das Buch soll einerseits Studierenden der Ingenieur- und Naturwissenschaften bei der Mathematikausbildung an der Universität oder Fachhochschule ein nützlicher Begleiter sein, andererseits aber auch dem in der Praxis tätigen Ingenieur

oder Physiker als Nachschlagewerk dienen. Neben Ingenieuren und Naturwissenschaftlern richtet sich das Buch durch das breite Themenspektrum bis hin zur nichtlinearen Optimierung und Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik auch an Techno- und Wirtschaftsmathematiker oder Betriebs- und Volkswirte, die an einer fundierten mathematischen Ausbildung als Grundlage für eine Unternehmensführung interessiert sind. Bei der Vermittlung der mathematischen Inhalte spielt der Aspekt der praktischen Nutzung der dargelegten Methoden und Instrumente eine wesentliche Rolle. Allerdings kann es mit diesem Buch nicht nur darum gehen, Studierende, die schnell und "irgendwie" ihren Mathematikkurs überstehen wollen, anzusprechen. Das Buch richtet sich vor allem an Leute, die an Mathematik und am Verständnis von Inhalten interessiert sind. Deshalb wird im Rahmen der Möglichkeiten von 870 Seiten eine weitestgehend stimmige Darstellung der angesprochenen Themen angestrebt. Will man das erreichen, müssen auch recht theoretisch anmutende Themen wie z.B. die Eigenschaften von Funktionenreihen oder die Eigenschaften von Determinanten und Matrizen in der linearen Algebra diskutiert werden. Beweise von Sätzen und Formeln führen wir in der Regel dort, wo es um das Erlernen von Beweistechniken geht, oder wo mit den Beweisen durch konstruktive Methoden das Verständnis von Inhalten gefördert oder die mathematische Allgemeinbildung erweitert wird. Die Voraussetzungen von Sätzen und mathematischen Aussagen werden nicht immer in der schärfstmöglichen Form angegeben. Als Beispiel sei etwa die Forderung der stetigen Differenzierbarkeit einer Funktion genannt, deren Ableitung eigentlich nur integrierbar sein muss, weil sie in einem Integralausdruck verwendet wird. Hier wurde die Stetigkeit der Ableitung gefordert, obwohl die schwächere Forderung der Integrierbarkeit ausgereicht hätte. Allerdings haben für die Anwendung relevante Funktionen in der Regel stetige Ableitungen, so dass die stärkere Voraussetzung dann meist erfüllt ist.

Im Anhang werden in einer kompakten Sammlung wichtige Formeln zu den einzelnen Kapiteln zusammengefasst. Da die Lösungen der in jedem Kapitel gestellten Aufgaben recht ausführlich dargestellt werden, werden sie aus Platzgründen zum Download im Internet auf www.spektrum-verlag.de als pdf- und als ps-Datei angeboten.

Für an vertiefender Literatur und an lückenlosen Nachweisen interessierte Leser werden im Anhang zu den einzelnen Kapiteln mathematische Monographien angegeben.

Herrn Dr. Andreas Rüdinger als verantwortlichen Lektor von Spektrum Akademischer Verlag möchte ich zum einen für die Anregung zu diesem Lehrbuch und zum anderen für die problemlose Zusammenarbeit von der Vertragsentstehung bis zum fertigen Buch meinen Dank aussprechen. Insbesondere in der Endphase der Fertigstellung des Manuskripts war die unkomplizierte Zusammenarbeit mit Frau Barbara Lühker von Spektrum Akademischer Verlag hilfreich.

Zu guter letzt möchte ich Frau Gabriele Graichen, die die vielen Grafiken auf dem Computer erstellt hat, für die effiziente Zusammenarbeit herzlich danken, ohne die das Buch nicht möglich gewesen wäre.

