Функциональный анализ и его приложения
2009, т. 43, вып. 1, с. 3–21

УДК 517.962.24+517.965+517.957+517.958

Дискретные нелинейные гиперболические уравнения. Классификация интегрируемых случаев*

© 2009. В. Э. Адлер, А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис

Мы рассматриваем дискретные нелинейные гиперболические уравнения на квад-графах, в частности, на решетке $\mathbb{Z}^2$. Поля ассоциированы с вершинами и уравнение $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ связывает четыре вершины одной ячейки. Интегрируемость уравнений понимается как 3D-совместность. Это означает, что уравнения одного и того же типа можно приписать всем граням трехмерного куба так, что полученная система будет совместной. Это позволяет также распространить данные уравнения на многомерные решетки $\mathbb{Z}^N$. Мы классифицируем интегрируемые уравнения с комплексными полями x и с Q, являющимся мультиаффинным многочленом по всем аргументам. Метод основан на анализе сингулярных решений.

§1. Введение

Концепция совместности является центральной в теории интегрируемых систем. Она появляется уже в самом определении вполне интегрируемого по Лиувиллю–Арнольду гамильтонова потока, которое гласит, что поток должен быть включен в полное семейство коммутирующих (совместных) гамильтоновых потоков [1]. Аналогично, для солитонных (интегрируемых) уравнений в частных производных характерно то, что они не являются изолированными объектами, но всегда организованы в иерархии совместных систем. Условие существования набора коммутирующих систем может быть положено в основу *симметрийного подхода* в задаче о выделении и классификации интегрируемых случаев среди того или иного типа уравнений общего вида [18]. Еще одним проявлением идеи совместности является связь между непрерывными и дискретными системами, основанная на понятии *преобразования Бэклунда* и *теореме Бьянки о перестановочности* [9]. Последняя играет роль одного из фундаментальных принципов в дискретной дифференциальной геометрии [12].

Итак, совместность дискретных уравнений выходит на центральную сцену. Мы говорим, что

> d-мерное дискретное уравнение обладает свойством *совместности*, если оно может быть согласованно распространено на все d-мерные подрешетки в $(d+1)$-мерной решетке

(более точное определение дается ниже). Из сказанного выше следует, что связь данного понятия с интегрируемостью не является новой идеей. В случае $d = 1$ она использовалась как возможное определение интегрируемости отображений [24]. При $d = 2$ решающий шаг был сделан в [10] и, независимо, в [19]: было

*Работа первого автора поддержана DFG Research Unit 565 “Polyhedral Surfaces” и грантом РФФИ 04-01-00403. Работа второго автора поддержана DFG Research Unit 565 “Polyhedral Surfaces”. Работа третьего автора поддержана ESF Scientific Programme “Methods of Integrable Systems, Geometry, Applied Mathematics” (MISGAM).

показано, что интегрируемость в обычном смысле солитонной теории (как существование представления нулевой кривизны) *выводится* для двумерных систем из трехмерной совместности. Таким образом, последнее свойство может быть принято в качестве определения интегрируемости. Данный критерий допускает алгоритмическую проверку, без какой-либо дополнительной информации, кроме той, что заложена в самом уравнении. Более того, если результат проверки положителен, то мы получаем также дискретное представление нулевой кривизны.

Элементарным строительным блоком систем на квад-графах является квад-уравнение, т. е. уравнение

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{1}$$

на четырехугольной ячейке, где полевые переменные $x_i \in \mathbb{CP}^1$ приписаны вершинам четырехугольника, как показано на рис. 1. На решетке $\mathbb{Z}^2$ уравнения такого типа можно интерпретировать как дискретные аналоги нелинейных гиперболических уравнений. Начально-краевые задачи типа Гурса для таких систем изучались в [6].

Предположение. В данной работе мы предполагаем, что Q является *мультиаффинным* многочленом, т. е. имеет степень 1 по каждому аргументу. Отсюда следует, что уравнение (1) можно разрешить относительно любой переменной, причем ответ является рациональной функцией от остальных трех переменных.

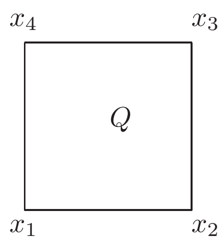

Рис. 1. Квад-уравнение $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$;
переменные x_i приписаны вершинам

Общая идея интегрируемости как совместности изображается для уравнений данного типа рисунком 2. Мы приписываем шесть квад-уравнений граням координатного куба. Значок j обозначает сдвиг в направлении j-й координаты. Стартуя с произвольных значений x, x_1, x_2, x_3, мы находим значения x_{12}, x_{13}, x_{23} при помощи трех уравнений на левой, передней и нижней гранях, а уравнения на правой, задней и верхней грани определяют, вообще говоря, три разных значения для x_{123}. Система называется 3D-совместной, если данные три значения тождественно равны для произвольных начальных данных x, x_1, x_2, x_3.

В [3] мы классифицировали 3D-совместные системы частного вида. Уравнения на всех гранях предполагались одинаковыми с точностью до параметров, ассоциированных с тремя направлениями ребер. Кроме того, мы накладывали условия симметрии куба, а также некое дополнительное условие, так называемое свойство тетраэдральности (см. ниже). 3D-совместная система без этого свойства была найдена в [13], позднее было показано, что она линеаризуема [22].

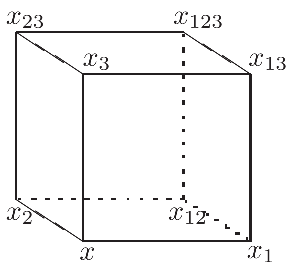

Рис. 2. 3D-совместная система квад-уравнений.
Уравнения приписаны граням куба

В [26] было показано, что 3D-совместные уравнения из списка [3] удовлетворяют тесту на интегрируемость, основанному на понятии алгебраической энтропии.

Данный подход обобщался в различных направлениях. Системы с полями на ребрах ведут к отображениям Янга–Бакстера [25], [23], [20]. Квадрирациональные отображения Янга–Бакстера были классифицированы в [4]. 4D-совместность дискретных 3D-систем связана с функциональным уравнением тетраэдра, изучавшимся в [17], [16], [15], [8].

В настоящей статье мы возвращаемся к задаче классификации 3D-совместных мультиаффинных квад-уравнений в более общей постановке. Допускается a priori, что граням совместного куба могут отвечать разные квад-уравнения. Не накладываются ни условие симметрии, ни условие тетраэдральности. Это ведет к общей классификации интегрируемых квад-уравнений.

Схематически наш подход заключается в следующем.

a) Последовательно исключая переменные при помощи операций типа дискриминанта, можно устроить спуск от мультиаффинного многочлена от четырех переменных, ассоциированного с четырехугольником, к биквадратичным многочленам от двух переменных, ассоциированным с его сторонами и, наконец, к многочленам четвертой степени от одной переменной, ассоциированным с вершинами (§2).

b) Анализируя сингулярные решения, мы доказываем, что биквадратичные многочлены, пришедшие на ребро куба с двух смежных граней, совпадают с точностью до постоянного множителя (см. §3). В этом месте требуется некоторое дополнительное условие невырожденности: мы предполагаем, что рассматриваемые биквадратичные многочлены не имеют множителей типа $x - \mathrm{const}$. (Примеры уравнений без этого свойства приведены в §7).

c) Это позволяет сопоставить каждой вершине куба многочлен четвертой степени от соответствующей переменной; допустимые наборы многочленов классифицируются по модулю преобразований Мёбиуса, причем каждая переменная преобразуется независимо от других (§4).

d) В завершение, мы обращаем процедуру, восстанавливая сначала биквадратичные многочлены на ребрах куба, а затем и сами мультиаффинные уравнения (§6).

