Lebesgue-Messbarkeit und -Integrierbarkeit

Daniela Luft und Roman Rischke

17.05.2010

1 Lebesgue-Messbarkeit

1.1 Lebesgue-Messbarkeit von Mengen

Definition 1.1 (σ-Algebra) Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt *σ-Algebra* über der Grundmenge Ω, wenn gilt:

1. $\mathcal{A}$ ist eine (Mengen-)Algebra, d.h.
   - A und $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ vereinigungsstabil)
   - A und $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ differenzenstabil)
   - (A und $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ durchschnittsstabil))
2. $\Omega \in \mathcal{A}$
3. Es sei $\{A_n\}$ eine Folge aus $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Definition 1.2 (Von $\mathcal{B}$ erzeugte σ-Algebra) Es sei $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(\Omega)$. Der Durchschnitt aller σ-Algebren über Ω, die $\mathcal{B}$ umfassen, wird als *von $\mathcal{B}$ erzeugte σ-Algebra* bezeichnet. Notation: $\sigma(\mathcal{B})$

Definition 1.3 (Borelsche σ-Algebra) Sei Ω ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ sei das System der offenen Mengen von Ω. $\sigma(\mathcal{O})$ heißt *Borelsche σ-Algebra* über Ω.

Definition 1.4 (Maß) Es sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine reellwertige Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt *Maß*, falls

1. μ positiv: $\mu(\emptyset) = 0 \wedge \forall A \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(A) \geq 0$ und
2. μ σ-additiv: für jede Folge $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ disjunkter Elemente gilt: $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Das Maß μ heißt *σ-finit*, wenn es in $\mathcal{A}$ eine Folge $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty$ gibt.

Satz 1.1 (Fortsetzungssatz) Sei $\mathcal{B}$ ein vereinigungs- und differenzenstabiles Mengensystem (Ring). Sei $\mu' : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ ein Prämaß, d.h. μ' ist eine positive und σ-additive Mengenfunktion auf $\mathcal{B}$. Ist μ' σ-finites Prämaß auf $\mathcal{B}$, so ist μ' eindeutig fortsetzbar zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathcal{B})$, d.h. $\mu(B) = \mu'(B) \forall B \in \mathcal{B}$.

Anmerkung 1.1 Ausgehend vom Längenprämaß der endlichen Vereinigung halboffener Quader $\lambda'(A) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_d - a_d)$ mit $A = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_d, b_d)$ und $a_i \leq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, d$ kann eine eindeutige Fortsetzung von λ' auf die Borelsche σ-Algebra definiert werden. Diese Fortsetzung wird als *Lebesgue-Borel-Maß* bezeichnet.

Satz 1.2 (Vervollständigung) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und

$$N_\mu := \{B | B \subseteq A \wedge A \in \mathcal{A} \wedge \mu(A) = 0\}.$$

Für die Vervollständigung einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ bzgl. μ

$$\mathcal{A}_\mu := \{E \cup N | E \in \mathcal{A} \wedge N \in N_\mu\}$$

gilt:

1. $\mathcal{A}_\mu \supseteq \mathcal{A}$ ist σ-Algebra.

2. Es gibt genau ein Maß $\overline{\mu}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}_\mu)$ mit $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}$. Ferner gilt für $E \cup N \in \mathcal{A}_\mu$

$$\overline{\mu}(E \cup N) = \mu(E).$$

3. $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \overline{\mu})$ ist ein vollständiger Maßraum, d.h.

$$A \in \mathcal{A}_\mu \wedge \overline{\mu}(A) = 0 \wedge B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{A}_\mu.$$

Definition 1.5 (Lebesgue-messbare Mengen und Lebesgue-Maß) Die Anwendung von Satz 1.2 auf das oben definierte Lebesque-Borel-Maß und die Borelsche σ-Algebra liefert die *σ-Algebra R_L^d der Lebesgue-messbaren Mengen* und das *Lebesgue-Maß* λ auf R_L^d.

Eigenschaften vom Lebesgue-Maß λ:

1. (Länge)
   Wenn $A = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d) \in R_L^d$ mit $a_i \leq b_i, \forall i = 1, ..., d$, dann ist $\lambda(A) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$. (Das gilt ebenfalls für halboffene sowie abgeschlossene mehrdimensionale Quader A.)
2. (Translationsinvarianz)
   Seien $A \in R_L^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$, dann gilt $\lambda(A + x) = \lambda(A)$.
3. (Nullmenge)
   Jede abzählbare Teilmenge $A \subseteq R_L^d$ ist eine λ-Nullmenge, d.h. $\lambda(A) = 0$ (Zum Beispiel die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.)
4. (Monotonie)
   Seien $A, B \in R_L^d$ mit $A \subseteq B$, so gilt $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

1.2 Lebesgue-messbare Funktionen

Definition 1.6 (L-messbare Funktion) Sei R_L^d die σ-Algebra aller L-messbaren Mengen des $\mathbb{R}^d$. Eine reellwertige Funktion f heißt *R_L^d-messbar* (L-messbar) auf der Menge E, falls

1. der Definitionsbereich D von f eine Obermenge von E ist ($E \subseteq D$) und
2. für jede reelle Zahl c die Menge $X = \{x | x \in E \wedge f(x) < c\}$ zu R_L^d gehört, d.h. X muss L-messbare Menge sein.