Berlin, August 2004 Günter Bärwolff

Vorwort zur 2. Auflage

Den Vorschlägen von Fachkolleginnen und -kollegen folgend, wird die 2. Auflage um zwei Themengebiete ergänzt. Einmal wird das Kapitel "Gewöhnliche Differentialgleichungen" um einen Abschnitt zu Zweipunkt-Randwertproblemen und Rand-Eigenwertproblemen erweitert. Des Weiteren wurde ein Kapitel zur Thematik "Tensorrechnung" hinzugefügt. Das Kapitel "Partielle Differentialgleichungen" wurde auch mit Bezug auf den neuen Abschnitt zu Randwertproblemen durch meinen Kollegen Gottfried Seifert umfassend überarbeitet. Die Formelsammlung wurde entsprechend ergänzt. Die sorgfältige Durchsicht der 1. Auflage, die sich daraus ergebende Überarbeitung durch G. Seifert und die Aufbereitung vorhandener sowie die Erzeugung neuer Grafiken durch Frau Gabriele Graichen haben dem Buch zweifellos sehr gut getan. Ebenso ausgesprochen dankbar bin ich Frau B. Lühker und Herrn Dr. A. Rüdinger von Spektrum Akademischer Verlag für das akribische Lesen des Manuskripts, speziell der neu hinzugekommenen Themen, und die klugen Hinweise. Besonders bei der indexträchtigen Tensorrechnung hat das zur rechtzeitigen Korrektur einer Reihe von Flüchtigkeitsschreibfehlern beigetragen.
Außerdem wurden selbstverständlich berechtigte Hinweise von Lesern berücksichtigt, insbesondere ein wesentlich umfangreicherer Index erstellt und das Erratum der 1. Auflage eingearbeitet.

Berlin, November 2005 Günter Bärwolff

Vorwort zur 3. Auflage

In der 3. Auflage sind neben einer Reihe von Korrekturen kleinerer Unkorrektheiten der vorigen Auflagen in verschiedenen Kapiteln Ergänzungen als Reaktion auf Meinungsäußerungen von Lesern und Fachkollegen sowie des bewährten Lektorats des Verlags vorgenommen worden. So wurden z.B. der Begriff der Orthogonalität allgemeiner gefasst und der Nutzen von orthogonalen Matrizen anhand von Beispielen belegt. Außerdem wurde dem Wunsch Rechnung getragen, den Index um wichtige Stichworte zu ergänzen.
Obwohl in dem vorliegenden Lehrbuch hauptsächlich darum geht, den Lesern die behandelten Gebiete der Höheren Mathematik vermitteln und sie in die Lage zu versetzen, Begriffe und Konzepte zu verstehen und anzuwenden, habe ich den Anhang um eine kurze Einführung in das Computeralgebra-System MATLAB [1] bzw. Octave[2] ergänzt. Auch aus dem Grund, um bestimmte Techniken wie z.B. die Produkte von Matrizen oder Vektoren effizient auszuführen bzw. eigene Rechnungen zu überprüfen.
Sehr hilfreich für das Verständnis sind darüberhinaus die in Matlab/Octave vorhandenen Möglichkeiten Sachverhalte zu visualisieren. Letztendlich danke ich Frau B. Lühker und Herrn Dr. A. Rüdinger von Springer Spektrum für die traditionell gute Zusammenarbeit.

Berlin, Juni 2017 Günter Bärwolff

[1] MATLAB ist eine kommerzielle Software des US-amerikanischen Unternehmens MathWorks
[2] Open-Source frei verfügbare Alternative zu MATLAB

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **1**

1.1 Logische Grundlagen . . . 2
1.2 Grundlagen der Mengenlehre . . . 8
1.3 Abbildungen . . . 15
1.4 Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion . . . 16
1.5 Ganze, rationale und reelle Zahlen . . . 22
1.6 Ungleichungen und Beträge . . . 27
1.7 Komplexe Zahlen . . . 36
1.8 Aufgaben . . . 54