§2. Мультиаффинные и биквадратичные уравнения

Наш подход основан на спуске с граней на ребра и далее на вершины куба. В этом параграфе мы рассмотрим одну отдельную грань и опишем этот спуск безотносительно к 3D-совместности. Пусть $\mathscr{P}_n^m$ обозначает множество многочленов от n переменных степени m по каждой из них. Рассмотрим следующее действие преобразований Мёбиуса на многочлены $f \in \mathscr{P}_n^m$:

$$M[f](x_1,\dots,x_n) = (c_1x_1+d_1)^m \cdots (c_nx_n+d_n)^m f\left(\frac{a_1x_1+b_1}{c_1x_1+d_1},\dots,\frac{a_nx_n+b_n}{c_nx_n+d_n}\right),$$

где $a_id_i - b_ic_i = \Delta_i \neq 0$. Операции

$$\mathscr{P}_4^1 \xrightarrow{\delta_{x_i,x_j}} \mathscr{P}_2^2 \xrightarrow{\delta_{x_k}} \mathscr{P}_1^4, \qquad \delta_{x,y}(Q) = Q_xQ_y - QQ_{xy}, \quad \delta_x(h) = h_x^2 - 2hh_{xx}$$

ковариантны по отношению к преобразованиям Мёбиуса (индексы x, y обозначают частные производные). Точнее: если $Q \in \mathscr{P}_4^1$, $h \in \mathscr{P}_2^2$, то

$$\delta_{x_i,x_j}(M[Q]) = \Delta_i\Delta_j M[\delta_{x_i,x_j}(Q)], \quad \delta_{x_i}(M[h]) = \Delta_i^2 M[\delta_{x_i}(h)]. \tag{2}$$

В дальнейшем мы широко используем *относительные инварианты* многочленов относительно преобразований Мёбиуса. Для многочленов четвертой степени $r \in \mathscr{P}_1^4$ эти относительные инварианты хорошо известны и определяются как коэффициенты вейерштрассовской нормальной формы $r = 4x^3 - g_2x - g_3$. Для данного многочлена $r(x) = r_4x^4 + r_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_0$ они задаются формулами (см., например, [28])

$$\begin{aligned} g_2(r,x) &= \frac{1}{48}(2rr^{IV} - 2r'r''' + (r'')^2) = \frac{1}{12}(12r_0r_4 - 3r_1r_3 + r_2^2),\\ g_3(r,x) &= \frac{1}{3456}(12rr''r^{IV} - 9(r')^2r^{IV} - 6r(r''')^2 + 6r'r''r''' - 2(r'')^3)\\ &= \frac{1}{432}(72r_0r_2r_4 - 27r_1^2r_4 + 9r_1r_2r_3 - 27r_0r_3^2 - 2r_2^3). \end{aligned}$$

При мёбиусовой замене $x = x_1$ эти величины лишь умножаются на постоянные множители:

$$g_k(M[r],x) = \Delta_1^{2k} g_k(r,x), \qquad k = 2,3.$$

Для биквадратичных многочленов $h \in \mathscr{P}_2^2$,

$$h(x,y) = h_{22}x^2y^2 + h_{21}x^2y + h_{20}x^2 + h_{12}xy^2 + h_{11}xy + h_{10}x + h_{02}y^2 + h_{01}y + h_{00}, \tag{3}$$

относительными инвариантами являются величины

$$\begin{aligned} i_2(h,x,y) &= 2hh_{xxyy} - 2h_xh_{xyy} - 2h_yh_{xxy} + 2h_{xx}h_{yy} + h_{xy}^2\\ &= 8h_{00}h_{22} - 4h_{01}h_{21} - 4h_{10}h_{12} + 8h_{02}h_{20} + h_{11}^2,\\ i_3(h,x,y) &= \frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} h & h_x & h_{xx}\\ h_y & h_{xy} & h_{xxy}\\ h_{yy} & h_{xyy} & h_{xxyy}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} h_{22} & h_{21} & h_{20}\\ h_{12} & h_{11} & h_{10}\\ h_{02} & h_{01} & h_{00}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что i_3 можно определить также формулой

$$-4i_3(h,x,y) = \delta_{x,y}(\delta_{x,y}(h))/h.$$

Закон преобразования при мёбиусовых заменах $x = x_1$ и $y = x_2$ имеет вид

$$i_k(M[h], x, y) = \Delta_1^k \Delta_2^k i_k(h, x, y), \qquad k = 2, 3.$$

Следующие свойства операций $\delta_{x,y}$, δ_x проверяются прямыми вычислениями.

Лемма 1. *Для любого мультиаффинного многочлена $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathscr{P}_4^1$ выполняются тождества*

$$\delta_{x_3}(\delta_{x_1,x_2}(Q)) = \delta_{x_2}(\delta_{x_1,x_3}(Q)), \tag{4}$$

$$i_k(\delta_{x_1,x_2}(Q), x_3, x_4) = i_k(\delta_{x_3,x_4}(Q), x_1, x_2), \qquad k = 2, 3. \tag{5}$$

Для любого биквадратичного многочлена $h(x_1, x_2) \in \mathscr{P}_2^2$ верно тождество

$$g_k(\delta_{x_1}(h), x_2) = g_k(\delta_{x_2}(h), x_1), \qquad k = 2, 3. \tag{6}$$

Положим $h^{ij} = h^{ji} = \delta_{x_k,x_l}(Q)$, где $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда из леммы 1 следует коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
r_4(x_4) & h^{34}(x_3, x_4) \arrow[l, "\delta_{x_3}"'] \arrow[r, "\delta_{x_4}"] & r_3(x_3) \\
h^{14}(x_1, x_4) \arrow[u, "\delta_{x_1}"] \arrow[d, "\delta_{x_4}"'] & Q(x_1, x_2, x_3, x_4) \arrow[l, "\delta_{x_2,x_3}"'] \arrow[r, "\delta_{x_1,x_4}"] \arrow[u, "\delta_{x_1,x_2}"'] \arrow[d, "\delta_{x_3,x_4}"] & h^{23}(x_2, x_3) \arrow[u, "\delta_{x_2}"'] \arrow[d, "\delta_{x_3}"] \\
r_1(x_1) & h^{12}(x_1, x_2) \arrow[l, "\delta_{x_2}"'] \arrow[r, "\delta_{x_1}"] & r_2(x_2)
\end{tikzcd} \tag{7}$$

Более того, биквадратичные многочлены на противоположных сторонах имеют одинаковые инварианты i_2, i_3, а инварианты g_2, g_3 совпадают для всех многочленов четвертой степени r_i. Данная диаграмма может быть дополнена многочленами h^{13}, h^{24}, отвечающими диагоналям (так что возникает граф тетраэдра), но они нам не понадобятся. Для введенных многочленов выполняется еще ряд интересных соотношений.

Лемма 2. *Для любого мультиаффинного многочлена $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathscr{P}_4^1$ выполнены следующие тождества (используются обозначения $h^{ij}(x_i, x_j) = \delta_{x_k,x_l}(Q) \in \mathscr{P}_2^2$):*

$$4 i_3(h^{12}, x_1, x_2) h^{14} = \det \begin{pmatrix} h^{12} & h^{12}_{x_1} & \ell \\ h^{12}_{x_2} & h^{12}_{x_1 x_2} & \ell_{x_2} \\ h^{12}_{x_2 x_2} & h^{12}_{x_1 x_2 x_2} & \ell_{x_2 x_2} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\ell = h^{23}_{x_3 x_3} h^{34} - h^{23}_{x_3} h^{34}_{x_3} + h^{23} h^{34}_{x_3 x_3}$;

$$h^{12} h^{34} - h^{14} h^{23} = PQ, \qquad P = \det \begin{pmatrix} Q & Q_{x_1} & Q_{x_3} \\ Q_{x_2} & Q_{x_1 x_2} & Q_{x_2 x_3} \\ Q_{x_4} & Q_{x_1 x_4} & Q_{x_3 x_4} \end{pmatrix} \in \mathscr{P}_4^1, \tag{9}$$

$$\frac{2 Q_{x_1}}{Q} = \frac{h^{12}_{x_1} h^{34} - h^{14}_{x_1} h^{23} + h^{23} h^{34}_{x_3} - h^{23}_{x_3} h^{34}}{h^{12} h^{34} - h^{14} h^{23}}. \tag{10}$$

Тождество (8) показывает, что h^{14} можно выразить через три остальных биквадратичных многочлена (при условии, что $i_3(h^{12}) \neq 0$). Тождество (9) определяет Q как один из сомножителей в простом выражении, составленном из h^{ij}. Наконец, дифференцируя (10) по x_2 или x_4, мы получаем соотношение вида $Q^2 = F[h^{12}, h^{23}, h^{34}, h^{14}]$, где F есть рациональное выражение от h^{ij} и их производных. Следовательно, если известны биквадратичные многочлены на трех сторонах из четырех, то Q находится явно. Конечно, из леммы 2 ясно, что не всякий набор из трех биквадратичных многочленов может быть получен как h^{ij} для некоторого $Q \in \mathscr{P}_4^1$.

