Satz 1. *Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $T > 0$. Es sei $M \subset X$ eine kompakte Teilmenge von X und*

$$f : [0, T] \times M \to X$$

sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Dann erfüllt f sogar eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung bezüglich $v \in M$.

Wir geben zuerst einen direkten Beweis[1]. Eleganter geht es indirekt (siehe Rückseite).

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $(t, u) \in [0, T] \times M$ Konstanten $a(t) > 0, r(u) > 0$ und $L(t, u) \geq 0$, so daß für alle Elemente $s \in [0, T]$ mit $|s - t| < a(t)$ und $v, w \in M$ mit $\|v - u\|, \|v - w\| < r(u)$ gilt:

$$\|f(s, v) - f(s, w)\| \leq L(u, t)\|v - w\|.$$

Die offenen Mengen $U(t, u) := (t - a(t), t + a(t)) \times B(u, r(u)/2)$ mit $(t, u) \in [0, T] \times M$ überdecken natürlich ganz $[0, T] \times M$. Da mit M auch $[0, T] \times M$ kompakt ist, so gibt es endlich viele Elemente $(t_i, u_i) \in [0, T] \times M$, $i = 1, \ldots, n$ mit

$$[0, T] \times M \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(t_i, u_i).$$

Da f nach Voraussetzung insbesondere stetig ist, so ist das Bild $f([0, T] \times M)$ beschränkt, hat also endlichen Durchmessser, welchen wir mit *diam* bezeichnen wollen. Es ist also $diam < \infty$.
Wir setzen noch $\delta := \min_{i=1,\ldots,n} r(u_i)/2 > 0$ und schließlich

$$L := \frac{diam}{\delta} \max\{L(t_1, u_1), \ldots, L(t_n, u_n), 1\} \geq 0.$$

Dann gilt eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante L: Wir betrachten beliebige $(t, v), (t, w) \in [0, T] \times M$. Es gibt dann $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $(t, v) \in U(t_i, u_i)$, also $|t - t_i| < a(t_i)$ und $\|v - u_i\| < r(u_i)/2$. Ist $\|v - w\| < \delta$, so folgt

$$\|w - u_i\| \leq \|w - v\| + \|v - u_i\| < \delta + r(u_i)/2 < r(u_i),$$

also ist auch $(t, w) \in U(t_i, u_i)$. Damit folgt in diesem Fall

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L(t_i, u_i)\|v - w\| < L\|v - w\|.$$

Im anderen Fall, also $\|v - w\| \geq \delta$, ist

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq diam = (\delta^{-1} diam)\delta \leq L\|v - w\|.$$

Also gilt $\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L\|v - w\|$ für alle $t \in [0, T]$ und $v, w \in M$. $\square$

[1] nach H.Amann, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, de Gruyter, Berlin, New York, 1983, S. 102f

Hier also der versprochene elegante Widerspruchsbeweis.[2]

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung gelte nicht. Es gibt somit zu jedem $L > 0$ Punkte $(t, v), (t, w) \in [0, T] \times M$ mit

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| > L\|v - w\|.$$

Insbesondere gilt dies für $L = n \in \mathbb{N}$, und somit gibt es Folgen

$$(t_n, v_n), (t_n, w_n) \subset [0, T] \times M$$

mit

$$\|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n)\| > n \|v_n - w_n\| \tag{1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Kompaktheit von sowohl $[0, T]$ als auch M folgt nun, daß es konvergente Teilfolgen $(t_{n_k}), (v_{n_k}), (w_{n_k})$ von $(t_n), (v_n)$ und (w_n) gibt. Es ist kein Verlust der Allgemeinheit, wenn wir diese fortan wieder mit $(t_n), (v_n)$ und (w_n) bezeichnen. Es gibt also Elemente $t \in [0, T]$ und $v, w \in M$ mit $|t_n - t|, \|v_n - v\|, \|w_n - w\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Wir behaupten nun

$$\|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n)\| \to \|f(t, v) - f(t, w)\| \qquad \text{für } n \to \infty. \tag{2}$$

Dies sieht man folgendermaßen. Es ist

$$\begin{aligned} \|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n) \ &- \ (f(t, v) - f(t, w))\| \\ &\leq \|f(t_n, v_n) - f(t, v)\| + \|f(t_n, w_n) - f(t, w)\|. \end{aligned} \tag{3}$$

Da (t_n, v_n) und (t_n, w_n) für $n \to \infty$ gegen (t, v) beziehungsweise (t, w) konvergieren, folgt mit der Stetigkeit von f, daß die rechte Seite von (3) gegen 0 konvergiert und somit auch die linke Seite. Damit ist (2) gezeigt und wir erhalten, daß die linke Seite von (1) für $n \to \infty$ konvergiert, also insbesondere beschränkt ist. Dies geht aber nur, wenn auf der rechten Seite $\|v_n - w_n\|$ gegen 0 konvergiert, also $v = w$ gilt.

Nach der vorausgesetzten lokalen Lipschitzbedingung gibt es Konstanten $a(t) > 0, r(v) > 0$ und $L(t, v) \geq 0$, so daß

$$\|f(s, x) - f(s, x')\| \leq L(t, v)\|x - x'\|$$

für alle $s \in [0, T]$ mit $|s - t| < a(t)$ und $x, x' \in M$ mit $\|x - v\|, \|x' - v\| < r(v)$ gilt. Für hinreichend großes n ist nun sowohl $|t_n - t| < a(t)$, als auch $\|v_n - v\|, \|w_n - w\| < r(v)$ gewährleistet und es gilt somit

$$\|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n)\| \leq L(t, v)\|v_n - w_n\|$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme (1), sofern nur n größer als $L(t, v)$ ist. □

[2]nach B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*,Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, München, 2004