Бесплатно

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА
(Ленинградское отделение)

На правах рукописи

БОБЕНКО Александр Иванович

ПОВЕРХНОСТИ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(01.01.02 - дифференциальные уравнения)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
1991

Работа выполнена в Ленинградском отделении ордена Ленина и ордена Октябрьской революции Математического института им.Б.А.Стеклова АН СССР

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: доктор физико-математических наук, профессор В.С.БУСЛАЕВ
доктор физико-математических наук А.Г.ИЗЕРГИН
доктор физико-математических наук В.Ю.НОВОКШЕНОВ

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.М.В.ЛОМОНОСОВА

Защита состоится 2I ноября 199I г. в I4.00 часов на заседании специализированного совета Д 002.38.04 при Ленинградском отделении ордена Ленина и ордена Октябрьской революции Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР (Ленинград, н.р.Фонтанки, 27).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ленинградского отделения Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР

Автореферат разослан "____"_______ ____199Iг.

Ученый секретарь
специалиализированного совета
профессор А.П.Осколков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Возникший в I967 году метод обратной задачи к настоящему времени превратился во вполне самостоятельную математическую дисциплину - теорию вполне интегрируемых нелинейных уравнений (теорию солитонов). Этот метод, позволивший решить множество важных проблем математики и математической физики, далеко еще не исчерпал себя. Применение его к новым задачам приводит, как к интересным новым результатам, так и к дальнейшему развитию самой теории интегрируемых уравнений.

Хорошо известно, что единственная поверхность постоянной средней кривизны (ПСК) топологии сферы - это стандартная сфера (Хопф). С другой стороны, стандартная сфера - единственное компактное вложение ПСК (А.Д.Александров). Проблема описания компактных поверхностей ПСК получила название проблемы Хопфа. Первый отличный от сферы пример (тор) был построен Венте. Абреш и Вальтер описали его в эллиптических функциях.

Соответствующее уравнение Гаусса-Кодацци (ГК)

$$u_{z\bar{z}} + \operatorname{sh} u = 0 \qquad (I)$$

является интегрируемым, однако проблема построения торов ПСК была впервые связана с фактом интегрируемости уравнения (I) только в работах Хитчина [I)] и Пинкаля и Стерлинга [2)]. В этих работах неявно содержится важная теорема о том, что все двоякопериодические решения уравнения (I) - конечнозонные, однако описания самих погружений торов получено не было.

1) Hitchin N.S., Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere, J.Diff.Geom. 31 (1990)-710.

2) Pinkall U., Sterling I., On the classification of constant mean curvature tori, Ann.Math. 130 (1989), 407-451.

Упомянутая выше теорема указывает на то, что проблема может быть решена в рамках теории конечнозонного интегрирования, созданной в 70-е годы Новиковым, Дубровиным, Матвеевым, Итсом, Кричевером и другими. В полном объеме эта теория была применена для описания торов ПСК автором.

Близкой задачей является изучение поверхностей ПСК в S^3 и H^3, поскольку соответствующие уравнения ГК совпадают. Здесь тоже, до последнего времени, были известны только отдельные примеры торов, описываемые эллиптическими функциями.

Другая проблема, которая решается в диссертации является внутренней для теории интегрируемых уравнений. Это проблема эффективного описания конечнозонных решений. Сложность и неявность параметризации делает использование тэта-функциональных формул для вычислений нетривиальным. Это не позволяло, в частности, построить другой тип поверхности - график решения соответствующего нелинейного уравнения, демонстрирующий пространственно-временное распространение волн.

Были предприняты серьезные усилия для более эффективного описания конечнозонных решений. Прежде всего, это "алгебро-геометрическая" эффективизация Дубровина-Новикова [3]. Выдвинутая в рамках этого подхода гипотеза Новикова позволила решить (Шиота, Дубровин) классическую проблему алгебраической геометрии - проблему Шоттки. Однако, что касается собственно эффективного описания конечнозонных решений, то здесь этот подход позволил серьезно продвинуться только при описании двухфазных решений.

Принципиально другой подход к проблеме, основанной на теории униформизации римановых поверхностей, и универсальный по отношению к количеству взаимодействующих фаз, предлагается в диссертации. Он, в частности, позволил построить поверхности - графики многофазных решений.

---

[3] Дубровин Б.А. Тэта-функции и нелинейные уравнения. УМН 36 (1981), 11 - 81.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Построение поверхностей, описываемых интегрируемыми уравнениями. Решение проблемы Хопфа для торов, построение поверхностей ПСК в S^3 и H^3. Эффективное описание и изучение конечнозонных решений.