Биквадратичные многочлены h^{ij} для данного $Q \in \mathscr{P}_4^1$ тесно связаны с сингулярными решениями мультиаффинного уравнения

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \tag{11}$$

Многочлен $Q \in \mathscr{P}_4^1$ предполагается неприводимым (в частности, $Q_{x_i} \not\equiv 0$: иначе многочлен Q следует считать приводимым, так как замена $x_i \mapsto 1/x_i$ переводит его в $x_i Q$). Очевидно, что уравнение (11) разрешимо относительно любой переменной: пусть $Q = p(x_j, x_k, x_l)x_i + q(x_j, x_k, x_l)$; тогда $x_i = -q/p$ для значений x_j, x_k, x_l общего положения. Однако, значение x_i не определено в точках (x_j, x_k, x_l), лежащих на кривой

$$S_i: \quad p(x_j, x_k, x_l) = q(x_j, x_k, x_l) = 0, \quad Q \equiv px_i + q, \tag{12}$$

в $(\mathbb{CP}^1)^3$. Проекция этой кривой на координатную плоскость (j, k) есть в точности биквадратичная кривая $h^{jk} = pq_{x_l} - p_{x_l}q = 0$.

Определение 1. Решение (x_1, x_2, x_3, x_4) уравнения (11) называется *сингулярным* относительно x_i, если оно удовлетворяет также уравнению $Q_{x_i}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Кривая S_i называется *сингулярной кривой* для x_i.

Лемма 3. *Если решение* (x_1, x_2, x_3, x_4) *уравнения* (11) *сингулярно относительно* x_i, *то* $h^{jk} = h^{jl} = h^{kl} = 0$. *Обратно, если для некоторого решения* $h^{jk} = 0$, *то это решение сингулярно либо относительно* x_i, *либо относительно* x_l.

Доказательство. Так как $h^{jk} = Q_{x_i}Q_{x_l} - QQ_{x_i,x_l}$, то уравнения $h^{jk} = 0$ и $Q_{x_i}Q_{x_l} = 0$ эквивалентны на решениях уравнения $Q = 0$. □

Мы используем следующее определение невырожденности биквадратичных многочленов.

Определение 2. Биквадратичный многочлен $h(x, y) \in \mathscr{P}_2^2$ называется *невырожденным*, если его класс эквивалентности по модулю преобразований Мёбиуса не содержит многочленов, делящихся на множитель вида $x - c$ или $y - c$, где $c = \mathrm{const}$.

Согласно данному определению, невырожденный многочлен $h(x, y) \in \mathscr{P}_2^2$ либо неприводим, либо имеет вид $(\alpha_1 xy + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1)(\alpha_2 xy + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2)$, где $\alpha_i\delta_i \neq \beta_i\gamma_i$. В обоих случаях уравнение $h = 0$ определяет y как двузначную функцию от x и наоборот. С другой стороны, например, многочлен $h(x, y) = x - y^2$ (рассматриваемый как элемент из $\mathscr{P}_2^2$), является, согласно определению 2, вырожденным, так как инверсия $x \mapsto 1/x$ переводит его в $x(1 - xy^2)$.

Следующее понятие играет фундаментальную роль в нашем исследовании.

Определение 3. Мультиаффинная функция $Q \in \mathscr{P}_4^1$ относится к типу Q, если невырожденны все четыре отвечающих ей биквадратичных многочлена $h^{jk} \in \mathscr{P}_2^2$, и к типу H в противном случае.

3. 3D-совместность и биквадратичные кривые

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{array}{ll} A(x,x_1,x_2,x_{12})=0, & \bar{A}(x_3,x_{13},x_{23},x_{123})=0,\\ B(x,x_1,x_3,x_{13})=0, & \bar{B}(x_2,x_{12},x_{23},x_{123})=0,\\ C(x,x_2,x_3,x_{23})=0, & \bar{C}(x_1,x_{12},x_{13},x_{123})=0 \end{array} \tag{13}$$

на кубе, см. рис. 3. Функции $A,\dots,\bar{C}$ считаются мультиаффинными (т. е. принадлежат $\mathscr{P}_4^1$) и a priori никак не связаны друг с другом. Для соответствующих биквадратичных многочленов мы будем использовать обозначение $A^{ij} = \delta_{x_k,x_l}A$.

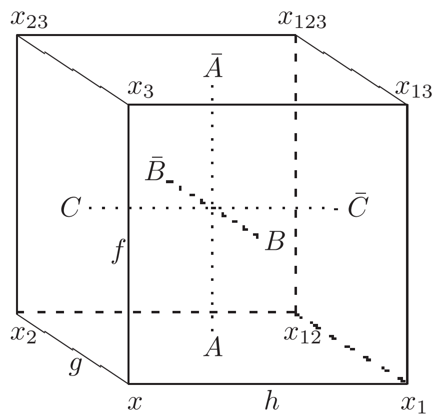

Рис. 3. 3D-совместная система квад-уравнений. Уравнения ассоциированы с гранями куба: A и $\bar{A}$ с нижней и верхней, B и $\bar{B}$ с передней и задней, C и $\bar{C}$ с левой и правой.

Теорема 1. *Пусть все шесть функций* $A,\dots,\bar{C}$ *относятся к типу* Q, *и пусть система* (13) *3D-совместна. Тогда*

1) *для каждого ребра куба два биквадратичных многочлена, отвечающие этому ребру (пришедшие с двух граней, смежных по данному ребру) совпадают с точностью до постоянного множителя*;

2) *произведение этих множителей вокруг любой вершины равно* -1, *например,*

$$A^{0,1}B^{0,3}C^{0,2} + A^{0,2}B^{0,1}C^{0,3} = 0; \tag{14}$$

3) *система* (13) *обладает свойством тетраэдральности* $\partial x_{123}/\partial x = 0$.

Доказательство. Исключение x_{12}, x_{13} и x_{23} приводит к уравнениям

$$F(\overset{2}{x},\overset{1}{x}_1,\overset{1}{x}_2,\overset{3}{x}_3,\overset{1}{x}_{123}) = \bar{A}_{x_{13},x_{23}}BC - \bar{A}_{x_{23}}B_{x_{13}}C - \bar{A}_{x_{13}}BC_{x_{23}} + \bar{A}B_{x_{13}}C_{x_{23}} = 0,$$

$$G(\overset{2}{x},\overset{1}{x}_1,\overset{3}{x}_2,\overset{1}{x}_3,\overset{1}{x}_{123}) = \bar{B}_{x_{12},x_{23}}AC - \bar{B}_{x_{23}}A_{x_{12}}C - \bar{B}_{x_{12}}AC_{x_{23}} + \bar{B}A_{x_{12}}C_{x_{23}} = 0,$$

$$H(\overset{2}{x},\overset{3}{x}_1,\overset{1}{x}_2,\overset{1}{x}_3,\overset{1}{x}_{123}) = \bar{C}_{x_{12},x_{13}}AB - \bar{C}_{x_{13}}A_{x_{12}}B - \bar{C}_{x_{12}}AB_{x_{13}} + \bar{C}A_{x_{12}}B_{x_{13}} = 0.$$

Здесь числа над аргументами функций F, G, H указывают степень, с которой данная переменная входит в правую часть (степень понимается в проективном смысле, см. пример в конце предыдущего параграфа). В силу 3D-совместности выражения для x_{123} как функции от x, x_1, x_2, x_3, найденные из этих уравнений, должны совпадать. Следовательно, имеют место разложения на множители

$$F = f(x, \overset{2}{x}_3)K, \quad G = g(x, \overset{2}{x}_2)K, \quad H = h(x, \overset{2}{x}_1)K, \quad K = K(x, \overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \overset{1}{x}_3, \overset{1}{x}_{123}), \tag{15}$$

где f, g, h — некие многочлены степени 2 по второму аргументу. Степень по x следует уточнить.

Пусть начальные значения x, x_1, x_2 суть свободные переменные, а x_3 выберем так, чтобы выполнялось уравнение $f(x, x_3) = 0$. Тогда $F \equiv 0$ и, следовательно, система $B = C = \bar{A} = 0$ не дает определенного значения x_{123}. При этом уравнение $B = 0$ разрешимо относительно x_{13}, так как иначе начальные данные были бы связаны соотношением $B^{0,1}(x, x_1) = 0$. Аналогично, уравнение $C = 0$ разрешимо относительно x_{23}. Следовательно, неопределенность возникает из-за сингулярности уравнения $\bar{A} = 0$ относительно x_{123}. Следовательно, выполняется связь $\bar{A}^{3,13}(x_3, x_{13}) = 0$. В силу предположения теоремы x_{13} является (двузначной) функцией от x_3 и не зависит от x_1. Это значит, что уравнение $B = 0$ сингулярно относительно x_1 и, следовательно, $B^{0,3}(x, x_3) = 0$. Аналогично, $C^{0,3}(x, x_3) = 0$.

Итак, мы доказали, что если $x_3 = \varphi(x)$ есть нуль многочлена f, то он является также нулем многочленов $B^{0,3}$ и $C^{0,3}$. Если один из этих трех многочленов неприводим, то отсюда уже следует их совпадение с точностью до постоянного множителя. Если многочлены приводимы, мы не можем это утверждать, так как имеется возможность $f = a^2$, $B^{0,3} = ab$, $C^{0,3} = ac$, где a, b, c мультиаффинны по x, x_3. Однако в любом случае $\deg_x f = 2$, и этого достаточно для завершения доказательства.

