

Differentialgleichungen I

1. Übungsblatt

Abgabe in den Tutorien in der Woche vom 27.10. bis zum 02.11.

Aufgabe 1:

2 Punkte

Es sei T eine kontrahierende Abbildung eines metrischen Raumes (X, d) in sich. Zeige, daß auf die Existenz eines Fixpunktes nicht geschlossen werden kann, falls X nicht vollständig ist. Wie verhält es sich mit der Einzigkeit?

Sei nun Vollständigkeit von X gegeben.

Zeige: Aus

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y), \quad x, y \in X$$

folgt weder Existenz noch Einzigkeit eines Fixpunktes von T und aus

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \quad x, y \in X, \quad x \neq y$$

folgt zwar Einzigkeit, nicht aber die Existenz eines Fixpunktes von T . Zeige ferner, daß es im Banachschen Fixpunktsatz genügt zu fordern, daß T^m eine Kontraktion ist für ein festes $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2: Medikation

3 Punkte

Ein Mensch besteht bekanntlich aus zwei Teilen: dem Verdauungsapparat und dem Blutkreislauf. Dieser Mensch, unser Patient, nimmt nun ein Medikament ein, z. B. den Blutdrucksenker Felodipin (ein Kalziumantagonist), das zuerst in den Verdauungsapparat gelangt und von dort an den Blutkreislauf abgegeben wird. Für die Wirkung eines solchen Medikaments ist die Menge im Blut entscheidend; durch die orale Einnahme kann aber nur die Menge im Verdauungstrakt direkt beeinflußt werden.

Der Wirkstoff wird im Blut abgebaut. Die relative Änderung der Wirkstoffmenge im Blut durch diesen Abbau in einer gewissen Zeitspanne kann dabei als proportional zu dieser Zeitspanne angesehen werden, sofern diese kurz genug ist. Gleiches gilt für den Transport des Medikaments vom Verdauungsapparat in den Blutkreislauf.

- (i) Wir nehmen zuerst an, der Patient bekomme nur einmal eine Dosis Felodipin verabreicht. Wie sieht das Differentialgleichungssystem aus, das die Stoffmengen im Blut und in der Verdauung beschreibt? Löse das System und skizziere den Verlauf der Wirkstoffmenge im Blut.
- (ii) Ein Blutdrucksenker wird normalerweise nicht nur einmal, sondern in regelmäßigen Abständen in gleichen Dosen eingenommen. Was passiert mit dem Wirkstoffpegel im Blut auf lange Sicht?

- (iii) Nach Injektion direkt in die Blutbahn ist bei Felodipin nach 10 Stunden noch die Hälfte der injizierten Dosis im Blut nachweisbar. Bei einmaliger oraler Verabreichung ist nach 2 Stunden die Hälfte der Wirkstoffmenge ins Blut übergegangen¹.

Ein solches Medikament wird der Bequemlichkeit zuliebe häufig nur einmal täglich eingenommen. Unser Patient soll auf einen Wirkstoffspiegel von 100 mg „eingestellt“ werden. Wie hoch muß die tägliche Dosis sein?

Was passiert, wenn der Patient die Tablette teilt und die eine Hälfte morgens, die andere Hälfte zwölf Stunden später am Abend einnimmt?

Aufgabe 3:

2 Punkte

Bestimme jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und löse anschließend das entsprechende Anfangswertproblem.

(i) $u' = tu^{-1}(1 + u^2), \quad u(0) = 1;$

(ii) $u' + 2u = \sin(t), \quad u(0) = 0.$

(iii) $u'' - 2u' + 5u = \exp(t), \quad u(0) = 1, u'(0) = 2.$

Aufgabe 4:

1 Punkt

Bestimme ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5:

3 Punkte

Sei j eine reelle Zahl. Zeige, daß $j \leq 4/9$ eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Randwertproblems²

$$\begin{cases} \phi''(x) = \frac{j}{\sqrt{\phi(x)}} & \text{für } x \in (0, 1) \\ \phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 1 \end{cases}$$

ist.

(Hinweis: Mit ϕ' multiplizieren und zweimal geeignet integrieren.)

¹Diese Geschwindigkeit kann sich allerdings, z.B. bei der gleichzeitigen Einnahme von Grapefruitsaft, deutlich erhöhen!

²Dieses Randwertproblem ist eng verbunden mit dem Gesetz von CHILD-LANGMUIR, welches den Zusammenhang zwischen Stromdichte und Spannung in einer Diode beschreibt, die aus zwei unendlichen, parallelen Platten in einem Vakuum besteht. Das Gesetz findet Anwendung z. B. in der Plasmaphysik.