2 Analysis von Funktionen einer Veränderlichen **55**

2.1 Begriff der Funktion . . . 56
2.2 Eigenschaften von Funktionen . . . 62
2.3 Elementare Funktionen . . . 65
2.4 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen . . . 69
2.5 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . 89
2.6 Differenzierbarkeit von Funktionen . . . 95
2.7 Lineare Approximation und Differential . . . 101
2.8 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen . . . 105
2.9 TAYLOR-Formel und der Satz von TAYLOR . . . 111
2.10 Extremalprobleme . . . 116
2.11 BANACHscher Fixpunktsatz und NEWTON-Verfahren . . . 120
2.12 Kurven im $\mathbb{R}^2$ . . . 126
2.13 Integralrechnung . . . 137
2.14 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern . . . 164
2.15 Parameterintegrale . . . 166
2.16 Uneigentliche Integrale . . . 168
2.17 Numerische Integration . . . 179
2.18 Interpolation . . . 183
2.19 Aufgaben . . . 189

3 Reihen **191**

3.1 Zahlenreihen . . . 192
3.2 Funktionenfolgen . . . 201
3.3 Gleichmäßig konvergente Reihen . . . 207
3.4 Potenzreihen . . . 209
3.5 Operationen mit Potenzreihen . . . 212
3.6 Komplexe Potenzreihen, Reihen von $\exp x$, $\sin x$ und $\cos x$ . . . 213

3.7 Numerische Integralberechnung mit Potenzreihen 226
3.8 Konstruktion von Reihen 228
3.9 FOURIER-Reihen 231
3.10 Aufgaben 263

4 Lineare Algebra **265**
4.1 Determinanten 271
4.2 CRAMERsche Regel 284
4.3 Matrizen 287
4.4 Lineare Gleichungssysteme und deren Lösung 306
4.5 Allgemeine Vektorräume 314
4.6 Orthogonalisierungsverfahren nach ERHARD SCHMIDT 330
4.7 Eigenwertprobleme 338
4.8 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$ 354
4.9 Aufgaben 372

5 Analysis im $\mathbb{R}^n$ **375**
5.1 Eigenschaften von Punktmengen aus dem $\mathbb{R}^n$ 376
5.2 Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher 381
5.3 Kurven im $\mathbb{R}^n$ 382
5.4 Stetigkeit von Abbildungen 390
5.5 Partielle Ableitung einer Funktion 393
5.6 Ableitungsmatrix und HESSE-Matrix 398
5.7 Differenzierbarkeit von Abbildungen 400
5.8 Differentiationsregeln und die Richtungsableitung 401
5.9 Lineare Approximation 404
5.10 Totales Differential 406
5.11 TAYLOR-Formel und Mittelwertsatz 408
5.12 Satz über implizite Funktionen 412
5.13 Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen 415
5.14 Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen 420
5.15 Ausgleichsrechnung 426
5.16 NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme 430
5.17 Aufgaben 432

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen **435**
6.1 Einführung 436
6.2 Allgemeine Begriffe 437
6.3 Allgemeines zu Differentialgleichungen erster Ordnung 438
6.4 Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Variablen . 441
6.5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung 444
6.6 Durch Transformationen lösbare Differentialgleichungen 447
6.7 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung 454
6.8 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung 470
6.9 Anmerkungen zum "Rechnen" mit Differentialgleichungen 491
6.10 Numerische Lösungsmethoden 493

6.11 Potenzreihen zur Lösung von Differentialgleichungen 503
6.12 BESSELsche und LEGENDREsche Differentialgleichungen 506
6.13 Rand- und Eigenwertprobleme 517
6.14 Nichtlineare Differentialgleichungen 532
6.15 Aufgaben 545

7 Vektoranalysis und Kurvenintegrale 549
7.1 Die grundlegenden Operatoren der Vektoranalysis 550
7.2 Rechenregeln und Eigenschaften der Operatoren der Vektoranalysis 554
7.3 Potential und Potentialfeld 556
7.4 Skalare Kurvenintegrale 557
7.5 Vektorielles Kurvenintegral – Arbeitsintegral 561
7.6 Stammfunktion eines Gradientenfeldes 565
7.7 Berechnungsmethoden für Stammfunktionen 570
7.8 Vektorpotentiale 571
7.9 Aufgaben 573