Действительно, отсюда следует, что $\deg_x K = 0$, т. е. выполняется свойство тетраэдральности. В свою очередь, из этого вытекает соотношение (14), как показано в [3]. Напомним это вычисление: перепишем систему (13) в виде

$$x_{12} = a(x, x_1, x_2), \quad x_{13} = b(x, x_1, x_3), \quad x_{23} = c(x, x_2, x_3),$$
$$x_{123} = d(x_1, x_2, x_3) = \bar{a}(x_3, x_{13}, x_{23}) = \bar{b}(x_2, x_{12}, x_{23}) = \bar{c}(x_1, x_{12}, x_{13})$$

и получим дифференцированием

$$\begin{aligned}
d_{x_1} &= \bar{a}_{x_{13}} b_{x_1}, & d_{x_2} &= \bar{a}_{x_{23}} c_{x_2}, & 0 &= \bar{a}_{x_{13}} b_x + \bar{a}_{x_{23}} c_x, \\
d_{x_1} &= \bar{b}_{x_{12}} a_{x_1}, & d_{x_3} &= \bar{b}_{x_{23}} c_{x_3}, & 0 &= \bar{b}_{x_{12}} a_x + \bar{b}_{x_{23}} c_x, \\
d_{x_2} &= \bar{c}_{x_{12}} a_{x_2}, & d_{x_3} &= \bar{c}_{x_{13}} b_{x_3}, & 0 &= \bar{c}_{x_{12}} a_x + \bar{c}_{x_{13}} b_x.
\end{aligned}$$

Эти уравнения сразу дают соотношение

$$a_{x_2} b_{x_1} c_{x_3} + a_{x_1} b_{x_3} c_{x_2} = 0,$$

эквивалентное (14) в силу тождества $a_{x_2}/a_{x_1} = A^{0,1}/A^{0,2}$. Переменные в уравнении (14) разделяются: $B^{0,3}/C^{0,3} = -A^{0,2}/C^{0,2} \cdot B^{0,1}/A^{0,1}$, так что $B^{0,3}/C^{0,3}$ может зависеть лишь от x. В силу предположения теоремы это отношение постоянно. □

Существуют 3D-совместные системы с уравнениями, не принадлежащими типу Q. Для таких систем утверждения теоремы 1 могут выполняться или не выполняться, как показывают следующие примеры.

Пример 1. Простейшим 3D-совместным уравнением является линейное уравнение

$$x + x_i + x_j + x_{ij} = 0.$$

В этом случае все биквадратичные многочлены равны 1, так что утверждение 1) выполнено, а утверждение 2) — нет. Так как 2) есть следствие свойства тетраэдральности 3), то последнее также не выполняется. Действительно,

$$x_{123} = 2x + x_1 + x_2 + x_3.$$

Множитель f в этом примере также равен 1, но это совпадение нарушается при преобразованиях Мёбиуса. Действительно, в этом случае $\deg_x K = 1$, и после инверсии всех переменных $x_I \to 1/x_I$ мы приходим к $f = xx_3^2$, тогда как $B^{0,3}$ переходит в $x^2x_3^2$.

Пример 2. Уравнение Хиетаринты [13]

$$(x-e^{(j)})(x_{ij}-o^{(j)})(x_i-o^{(i)})(x_j-e^{(i)})-(x-e^{(i)})(x_{ij}-o^{(i)})(x_i-e^{(j)})(x_j-o^{(j)}) = 0 \tag{16}$$

3D-совместно, но утверждение 1) не выполняется:

$$B^{0,3} = (e^{(3)} - o^{(1)})(o^{(1)} - o^{(3)})(x - e^{(3)})(x - e^{(1)})(x_3 - e^{(1)})(x_3 - o^{(3)}),$$
$$C^{0,3} = (e^{(3)} - o^{(2)})(o^{(2)} - o^{(3)})(x - e^{(3)})(x - e^{(2)})(x_3 - e^{(2)})(x_3 - o^{(3)}).$$

Множитель f пропорционален $(x - e^{(3)})(x_3 - e^{(1)})(x_3 - e^{(2)})$. Соответственно $\deg_x K = 1$ и свойство тетраэдральности не выполняется.

Пример 3. Вероятно, самый известный пример 3D-совместной системы — это дискретное потенциальное уравнение KdV

$$(x - x_{ij})(x_i - x_j) + \alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} = 0. \tag{17}$$

В этом случае все утверждения теоремы выполняются, несмотря на вырожденность биквадратичных кривых:

$$B^{0,3} = \alpha^{(1)} - \alpha^{(3)}, \quad C^{0,3} = \alpha^{(2)} - \alpha^{(3)}, \quad f = 1.$$

(Напомним, что степень понимается в проективном смысле. При инверсии эти многочлены превращаются в $x^2x_3^2$.)

Пример 4. Уравнение (Q_1)

$$Q(x, x_1, x_2, x_{12}; \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}; \delta)$$
$$= \alpha^{(1)}(x - x_2)(x_1 - x_{12}) - \alpha^{(2)}(x - x_1)(x_2 - x_{12}) + \delta\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) = 0$$

составляет совместную систему не только с собственными копиями (см. [3] и теорему 4 ниже), но и с линейными уравнениями. А именно, система, образованная уравнениями

$$Q(x, x_1, x_{12}, x_2; \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}; \delta) = 0, \quad x_{13} - x_3 = x_1 - x, \quad x_{23} - x_3 = x_2 - x$$

и их копиями на противоположных гранях, оказывается 3D-совместной. В этом случае ребру (x, x_3) отвечают многочлены

$$B^{0,3} = C^{0,3} = -1, \quad f = 1.$$

Однако, в отличие от предыдущего примера, свойство тетраэдральности не выполняется и $\deg_x K = 2$. Это значит, что многочлен f не биквадратичен и его образ при инверсии есть x_3^2. Более того, биквадратичные многочлены, отвечающие ребру (x, x_1) не совпадают:

$$A^{0,1} = \alpha^{(2)}(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})((x_1 - x)^2 - \delta(\alpha^{(1)})^2), \quad B^{0,1} = -1, \quad h = 1.$$

В этом примере мы видим, что возможна ситуация, когда предположения теоремы выполняются для одной части биквадратичных многочленов и не выполняются для другой.

§ 4. Классификация биквадратичных многочленов

Диаграмма (7) подсказывает алгоритм классификации мультиаффинных уравнений $Q = 0$ по модулю преобразований Мёбиуса. Первый шаг заключается в том, чтобы использовать преобразования Мёбиуса для приведения многочленов $r_i(x_i)$, ассоциированных с вершинами четырехугольника, к канонической форме. Согласно формулам (2),

$$\delta_{x_l}(\delta_{x_j,x_k}(M[Q])) = \Delta_j^2 \Delta_k^2 \Delta_l^2 M[\delta_{x_l}(\delta_{x_j,x_k}(Q))] = \frac{C}{\Delta_i^2} M[r_i],$$

где $C = \Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta_3^2 \Delta_4^2$. Так как многочлен Q определен с точностью до произвольного множителя, мы можем считать, что мёбиусовы замены переменных в уравнении $Q = 0$ индуцируют преобразования

$$r_i \mapsto \frac{1}{\Delta_i^2} M[r_i]$$

многочленов r_i. Это позволяет привести каждый из r_i к одной из следующих форм:

$$r = (x^2 - 1)(k^2 x^2 - 1), \quad r = x^2 - 1, \quad r = x^2, \quad r = x, \quad r = 1, \quad r = 0,$$

согласно следующим шести возможностям: r имеет четыре простых корня, два простых корня и один двойной, два двойных корня, простой и тройной корни, корень кратности четыре и, наконец, r равен нулю тождественно. В первой канонической форме мы всегда будем предполагать, что $k \neq 0, \pm 1$, так что вторая и третья формы не считаются частным случаем первой.

Не всякая пара многочленов может отвечать смежным вершинам, так как относительные инварианты многочленов в такой паре должны совпадать согласно (6). Мы определим все допустимые пары, а также решим задачу восстановления биквадратичного многочлена (3) по паре его дискриминантов

$$\delta_y(h) = h_y^2 - 2hh_{yy} = r_1(x), \qquad \delta_x(h) = h_x^2 - 2hh_{xx} = r_2(y), \tag{18}$$

что равносильно решению системы из 10 (билинейных) уравнений для 9 неизвестных коэффициентов многочлена h.