ОБЩАЯ МЕТОДИКА. Для достижения цели работы использовались методы алгебраической геометрии, теории римановых поверхностей и абелевых многообразий, теории униформизации, дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1) Построены все торы ПСК в R^3, S^3 и H^3.

2) Доказана интегрируемость уравнений ГК для поверхностей ПСК и получена формула для погружения в терминах соответствующей Ψ-функции (аналог представления Вейерштрасса для минимальных поверхностей). Выяснен геометрический смысл, возникающей при этом спинорной структуры.

3) Доказана интегрируемость уравнений ГК, описывающих минимальные поверхности в S^n, H^n.

4) Впервые построены примеры собственно погруженных плоскостей ПСК.

5) На основе теории униформизации римановых поверхностей предложен метод эффективного изучения конечнозонных решений. При помощи этого подхода построены поверхности - графики типичных многофазных решений. При этом, впервые для конкретных вычислений в математической физике были использованы автоморфные формы.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Геометрические результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они получили дальнейшее развитие в работах других авторов. Берлинской группой (Пинкаль и др.) методы диссертации были применены к более широкому кругу аналогичных проблем. Были построены компьютерные изображения соответствующих поверхностей. Ерколани, Кноррер и Трубовиц продолжили, начатое в диссертации изучение пространства модулей торов ПСК и строго доказали существование спектральных кривых произвольно высокого рода, отвечающих торам ПСК. Результаты диссертации могут быть использованы для проверки ряда гипотез о минимальных торах в S^3 и построения поверхностей ПСК высших родов. Последняя проблема, как показано в диссертации требует создания теории интегрируемых уравнений на римановой поверхности.

Предложенное в диссертации эффективное описание конечнозонных решений может быть использовано для расчета ряда процессов в теории нелинейных волн в соответствии с физическим смыслом изучаемых уравнений. Кроме того возможно использование автоморфного подхода для развития теории интегрируемых уравнений [I3], [I4].

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации излагались в докладах на многочисленных всесоюзных и международных конференциях. В частности - на 3 и 4 Международных рабочих группах по нелинейным и турбулентным процессам в физике (Киев, 1987, 1989) на международной конференции по солитонам (Дубна, 1990), "Глобальный анализ и геометрия" (Гоехрен-Леббин, 1988; Берлин, 1990), "Современные достижения в геометрии" (Бонн, 1991). Результаты диссертации докладывались также на научных семинарах ЛОМИ АН СССР, в ФРГ, США, Великобритании и Швейцарии.

ПУБЛИКАЦИИ. Результаты диссертации опубликованы в работах [I - I2].

ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Общий объем - 148 машинописных страниц. Список литературы содержит 92 наименования. Имеется 19 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткий обзор работ по теме диссертации, постановку задачи и изложение общего плана работы. Кроме того, вводится понятие интегрируемой поверхности как поверхности, в уравнения Гаусса-Вейнгартена которой может быть введен дополнительный (спектральный) параметр λ. Доказана интегрируемость минимальных поверхностей в S^n и H^n.

В первой главе изучаются поверхности ПСК в R^3. Пусть $F: \mathcal{R} \to R^3$ - конформная параметризация такой поверхности, где $\mathcal{R}$ - риманова поверхность, комплексная структура которой индуцируется евклидовой метрикой R^3. Обозначим z - локальную координату на $\mathcal{R}$, $u(z,\bar z)$ - соответствующую метрику, и $Q = \langle F_{zz}, N\rangle$, где $N(z,\bar z)$ - нормальное поле. Уравнения ГК поверхности ПСК $H = 1/2$ в такой параметризации - следующие

$$u_{z\bar z} + \frac{1}{2}e^{u} - \frac{1}{2}Q\bar Q e^{-u} = 0, \qquad Q_{\bar z} = 0. \tag{2}$$

В § I доказан следующий результат. Уравнения (2) есть условия совместности системы

$$\Phi_z = U\Phi, \qquad \Phi_{\bar z} = V\Phi$$

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\lambda e^{u/2} \\ Qe^{-u/2} & u_z \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_{\bar z} & -\bar Q e^{-u/2} \\ \lambda^{-1} e^{u/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Пусть $u(z,\bar z)$ - некоторое решение уравнения (2), где $Q(dz)^2$ - голоморфный квадратичный дифференциал и пусть $\Phi(z,\bar z,\lambda = e^{2i\gamma})$ - решение системы (3) из группы кватернионов $R_+ SU(2)$, причем $\det\Phi$ не зависит от λ. Тогда F и N, определяемые формулами

$$F = \Phi^{-1}\frac{\partial}{\partial\gamma}\Phi\Big|_{\gamma=0}, \qquad N = \Phi^{-1}\frac{\sigma_3}{2i}\Phi\Big|_{\gamma=0} \tag{4}$$

описывают поверхность ПСК. В (4) мы использовали матричное представление для векторов в R^3

$$X = (X_1, X_2, X_3) \in R^3 \longleftrightarrow X = \sum_{k=1}^{3} X_k \sigma_k / 2i,$$

где σ_k - матрицы Паули.