8 Flächenintegrale, Volumenintegrale und Integralsätze 575
8.1 Flächeninhalt ebener Bereiche 576
8.2 RIEMANNsches Flächenintegral 578
8.3 Flächenintegralberechnung durch Umwandlung in Doppelintegrale 581
8.4 Satz von GREEN 587
8.5 Transformationsformel für Flächenintegrale 592
8.6 Integration über Oberflächen 597
8.7 Satz von STOKES 616
8.8 Volumenintegrale 621
8.9 Transformationsformel für Volumenintegrale 625
8.10 Satz von GAUSS 629
8.11 Aufgaben 638

9 Partielle Differentialgleichungen 641
9.1 Was ist eine partielle Differentialgleichung? 642
9.2 Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung 643
9.3 Beispiele von partiellen Differentialgleichungen aus der Physik . . 646
9.4 Wellengleichung 650
9.5 Wärmeleitungsgleichung 682
9.6 Potentialgleichung 689
9.7 Entdimensionierung von partiellen Differentialgleichungen 696
9.8 Aufgaben 698

10 Funktionentheorie 701
10.1 Komplexe Funktionen 702
10.2 Differentiation komplexer Funktionen 704
10.3 Elementare komplexe Funktionen und Potenzreihen 709
10.4 Konforme Abbildungen 711
10.5 Integration komplexer Funktionen 715

10.6 Reihenentwicklungen komplexer Funktionen 724
10.7 Behandlung von Singularitäten und der Residuensatz 725
10.8 Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes 732
10.9 Harmonische Funktionen 738
10.10 Aufgaben 743

11 Integraltransformationen 745
11.1 Definition von Integraltransformationen 746
11.2 FOURIER-Transformation 748
11.3 Umkehrung der FOURIER-Transformation 753
11.4 Eigenschaften der FOURIER-Transformation 754
11.5 Anwendung der FOURIER-Transformation auf partielle Differentialgleichungen 756
11.6 LAPLACE-Transformation 758
11.7 Inverse LAPLACE-Transformation 761
11.8 Rechenregeln der LAPLACE-Transformation 765
11.9 Praktische Arbeit mit der LAPLACE-Transformation und der Rücktransformation 772
11.10 Aufgaben 779

12 Variationsrechnung und Optimierung 781
12.1 Einige mathematische Grundlagen 782
12.2 Funktionale auf BANACH-Räumen 785
12.3 Variationsprobleme auf linearen Mannigfaltigkeiten 798
12.4 Klassische Variationsrechnung 803
12.5 Einige Variationsaufgaben 806
12.6 Natürliche Randbedingungen und Transversalität 813
12.7 Isoperimetrische Variationsprobleme 816
12.8 Funktionale mit mehreren Veränderlichen 818
12.9 Aufgaben 819

13 Elemente der Tensorrechnung 821
13.1 Tensoralgebra 822
13.2 Tensoranalysis 837
13.3 Aufgaben 848

14 Wahrscheinlichkeitsrechnung 849
14.1 Zufällige Ereignisse 850
14.2 Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse 856
14.3 Zufallsgrößen 865
14.4 Zufällige Vektoren 881
14.5 Aufgaben 907

15 Statistik **909**
15.1 Stichproben 910
15.2 Punktschätzung 913
15.3 Intervallschätzung 919
15.4 Statistische Tests 932
15.5 Korrelations- und Regressionsanalyse 942
15.6 Aufgaben 951

A Formelkompendium **955**

B Octave/MATLAB **969**
B.1 Eingabekonventionen 969
B.2 Kontrollstrukturen 970
B.3 Vektoren und Matrizen 972
B.4 Allgemeines 973
B.5 Visualisierung: 2-dimensionale Plots 975
B.6 Rechnen mit Matrizen 976
B.7 Funktionen 979
B.8 Rekursionen 980
B.9 Komplexität 981
B.10 Handles 982
B.11 Verschiedenes 983

C Literaturhinweise **985**

Index **987**