Теорема 2. *Биквадратичные многочлены с парой дискриминантов* $(r_1(x)$, $r_2(y))$ *в канонической форме существуют для следующих пар, с точностью до перестановки* x, y:

	$(y^2-1)(k^2y^2-1)$	y^2-1	y^2	y	1	0
$(x^2-1)(k^2x^2-1)$	$+$					
x^2-1		$+$	$+$			
x^2			$+$			
x				$+$	$+$	
1					$+$	$+$
0						$+$

Эти многочлены h *и их относительные инварианты* i_2, i_3 *перечислены в следующем списке*:

$$(r(x), r(y)),\ r(x) = (x^2-1)(k^2x^2-1):$$

$$h = \frac{1}{2\alpha}(k^2\alpha^2x^2y^2 + 2Axy - x^2 - y^2 + \alpha^2), \quad A^2 = r(\alpha), \tag{19}$$

$$i_2 = 3(k^2\alpha^2 + \alpha^{-2}) - k^2 - 1, \quad 4i_3 = A(k^2\alpha - \alpha^{-3});$$

$$(x^2-\delta, y^2-\delta):\quad h = \frac{\alpha}{1-\alpha^2}(x^2+y^2) - \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}xy + \frac{\delta(1-\alpha^2)}{4\alpha}, \tag{20}$$

$$i_2 = \frac{1+10\alpha^2+\alpha^4}{(1-\alpha^2)^2}, \quad i_3 = \frac{\alpha^2(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^3};$$

$$(x, y):\quad h = \frac{1}{4\alpha}(x-y)^2 - \frac{\alpha}{2}(x+y) + \frac{\alpha^3}{4}, \quad i_2 = \frac{3}{4\alpha^2},\ i_3 = \frac{1}{32\alpha^3}; \tag{21}$$

$$(x^2, y^2):\quad h = \lambda x^2 + \mu xy + \nu y^2, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1,\ i_2 = 1 + 12\lambda\nu,\ i_3 = -\lambda\mu\nu; \tag{22}$$

$$h = \lambda x^2y^2 + \mu xy + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1,\ i_2 = 1 + 12\lambda\nu,\ i_3 = \lambda\mu\nu; \tag{23}$$

$$(1,1):\quad h = \lambda(x \pm y)^2 + \mu(x \pm y) + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1,\ i_2 = 12\lambda^2,\ i_3 = \mp 2\lambda^3; \tag{24}$$

$$(0,0):\quad h = (\varkappa xy + \lambda x + \mu y + \nu)^2, \quad i_2 = 12(\varkappa\nu - \lambda\mu)^2,\ i_3 = 2(\varkappa\nu - \lambda\mu)^3; \tag{25}$$

$$(x^2-1, y^2):\quad h = \alpha y^2 \pm xy + \frac{1}{4\alpha}, \quad i_2 = 1,\ i_3 = 0; \tag{26}$$

$$(x, 1):\quad h = \pm\frac{1}{4}(y-\alpha)^2 \mp x, \quad i_2 = 0,\ i_3 = 0; \tag{27}$$

$$(1, 0):\quad h = \lambda y^2 + \mu y + \nu, \quad \mu^2 - 4\lambda\nu = 1,\ i_2 = 0,\ i_3 = 0. \tag{28}$$

Доказательство. Список получен прямым решением системы (18) для различных канонических пар (r_1, r_2). Перебор сокращается, если заметить, что $g_2^3 \neq 27g_3^2$ только в одном случае и что относительные инварианты для многочлена $r_1 = ax^2 + bx + c$ суть $12g_2 = a^2$, $216g_3 = -a^3$, так что второй многочлен должен иметь вид $r_2 = ay^2 + \tilde{b}y + \tilde{c}$. Решение для пары $(x, 0)$ оказывается пустым. □

§5. Классификация мультиаффинных уравнений типа Q

Важно отметить, что после приведения многочленов $r_i(x_i)$ к каноническому виду еще остается некоторая свобода. А именно, можно применять преобразования Мёбиуса, не меняющие вид r, для дальнейшего упрощения биквадратичной кривой h и мультиаффинного уравнения Q. В частности, список из теоремы 2 является более детальным, чем просто список биквадратичных многочленов по модулю преобразований Мёбиуса.

Действительно, многочлен (22) превращается в (23) при инверсии x; замена $x \mapsto -x$ позволяет зафиксировать знаки в многочленах (24), (26); в случае (27) знак фиксируется заменой $x \mapsto -x$, $y \mapsto iy$; многочлены (25), (28) допускают дальнейшее упрощение.

Однако преобразование переменной, отвечающей одной из четырех вершин четырехугольника, влияет на биквадратичные многочлены, отвечающие двум смежным сторонам, и, следовательно, a priori нельзя гарантировать, что все четыре биквадратичные кривые можно привести к некоторой определенной форме одновременно. Например, если каждой вершине отвечает многочлен $r_i = x_i^2$, то ребрам могут отвечать многочлены вида (22) или вида (23). Заранее не известно, можно ли привести все эти многочлены к одному и тому же виду (хотя бы и с разными коэффициентами). На самом деле это возможно, как показывает доказательство следующей теоремы.

Следующий шаг заключается в восстановлении мультиаффинных многочленов по биквадратичным. Так как нашей целью является классификация систем только типа Q, нам не нужно решать эту задачу во всей полноте. Мы отбрасываем случаи (26), (27) и (28), так как соответствующие биквадратичные кривые вырожденны. По этой же причине накладываются дополнительные ограничения на значения параметров: $\lambda\nu \neq 0$ в случаях (22), (23), $\lambda \neq 0$ в случае (24) и $\varkappa\nu - \lambda\mu \neq 0$ в случае (25).

Теорема 3. *Любое мультиаффинное уравнение типа Q эквивалентно, с точностью до преобразований Мёбиуса, одному из уравнений из следующего списка*:

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn}(\alpha)\operatorname{sn}(\beta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)(k^2x_1x_2x_3x_4+1)-\operatorname{sn}(\alpha)(x_1x_2+x_3x_4)\\&\qquad -\operatorname{sn}(\beta)(x_1x_4+x_2x_3)+\operatorname{sn}(\alpha+\beta)(x_1x_3+x_2x_4)=0,\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}&(\alpha-\alpha^{-1})(x_1x_2+x_3x_4)+(\beta-\beta^{-1})(x_1x_4+x_2x_3)-(\alpha\beta-\alpha^{-1}\beta^{-1})(x_1x_3+x_2x_4)\\&\qquad +\frac{\delta}{4}(\alpha-\alpha^{-1})(\beta-\beta^{-1})(\alpha\beta-\alpha^{-1}\beta^{-1})=0,\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}&\alpha(x_1-x_4)(x_2-x_3)+\beta(x_1-x_2)(x_4-x_3)\\&\qquad -\alpha\beta(\alpha+\beta)(x_1+x_2+x_3+x_4)+\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=0,\end{aligned}\tag{31}$$

$$\alpha(x_1-x_4)(x_2-x_3)+\beta(x_1-x_2)(x_4-x_3)-\delta\alpha\beta(\alpha+\beta)=0.\tag{32}$$

Доказательство. Пусть многочлены h^{12}, h^{23}, h^{34} и h^{14} имеют вид (19) с параметрами (α, A), (β, B), $(\tilde\alpha, \tilde A)$ и $(\tilde\beta, \tilde B)$ соответственно, лежащими на эллиптической кривой $A^2 = r(\alpha)$. Относительные инварианты i_2, i_3 многочленов h^{12} и h^{34} должны совпадать в силу (5), и легко убедиться, что это условие оставляет для $(\tilde{\alpha},\tilde{A})$ только следующие возможные значения:

$$(\alpha,A),\quad (-\alpha,-A),\quad \frac{1}{k\alpha^2}(\alpha,-A),\quad \frac{1}{k\alpha^2}(-\alpha,A),$$

и аналогичные значения возможны для $(\tilde{\beta},\tilde{B})$. На первый взгляд, нам предстоит перебор 16 четверок h^{ij}, но на самом деле ситуация значительно лучше. Действительно, согласно (2), при преобразовании Мёбиуса в уравнении $Q=0$ выполняются соотношения

$$\delta_{x_k,x_l}(M[Q])=\Delta_k\Delta_l M[\delta_{x_k,x_l}(Q)]=\frac{C}{\Delta_i\Delta_j}M[h^{ij}],$$

где $C=\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$. Так как Q определен с точностью до умножения на константу, то можно считать, что мёбиусовы замены в уравнении $Q=0$ индуцируют преобразования

$$h^{ij}\mapsto\frac{1}{\Delta_i\Delta_j}M[h^{ij}]$$

биквадратичных многочленов h^{ij}. В частности, если

$$h^{34}=h(x_3,x_4,-\alpha,-A)\quad\text{или}\quad h^{34}=h\Big(x_3,x_4,\frac{1}{k\alpha},-\frac{A}{k\alpha^2}\Big),$$