Definition 1.7 (Einfache Funktion) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *einfach* auf $\Omega = [a, b]$, wenn $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$ mit

$$1_{A_i}(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in A_i \\ 0 & \text{, falls } x \notin A_i \end{cases}$$

und $a_i \in \mathbb{R}$. Dabei ist die Menge $\{A_i\}_{i=1}^n$ von paarweise disjunkten messbaren Teilmengen $A_i \subseteq \Omega$ eine endliche und messbare Zerlegung von Ω, d.h. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Satz 1.3 (Aussagen über beschränkte Funktionen) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, dann sind die drei folgenden Aussagen äquivalent.

1. f ist L-messbar.
2. Es gibt eine Folge von einfachen Funktionen $\{f_n\}_{i=1}^{\infty}$, welche gleichmäßig gegen f konvergiert.

3. Es seien
$$U_\lambda(f) := \{u(x) | u(x) \text{ einfache Funktion } \wedge f(x) \leq u(x) \, \forall x \in [a,b]\}$$
und
$$L_\lambda(f) := \{v(x) | v(x) \text{ einfache Funktion } \wedge v(x) \leq f(x) \, \forall x \in [a,b]\},$$
dann gilt
$$\sup_{v \in L_\lambda(f)} \left\{ \int_{[a,b]} v(x) \lambda(dx) \right\} = \inf_{u \in U_\lambda(f)} \left\{ \int_{[a,b]} u(x) \lambda(dx) \right\}.$$

2 Lebesque-Integrierbarkeit

Beispiel 2.1 (Dirichlet-Funktion) Die Dirichlet-Funktion
$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
ist nicht R-integrierbar, jedoch L-integrierbar, da
$$\int_{[0,1]} f(x) \lambda(dx) = 1 \cdot \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot \lambda([0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0.$$

2.1 Lebesgue-Integrierbarkeit von einfachen Funktionen

Satz 2.1 (L-Integrierbarkeit einfacher Funktionen) Für eine einfache Funktion $f(x)$, gemäß obiger Definition, ist das *L-Integral* folgendermaßen definiert:
$$\int_\Omega f(x) \lambda(dx) = \sum_i a_i \lambda(A_i)$$

2.2 Lebesgue-Integrierbarkeit von beschränkten Funktionen

Definition 2.1 (L-Integrierbarkeit von beschränkten Funktionen) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte L-messbare Funktion, so ist das *L-Integral* von f wie folgt definiert:
$$\int_{[a,b]} f(x) \lambda(dx) = \sup_{v \in L_\lambda(f)} \left\{ \int_{[a,b]} v(x) \lambda(dx) \right\}$$
oder äquivalent
$$\int_{[a,b]} f(x) \lambda(dx) = \inf_{u \in U_\lambda(f)} \left\{ \int_{[a,b]} u(x) \lambda(dx) \right\}.$$

Eigenschaften des L-Integrals:
Seien f und g beschränkte L-messbare Funktionen auf $[a,b]$, dann hat das L-Integral folgende Eigenschaften:

1. (Linearität)
   Für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\int_{[a,b]} \{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} \lambda(dx) = \int_{[a,b]} c_1 f(x) \lambda(dx) + \int_{[a,b]} c_2 g(x) \lambda(dx)$$

2. (Monotonie)
   Sei $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in [a,b]$, dann gilt:

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,\lambda(dx) \leq \int\limits_{[a,b]} g(x)\,\lambda(dx)$$

3. (Betrag)
   $f(x)$ ist L-messbar $\Rightarrow |f(x)|$ L-messbar und es gilt:

$$\left| \int\limits_{[a,b]} f(x)\,\lambda(dx) \right| \leq \int\limits_{[a,b]} |f(x)|\,\lambda(dx)$$

4. (λ-Nullmenge)
   Sei $f(x) = g(x) \, \forall x \in [a,b]$ mit Ausnahme einer Menge $A \subseteq [a,b]$ und $\lambda(A) = 0$. Dann gilt

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,\lambda(dx) = \int\limits_{[a,b]} g(x)\,\lambda(dx)$$

Satz 2.2 (Zusammenhang zwischen R-Integrierbarkeit und L-Integrierbarkeit) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine (beschränkte) Funktion, die R-integrierbar auf $[a,b]$ ist, so ist $f(x)$ auch L-integrierbar und es gilt:

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,\lambda(dx) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$

2.3 Lebesgue-Integrierbarkeit von unbeschränkten Funktionen

Definition 2.2 (L-Integrierbarkeit von unbeschränkten Funktionen) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine nicht negative L-messbare Funktion. Sei $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ mit $n \in \mathbb{R}_+$. $f_n(x)$ ist somit eine beschränkte L-messbare Funktion und das *L-Integral* von f ist wie folgt definiert:

$$I := \int\limits_{[a,b]} f(x)\,\lambda(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} f_n(x)\,\lambda(dx).$$

Falls $I < \infty$, so sagt man f ist L-integrierbar.

Anmerkung 2.1 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine nicht negative L-integrierbare Funktion und $A := \{x \in [a,b] \,|\, f(x) = +\infty\}$, so gilt $\lambda(A) = 0$.

3 L^p-Räume

Es $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ ein Maßraum.

Definition 3.1 Für $1 \leq p < \infty$ bezeichne $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ die Menge der $\mathcal{A}$-messbaren numerischen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\,\lambda(dx) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Bezeichnung 3.1

$p = 1$:	λ-integrierbare Funktionen
$p = 2$:	quadratisch λ-integrierbare Funktionen
allgemein:	p-fach λ-integrierbare Funktionen