Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. Etienne Emmrich

Wintersemester 2008/09

Differentialgleichungen I

13. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 02.02. bis 08.02.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbert-Raum und $A \in \mathcal{L}(H)$ ein akkretiver Operator, d. h., $-A$ sei dissipativ. Zeige, daß der Operator $R_\lambda := (I + \lambda A)^{-1}$ (wobei $I : H \to H$ die identische Abbildung ist) für jedes $\lambda \geq 0$ als linearer und beschränkter Operator in H existiert und *nichtexpansiv* ist, d. h., für alle $u, v \in H$ gilt

$$\|R_\lambda u - R_\lambda v\| \leq \|u - v\|.$$

Hinweis: Für $\lambda \neq 0$ betrachte zur Lösung von $(I + \lambda A)u = f$ die Rekursionsvorschrift

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (I + \lambda A)u^n = f$$

für ein beliebiges $u^0 \in H$ und $\tau > 0$ geeignet gewählt.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Für eine äquidistante Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$ in N Teilintervalle der Länge $\Delta t = T/N$ betrachte man das folgende Schema:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1;\ u^0 \text{ gegeben},$$

mit $t_{n+\frac{1}{2}} := \frac{t_n + t_{n+1}}{2}$ und $u^{n+\frac{1}{2}} := \frac{u^n + u^{n+1}}{2}$, zur Approximation der Lösung $u(t_n) \approx u^n$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Zeige, daß das Verfahren wohldefiniert ist, beweise A-priori-Abschätzungen für $\{u^n\}$, $\{\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}\}$ und zeige schließlich, daß der Fehler sich wie $(\Delta t)^2$ verhält, wenn u''' existiert und geeignet integrierbar ist.

Hinweis: Leite folgende Fehlergleichung her,

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}\Big(\int_{t_n}^{t_{n+\frac{1}{2}}} (t - t_n)^2 u'''(t)dt + \int_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t)^2 u'''(t)dt\Big)$$
$$+ f(t_{n+\frac{1}{2}}, u(t_{n+\frac{1}{2}})) - f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}})\,.$$

Aufgabe 3: **3 Punkte**

1. Löse das Randwertproblem für die Differentialgleichung

$$-u''(x) + 2u'(x) + 8u(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

mit

(i) homogenen Dirichlet-Randbedingungen,

(ii) $u(0) = 0,\ u(1) = 1,$

für die rechten Seiten

(a) $f(x) \equiv 0,$

(b) $f(x) = 6(1 - 4x^2)e^{4x},$

und skizziere die Lösungen.

2. Unter welchen Bedingungen ist die Aufgabe

$$-u''(x) = 0$$

mit Robinschen Randbedingungen lösbar?