то преобразование $x_3\mapsto -x_3$, соответственно $x_3\mapsto 1/(kx_3)$, приведет h^{34} к виду

$$-h(-x_3,x_4;-\alpha,-A),\quad\text{соответственно}\ -kx_3^2h\bigg(\frac{1}{kx_3},x_4;\frac{1}{k\alpha},-\frac{A}{k\alpha^2}\bigg),\tag{33}$$

что совпадает с $h(x_3,x_4,\alpha,A)$ в силу симметрий многочлена (19). Таким образом, сделав подходящую замену переменной x_3 (причем многочлен $r(x_3)$ не меняется), мы можем предполагать, не теряя общности, что $(\tilde{\alpha},\tilde{A})=(\alpha,A)$. После этого многочлен h^{14} однозначно определяется по формуле (8), и оказывается, что при этом автоматически выполнено равенство $(\tilde{\beta},\tilde{B})=(\beta,B)$. Итак, замена одной переменной позволяет достичь совпадения параметров на противоположных сторонах квадрата. Прямое вычисление с использованием формулы (10) приводит к уравнению

$$\alpha\beta\gamma(k^2x_1x_2x_3x_4+1)+\alpha(x_1x_2+x_3x_4)+\beta(x_1x_4+x_2x_3)+\gamma(x_1x_3+x_2x_4)=0,$$

где $\gamma=(\alpha B+\beta A)/(k^2\alpha^2\beta^2-1)$, и, наконец, замена $\alpha\to\operatorname{sn}(\alpha)$, $A\to\operatorname{sn}'(\alpha)$ и аналогичная замена для β приводит его к виду (29).

В других случаях подходящая мёбиусова замена переменных x_2, x_3, x_4 также позволяет привести многочлены к виду $h^{12}=h(x_1,x_2,\alpha)$, $h^{23}=h(x_2,x_3,\beta)$, $h^{34}=h(x_3,x_4,\alpha)$. При этом прямое вычисление по формуле (8) доказывает, что, кроме того, $h^{14}=h(x_1,x_4,\beta)$. После этого ответ находится при помощи (10).

Подробнее, многочлены (20) приводят к уравнению (30). В этом случае из уравнений (5) следует, что параметры α многочленов h^{12} и h^{34} отличаются не более чем знаком. Это компенсируется заменой $x_3\to -x_3$, возможной благодаря симметрии $h(x,y,\alpha)=-h(-x,y,-\alpha)$.

В случаях (22), (23) подходящие растяжения и, если необходимо, инверсии переменных x_2, x_3, x_4 позволяют привести h^{12}, h^{23}, h^{34} к виду (20) без свободного члена; таким образом, мы приходим к тому же случаю при $\delta=0$.

Многочлен (21) отвечает уравнению (31). Это наиболее простой случай, так как параметры фиксируются уже условием (5).

В случае (24) подходящие сдвиги и, если необходимо, смена знака переменных x_2, x_3, x_4 позволяют привести h^{12}, h^{23}, h^{34} к виду $2h(x,y,\alpha)=\alpha^{-1}(x-y)^2-\delta\alpha$ при $\delta=1$. Аналогично, в случае (25) подходящее преобразование Мёбиуса общего вида приводит h^{12}, h^{23}, h^{34} к тому же виду с $\delta=0$. В обоих случаях полуинварианты равны $i_2=3\alpha^{-2}$, $4i_3=\alpha^{-3}$, следовательно параметры h^{12} и h^{34} совпадают и дальнейшие замены не нужны. В результате получаем уравнение (32). □

§6. Классификация 3D-совместных систем типа Q

Теорема 1 дает очень сильные необходимые условия для 3D-совместности в случае, когда все уравнения относятся к типу Q. Это позволит нам классифицировать в этом параграфе все такие системы. На этом заключительном этапе мы должны расположить вокруг куба найденные выше уравнения и выбрать параметры таким образом, чтобы выполнилось условие (14). Это условие может привести к смене знака или инверсии одного из параметров.

В следующей теореме мы возвращаемся к обозначениям переменных и параметров, отвечающим сдвигам на решетке. Порядок уравнений соответствует предыдущей теореме, а обозначения уравнений взяты из [3].

Теорема 4. *Любая 3D-совместная система* (13) *типа Q приводится преобразованиями Мёбиуса к одной из систем из следующего списка*:

$$\begin{gathered}\operatorname{sn}(\alpha^{(i)})\operatorname{sn}(\alpha^{(j)})\operatorname{sn}(\alpha^{(i)}-\alpha^{(j)})(k^2xx_ix_jx_{ij}+1)+\operatorname{sn}(\alpha^{(i)})(xx_i+x_jx_{ij})\\ -\operatorname{sn}(\alpha^{(j)})(xx_j+x_ix_{ij})-\operatorname{sn}(\alpha^{(i)}-\alpha^{(j)})(xx_{ij}+x_ix_j)=0,\end{gathered}\tag{Q_4}$$

$$\begin{gathered}\Big(\alpha^{(i)}-\frac{1}{\alpha^{(i)}}\Big)(xx_i+x_jx_{ij})\\ -\Big(\alpha^{(j)}-\frac{1}{\alpha^{(j)}}\Big)(xx_j+x_ix_{ij})-\Big(\frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(j)}}-\frac{\alpha^{(j)}}{\alpha^{(i)}}\Big)(xx_{ij}+x_ix_j)\\ -\frac{\delta}{4}\Big(\alpha^{(i)}-\frac{1}{\alpha^{(i)}}\Big)\Big(\alpha^{(j)}-\frac{1}{\alpha^{(j)}}\Big)\Big(\frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(j)}}-\frac{\alpha^{(j)}}{\alpha^{(i)}}\Big)=0,\end{gathered}\tag{Q_3}$$

$$\begin{gathered}\alpha^{(i)}(x-x_j)(x_i-x_{ij})-\alpha^{(j)}(x-x_i)(x_j-x_{ij})\\ +\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}(\alpha^{(i)}-\alpha^{(j)})(x+x_i+x_j+x_{ij})\\ -\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}(\alpha^{(i)}-\alpha^{(j)})((\alpha^{(i)})^2-\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}+(\alpha^{(j)})^2)=0,\end{gathered}\tag{Q_2}$$

$$\alpha^{(i)}(x-x_j)(x_i-x_{ij})-\alpha^{(j)}(x-x_i)(x_j-x_{ij})+\delta\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}(\alpha^{(i)}-\alpha^{(j)})=0.\tag{Q_1}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что уравнения разных типов (29)–(32) совместными быть не могут, так как различны соответствующие сингулярные кривые. В частности, параметры k^2 в случае (29) и δ в случаях (30), (32) должны быть одни и те же на всех гранях куба. Более того, каждое уравнение списка обладает симметрией квадрата, т.е. инвариантно относительно замен $(x_1\leftrightarrow x_2,\ x_3\leftrightarrow x_4)$ and $(x_1\leftrightarrow x_3,\ \alpha\leftrightarrow\beta)$.

Таким образом, уравнения на всех гранях могут отличаться лишь значениями α и β. Рассмотрим уравнения на трех гранях, сходящихся в одной вершине, для определенности, x:

$$Q(x,x_1,x_2,x_{12},\alpha,\tilde\beta)=0,\quad Q(x,x_2,x_3,x_{23},\beta,\tilde\gamma)=0,\quad Q(x,x_3,x_1,x_{13},\gamma,\tilde\alpha)=0.$$

Пусть

$$\delta_{x_2,x_{12}}Q(x,x_1,x_2,x_{12},\alpha,\tilde\beta)=\kappa(\alpha,\tilde\beta)h(x,x_1,\alpha).$$

Тогда в силу симметрии

$$\delta_{x_1,x_{12}}Q(x,x_1,x_2,x_{12},\alpha,\tilde\beta)=\kappa(\tilde\beta,\alpha)h(x,x_2,\tilde\beta),$$

и, согласно теореме 1, параметры должны быть связаны следующим образом:

$$\frac{h(x,x_1,\alpha)}{h(x,x_1,\tilde\alpha)}=m(\alpha,\tilde\alpha),\quad \frac{h(x,x_2,\beta)}{h(x,x_2,\tilde\beta)}=m(\beta,\tilde\beta),\quad \frac{h(x,x_3,\gamma)}{h(x,x_3,\tilde\gamma)}=m(\gamma,\tilde\gamma),$$
$$\frac{\kappa(\alpha,\tilde\beta)\kappa(\beta,\tilde\gamma)\kappa(\gamma,\tilde\alpha)}{\kappa(\tilde\beta,\alpha)\kappa(\tilde\gamma,\beta)\kappa(\tilde\alpha,\gamma)}m(\alpha,\tilde\alpha)m(\beta,\tilde\beta)m(\gamma,\tilde\gamma)=-1.$$