Инвариантом относительно конформных замен переменных на $\mathcal{R}$ является

$$\begin{pmatrix} \sqrt{d\bar z} & \\ & \sqrt{dz} \end{pmatrix} \Phi .$$

Возникающая спинорная структура классифицирует погружения относительно гладких гомотопий (§ 4).

В то время как описание односвязных компактных поверхностей ПСК (§ 2) достаточно тривиально, а в задаче построения поверхностей рода $G \geqslant 2$ остается больше вопросов, чем имеется ответов (§ 4), торы ($G = 1$) удается описать только в полной мере используя аппарат теории конечнозонного интегрирования. Подробному изложению соответствующих результатов посвящены §§ 3, 5 – 13. Соответствующая риманова поверхность представляется как фактор $\mathcal{R} = \mathbb{C}/\Lambda$ по некоторой решетке. Квадратичный дифференциал – тривиален $Q = 1$, и задача (2) сводится к нахождению двояко-периодических решений уравнения (I). Центральная теорема о том, что все двояко-периодические решения уравнения (I) – конечнозонны, доказана в § 5. Далее (§§ 6 – 8) приводится интегрирование уравнения (I) в тэта-функциях, также получены выражения для соответствующей функции Φ . Они, в свою очередь, при помощи (4) задают погружение ПСК (§ 9).

Погружение, определяемое общим конечнозонным решением тором не является. Для того, чтобы это был тор необходимо выполнение условий периодичности, которые формулируются в терминах спектральной кривой, и получены в § 10. Спектральная кривая задается уравнением

$$\mu^2 = \lambda \prod_{n=1}^{g} (\lambda - \lambda_n)(\lambda - \bar\lambda_n^{-1}).$$

Рассмотрим дифференциал второго рода на ней с полюсом в $\lambda = \infty$ вида $d\Omega = d\sqrt{\lambda} + \ldots$, нормированный условиями

$$\int_{\lambda_n}^{\bar\lambda_n^{-1}} d\Omega = 0, \quad n = 1, \ldots, g.$$

Введем следующие обозначения:

$$U_n^R + i U_n^I = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\lambda_n} d\Omega , \quad c^R + i c^I = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} d\Omega .$$

Погружение F двояко-периодично (т.е. это тор) с решеткой периодов Λ , порожденной базисными векторами (X_1, Y_1),(X_2, Y_2) то да и только тогда, когда матрица

$$\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^R & U_1^R & \ldots & U_g^R \\ -c^I & -U_1^I & \ldots & -U_g^I \end{pmatrix} \tag{5}$$

целая, а дифференциал $d\Omega_1$ обращается в нуль в точке $\lambda = 1$.

Площади торов ПСК вычислены в § 11. Простейшие примеры разобраны в § 12, некоторые из них были известны ранее. Доказательство того, что сингулярные спектральные кривые не приводят к двояко-периодическим погружениям приведено в § 13.

В § 14 мы используем еще одно известное решение уравнения (I), зависящее только от $|z|$. В этом случае (I) редуцируется к третьему уравнению Пенлеве, и, с помощью результатов Итса и Новокшенова [4] , мы описываем собственные погружения плоскости ПСК. Показано, что они могут иметь омбилическую точку произвольного порядка и асимптотически являются конусами, форма которых вычислена.

Аналогичные результаты для поверхностей ПСК в S^3 и H^3 получены во <u>второй главе.</u> Предъявлены формулы для погружений, аналогичные (4), описаны все торы. В § 4 обсуждается связь с

---

4) Its A., Novokshenov V., The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painleve Equations, Lect.Notes Math., 1191, Springer (1986).

проблемой Уилмора и приведен ряд гипотез о минимальных торах в S^3 и торах Уилмора.

Третья глава диссертации посвящена эффективизации тэта-функциональных формул теории конечнозонного интегрирования при помощи теории униформизации римановых поверхностей. Хорошо известна, полученная Кричевером, формула

$$u(x,y,t) = 2\partial_x^2 \ln \theta(Vx + Vy + Wt + D|B) + c \quad (6)$$

для конечнозонных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t - \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx})\right). \quad (7)$$

Постоянные в формуле (6) определяются римановой поверхностью X рода N и точкой P на ней.