В случае (29) прямое вычисление показывает, что $\kappa(\alpha,\beta)=2\operatorname{sn}(\alpha)\operatorname{sn}(\beta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$ и

$$h(x,y,\alpha)=\frac{1}{2\operatorname{sn}(\alpha)}(k^2\operatorname{sn}^2(\alpha)x^2y^2+2\operatorname{sn}'(\alpha)xy-x^2-y^2+\operatorname{sn}^2(\alpha)),$$

следовательно, $\tilde\alpha$ может принимать значения $\pm\alpha$ и аналогично обстоит дело с β, γ. Очевидно, что с точностью до перенумерации, возможны два случая:

$$\tilde\alpha=-\alpha,\quad \tilde\beta=-\beta,\quad \tilde\gamma=-\gamma \quad \text{или}\quad \tilde\alpha=\alpha,\quad \tilde\beta=\beta,\quad \tilde\gamma=-\gamma.$$

Более того, это фактически один и тот же случай, так как мы можем сделать замену $(\alpha,\tilde\beta)\to(-\alpha,-\tilde\beta)$, не меняющую уравнение $Q(x,x_1,x_2,x_{12},\alpha,\tilde\beta)=0$, как легко видно из (29). Нетрудно проверить, что расстановка знаков на всем кубе всегда приводится к той, что указана в системе (Q_4).

Далее, рассмотрим случай (30). Здесь

$$\kappa(\alpha,\beta)=-\frac{(1-\alpha^2\beta^2)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{\alpha^2\beta^2},$$
$$h(x,y,\alpha)=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}(x^2+y^2)-\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}xy+\frac{(1-\alpha^2)\delta}{4\alpha}$$

и $\tilde\alpha=\alpha$ или $\tilde\alpha=1/\alpha$. Учитывая инвариантность уравнения (30) относительно одновременной инверсии α,β, можно положить, не теряя общности,

$$\tilde\alpha=1/\alpha,\quad \tilde\beta=1/\beta,\quad \tilde\gamma=1/\gamma$$

что приводит к системе (Q_3). В случаях (31), (32) имеем соответственно

$$\kappa(\alpha,\beta)=-4\alpha\beta(\alpha+\beta),\quad h(x,y,\alpha)=\frac{1}{4\alpha}(x-y)^2-\frac{\alpha}{2}(x+y)+\frac{\alpha^3}{4},$$
$$\kappa(\alpha,\beta)=-2\alpha\beta(\alpha+\beta),\quad h(x,y,\alpha)=\frac{1}{2\alpha}(x-y)^2-\frac{\alpha\delta}{2},$$

и можно положить $\tilde\alpha=-\alpha$, $\tilde\beta=-\beta$, $\tilde\gamma=-\gamma$ в точности, как и выше. Это дает системы (Q_2), (Q_1). □

Основное уравнение (Q_4) списка впервые было выведено в [2] и далее изучалось в [5]. Представление Лакса для (Q_4) было найдено в [19] методом, основанным на трехмерной совместности. Якобиева форма (Q_4), представленная в теореме 4, была найдена в [14]. Уравнения (Q_1) и $(Q_3|_{\delta=0})$ восходят к [21]. Уравнения (Q_2) и $(Q_3|_{\delta=1})$ в явном виде появились впервые в [3].

§7. Примеры систем типа *H*

В отличие от систем типа Q, системы типа H можно рассматривать как «вырожденные». Их классификация представляется довольно утомительным задачей, и сейчас мы не можем предложить эффективной процедуры ее решения. С другой стороны, примеры из §3 показывают, что этот класс нельзя просто отбросить как «патологический». Действительно, пример дискретного КдФ (17) наводит на мысль, что в некоторых случаях вырождение биквадратичной кривой может быть несущественным обстоятельством, не отражающимся на свойствах интегрируемости уравнения. Здесь мы рассмотрим еще несколько примеров такого сорта, отвечающих случаям (22), (23) при $\lambda\mu=0$, (24) при $\lambda=0$ и (25) при $\varkappa\nu-\lambda\mu=0$, которые мы исключили из рассмотрения в предыдущем параграфе. Оказывается, что если мы применим тот же алгоритм к этим случаям (хотя теперь для этого нет оснований), то будет воспроизведен список H из нашей предыдущей статьи [3]:

$$\alpha^{(i)}(xx_i+x_jx_{ij})-\alpha^{(j)}(xx_j+x_ix_{ij})+\delta((\alpha^{(i)})^2-(\alpha^{(j)})^2)=0, \tag{H_3}$$

$$(x-x_{ij})(x_i-x_j)+(\alpha^{(j)}-\alpha^{(i)})(x+x_i+x_j+x_{ij})+(\alpha^{(j)})^2-(\alpha^{(i)})^2=0, \tag{H_2}$$

$$(x-x_{ij})(x_i-x_j)+\alpha^{(j)}-\alpha^{(i)}=0. \tag{H_1}$$

Можно непосредственно проверить, что все утверждения теоремы 1 остаются верны для этих уравнений, хотя биквадратичные кривые и вырожденны.

Рассматривая асимметричные случаи (26), (27), (28) с разными многочленами в вершинах, мы находим, что возможны следующие варианты, с точностью до перестановок (ясно, что когда рассматривается одно уравнение, диагонали и стороны равноправны):

$$\begin{gathered}(x_1^2-1,x_2^2,x_3^2,x_4^2),\quad (x_1^2-1,x_2^2-1,x_3^2,x_4^2),\quad (x_1^2-1,x_2^2-1,x_3^2-1,x_4^2),\\ (x_1,1,1,1),\quad (x_1,x_2,1,1),\quad (x_1,x_2,x_3,1),\\ (1,0,0,0),\quad (1,1,0,0),\quad (1,1,1,0).\end{gathered}$$

Прямая проверка показывает, что варианты типа $\begin{pmatrix} r_2(x_4) & r_1(x_3)\\ r_1(x_1) & r_2(x_2)\end{pmatrix}$ реализуются и приводят к следующему списку 3D-совместных уравнений:

$$\alpha(x_1x_2+x_3x_4)-\beta(x_1x_4+x_2x_3)+(\alpha^2-\beta^2)\Big(\delta+\frac{\varepsilon x_2x_4}{\alpha\beta}\Big)=0, \tag{H_3^ε}$$

$$\begin{aligned}(x_1-x_3)(x_2-x_4)&+(\beta-\alpha)(x_1+x_2+x_3+x_4)+\beta^2-\alpha^2\\ &+\varepsilon(\beta-\alpha)(2x_2+\alpha+\beta)(2x_4+\alpha+\beta)+\varepsilon(\beta-\alpha)^3=0,\end{aligned} \tag{H_2^ε}$$

$$(x_1-x_3)(x_2-x_4)+(\beta-\alpha)(1+\varepsilon x_2x_4)=0. \tag{H_1^ε}$$

Этот список можно рассматривать как деформацию списка H, который отвечает случаю $\varepsilon = 0$. Однако здесь мы использовали обозначение с циклическими индексами вместо сдвиговых, так как из-за потери симметрии расположение уравнений на гранях куба требует более явного описания (см. ниже). Отметим, что в (H_1^ε) многочлен $1+\varepsilon x_2 x_4$ можно заменить на многочлен $\kappa x_2 x_4 + \mu(x_2+x_4)+\nu$ с произвольными коэффициентами. Соответствующие биквадратичные многочлены и их дискриминанты указаны в следующей таблице (с точность до нормировки $Q \to \mu(\alpha,\beta)Q$):

	$h(x_1,x_2)$	$r_1(x_1)$	$r_2(x_2)$
(H_3^ε)	$x_1x_2+\varepsilon\alpha^{-1}x_2^2+\delta\alpha$	$x_1^2-4\delta\varepsilon$	x_2^2
(H_2^ε)	$x_1+x_2+\alpha+2\varepsilon(x_2+\alpha)^2$	$1-8\varepsilon x_1$	1
(H_1^ε)	$1+\varepsilon x_2^2$	-4ε	0

Каждое из этих уравнений обладает симметрией ромба

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4,\alpha,\beta) = -Q(x_3,x_2,x_1,x_4,\beta,\alpha) = -Q(x_1,x_4,x_3,x_2,\beta,\alpha),$$

но не квадрата, так как вершинам x_1, x_2 отвечают многочлены с нулями разной кратности. Уравнения 3D-совместны на черно-белой решетке $i+j+k \pmod 2$. То есть каждой грани соответствует копия уравнения, причем так, что параметры на противоположных ребрах совпадают и x, x_{12}, x_{13}, x_{23} — вершины одного типа (здесь мы опять переключаемся на обозначения при помощи сдвигов, как на рис. 3):

$$Q(x,x_i,x_{ij},x_j,\alpha^{(i)},\alpha^{(j)})=0, \qquad Q(x_{ik},x_k,x_{jk},x_{123},\alpha^{(i)},\alpha^{(j)})=0,$$
$$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}.$$

Очевидно, что уравнения на противоположных гранях куба не совпадают, но тем не менее систему можно распространить на всю решетку $\mathbb{Z}^3$. Выполняется свойство тетраэдральности.

Наконец, отметим, что удается также скомбинировать уравнения с симметрией квадрата и трапеции. Рассмотрим опять уравнение (Q_1). Пусть одной паре противоположных граней отвечают уравнения

$$Q_1(x,x_1,x_{12},x_2;\alpha^{(1)},\alpha^{(2)})_{\delta=1}=0, \quad Q_1(x_3,x_{13},x_{123},x_{23};\alpha^{(1)},\alpha^{(2)})_{\delta=0}=0,$$

а двум остальным парам — уравнения

$$Q(x,x_i,x_{i,3},x_3,\alpha^{(i)},\varepsilon)=0, \quad Q(x_j,x_{ij},x_{123},x_{j,3},\alpha^{(i)},\varepsilon)=0, \quad \{i,j\}=\{1,2\},$$

где многочлен

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4,\gamma,\varepsilon)=(x_1-x_2)(x_3-x_4)+\gamma(\varepsilon^{-1}-\varepsilon x_3x_4)$$

фактически тот же, что и в (H_1^ε), с точностью до перестановки x_2, x_3. Это неуклюжее сооружение оказывается 3D-совместным и даже обладает свойством тетраэдральности. Эта система также может быть продолжена на решетку $\mathbb{Z}^3$.

§ 8. Заключительные замечания

Известны некоммутативные аналоги некоторых уравнений Q-типа. В частности, квантовая версия $(Q_1|_{\delta=0})$ появилась в [27]. В [11] подход, основанный на совместности, был сформулирован в некоммутативном контексте, с полями, принимающими значения в произвольной ассоциативной алгебре. Само определение трехмерной совместности в этом случае остается прежним, но предположение о мультиаффинности заменяется на требование, чтобы уравнение можно было привести к линейному виду $px = q$ относительно любой переменной x. Эти два свойства в некоммутативном случае не эквивалентны, как видно из следующих примеров. Первый был найден в [11], а два других найдены В. В. Соколовым и В. Э. Адлером (не опубликовано):

$$\alpha^{(1)}(x-x_2)(x_2-x_{12})^{-1} = \alpha^{(2)}(x-x_1)(x_1-x_{12})^{-1}, \qquad (\widehat{Q}_1|_{\delta=0})$$

$$\begin{aligned}&\alpha^{(1)}(x_1-x_{12}+\alpha^{(2)})(x-x_1-\alpha^{(1)})^{-1}\\ &\qquad = \alpha^{(2)}(x_2-x_{12}+\alpha^{(2)})(x-x_2-\alpha^{(2)})^{-1},\end{aligned} \qquad (\widehat{Q}_1|_{\delta=1})$$

$$\begin{aligned}&(1-(\alpha^{(1)})^2)(x_1-\alpha^{(2)}x_{12})(\alpha^{(1)}x-x_1)^{-1}\\ &\qquad = (1-(\alpha^{(2)})^2)(x_2-\alpha^{(1)}x_{12})(\alpha^{(2)}x-x_2)^{-1}.\end{aligned} \qquad (\widehat{Q}_3|_{\delta=0})$$

Существование некоммутативных аналогов уравнений (Q_2), $(Q_3|_{\delta=1})$ и (Q_4) остается открытым вопросом. Хотя анализ сингулярных решений может быть важен и в этой задаче как общий принцип, наша техника, основанная на алгебраических свойствах мультиаффинных и биквадратичных многочленов, непосредственно не применима. Более общие квантовые системы со свойством совместности найдены недавно в [8], [7].

Литература

[1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.

[2] V. E. Adler, *Bäcklund transformation for the Krichever-Novikov equation*, Internat. Math. Res. Notices, **1** (1998), 1–4.

[3] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach*, Comm. Math. Phys., **233**:3 (2003), 513–543.

[4] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Geometry of Yang–Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings*, Comm. Anal. Geom., **12**:5 (2004), 967–1007.

[5] V. E. Adler, Yu. B. Suris, *Q4: Integrable master equation related to an elliptic curve*, Internat. Math. Res. Notices, **47** (2004), 2523–2553.

[6] V. E. Adler, A. P. Veselov, *Cauchy problem for integrable discrete equations on quad-graphs*, Acta Appl. Math., **84**:2 (2004), 237–262.

[7] V. Bazhanov, V. Mangazeev, S. Sergeev, *Faddeev–Volkov solution of the Yang–Baxter Equation and Discrete Conformal Symmetry*, Nuclear Phys. B, **784**:3 (2007), 234–258.

[8] V. Bazhanov, S. Sergeev, *Zamolodchikov's tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups*, J. Phys. A., **39**:13 (2006), 3295–3310.

[9] L. Bianchi, *Vorlesungen über Differenzialgeometrie*, Teubner, Leipzig, 1899.

[10] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Integrable systems on quad-graphs*, Internat. Math. Res. Notices, **11** (2002), 573–611.

[11] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Integrable non-commutative equations on quad-graphs. The consistency approach*, Lett. Math. Phys., **61**:3 (2002), 241–254.

[12] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Discrete Differential Geometry. Integrable Structure*, Graduate Studies in Math., vol. 98, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[13] J. Hietarinta, *A new two-dimensional lattice model that is "consistent around a cube"*, J. Phys. A, **37**:6 (2004), L67–L73.

[14] J. Hietarinta, *Searching for CAC-maps*, J. Nonlinear Math. Phys., **12**, Suppl. 2 (2005), 223–230.

[15] Р. М. Кашаев, И. Г. Корепанов, С. М. Сергеев, *Функциональное уравнение тетраэдров*, ТМФ, **117**:3 (1998), 370–384.

[16] I. G. Korepanov, *Algebraic Integrable Dynamical Systems*, 2+1*-Dimensional Models in Wholly Discrete Space-Time, and Inhomogeneous Models in* 2*-Dimensional Statistical Physics*, http://arxiv.org/abs/solv-int/9506003.

[17] J.-M. Maillet, F. W. Nijhoff, *Integrability for multidimensional lattice models*, Phys. Lett. B, **224**:4 (1989), 389–396.

[18] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем*, УМН, **42**:4 (1987), 3–53.

[19] F. W. Nijhoff, *Lax pair for the Adler* (*lattice Krichever–Novikov*) *system*, Phys. Lett. A, **297** (2002), 49–58.

[20] V. Papageorgiou, A. Tongas, A. Veselov, *Yang–Baxter Maps and Symmetries of Integrable Equations on Quad-Graphs*, J. Math. Phys, **47**:8 (2006), 083502.

[21] G. R. W. Quispel, F. W. Nijhoff, H. W. Capel, J. van der Linden, *Linear integral equations and nonlinear difference-difference equations*, Phys. A, **125**:2–3 (1984), 344–380.

[22] A. Ramani, N. Joshi, B. Grammaticos, T. Tamizhmani, *Deconstructing an integrable lattice equation*, J. Phys. A, **39**:8 (2006), L145–L149.

[23] Yu. B. Suris, A. P. Veselov, *Lax pairs for Yang–Baxter maps*, J. Nonlinear Math. Phys., **10**:suppl. 2 (2003), 223–230.

[24] А. П. Веселов, *Интегрируемые отображения*, УМН, **46**:5 (1991), 3–45.

[25] A. P. Veselov, *Yang–Baxter maps*: *Dynamical Point of View*, in: Combinatorial Aspect of Integrable Systems, MSJ Mem., vol. 17, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007, 145–167.

[26] C. Viallet, *Algebraic Entropy for Lattice Equations*, http://arxiv.org/abs/math-ph/0609043.

[27] A. Volkov, *Quantum lattice KdV equation*, Lett. Math. Phys., **39**:4 (1997), 313–329.

[28] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, 1927, reprinted in 1996.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: adler@itp.ac.ru

Поступило в редакцию
4 июня 2007 г.

Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin
e-mail: bobenko@math.tu-berlin.de

Zentrum Mathematik, Technische Universität München
e-mail: suris@ma.tum.de