В § I приведены необходимые факты об этих решениях, в частности, полученное Дубровиным и Натанзоном выделение вещественных решений уравнений КП2 (7) и КПI, отличающегося от (7) заменой $x \to ix$, $y \to iy$, $t \to it$. Для вещественности решений уравнения КП2 необходимо, чтобы X была М-кривой, в КПI случае достаточно, чтобы X была вещественной кривой разделяющего типа.

Идея третьей главы состоит в том, чтобы использовать подходящую униформизацию X и получить выражения для постоянных в (6) и аналогичных формулах для решений других уравнений в терминах автоморфных функций. Необходимые сведения об униформизации Шоттки приведены в § 2. Обозначим за F - комплексную плоскость с $2N$ вырезанными "дырами", ограниченными гладкими жордановыми кривыми $C_1, C_1', \ldots, C_N, C_N'$, причем, каждая пара C_n, C_n' задает дробно-линейное отображение σ_n, отображающее внешность C_n во внутренность C_n'. Пусть A_n и B_n - неподвижные точки σ_n, причем A_n лежит внутри C_n, а $\operatorname{tr} \sigma_n = 2(\sqrt{\mu} + 1/\sqrt{\mu})$, $0 < |\mu| < 1$. Группа Шоттки G является свободной группой, порождаемой генераторами $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$. F - ее фундаментальная область.

Любую риманову поверхность рода N можно представить в виде Ω/G с некоторой G, где Ω - область разрывности G. Выберем базис циклов на $\Omega/G \approx F$ так, что цикл a_n обходит вокруг C_n в положительном направлении. Если ряды Пуанкаре

$$du_n = \sum_{\sigma \in G/G_n} \left[(z - \sigma B_n)^{-1} - (z - \sigma A_n)^{-1}\right] dz \quad (8)$$

сходятся, они определяют голоморфные дифференциалы, нормированные в указанном выше базисе. Здесь G_n - подгруппа, порожденная σ_n, а G/G_n - соответствующий смежный класс. Матрица периодов задается выражениями

$$B_{nm} = \sum_{\sigma \in G_m \backslash G/G_n} \ln\{B_m, A_m, \sigma B_n, \sigma A_n\}, \quad n \neq m$$
$$B_{nn} = \ln \mu_n + \sum_{\sigma \in G_n \backslash G/G_n,\ \sigma \neq I} \ln\{B_n, A_n, \sigma B_n, \sigma A_n\}, \quad (9)$$

где $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4)(z_4 - z_1)^{-1}(z_3 - z_2)^{-1}$.

Цели теории конечнозонного интегрирования требуют решения следующих двух задач:

I) найти униформизацию X (если она существует), такую, чтобы ряды (8), (9) сходились,

2) описать область S изменения параметров униформизации $\{A_n, B_n, \mu_n\}$.

Обе эти задачи удается решить в интересующем нас случае вещественных римановых поверхностей X, которые и определяют важные для приложений вещественные решения.

Факты о сходимости рядов Пуанкаре приведены в § 3, а в § 4 показано, что вещественные римановы поверхности можно униформизовать при помощи групп Шоттки, которые в то же время являются фуксовыми группами второго рода. Ряды Пуанкаре (8) таких групп сходятся. Детальное описание двух различных униформизаций Шоттки М-кривых приведено в § 5, а в § 6 задача эффективизации решена для уравнения КП2. Постоянные в (6) задаются следующими сходящимися рядами

$$U_n=\sum_{\sigma\in G/G_n}(\sigma A_n-\sigma B_n),\quad V_n=\sum_{\sigma\in G/G_n}((\sigma A_n)^2-(\sigma B_n)^2),\qquad (\mathrm{I0})$$

$$W_n=\sum_{\sigma\in G/G_n}((\sigma A_n)^3-(\sigma B_n)^3),\quad c=\sum_{\sigma\in G,\sigma\neq I}\gamma^{-2},\quad \sigma=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in SL(2).$$

Множество S также точно описывается неравенствами

$$B_N<B_{N-1}<\ldots<B_1<A_1<\ldots<A_N,\quad 0<\sqrt{\mu_n}<1,$$
$$\{B_n,A_n,B_{n+1},A_{n+1}\}>\left(\frac{\sqrt{\mu_n}+\sqrt{\mu_{n+1}}}{1+\sqrt{\mu_n}\sqrt{\mu_{n+1}}}\right)^2.\qquad (\mathrm{II})$$

Приведены два примера: построены поверхности $u(x,y,0)$ для двухфазного и четырехфазного решений. При этом оказывается удобно использовать для вычислений волн малой и большой амплитуд две различные униформизации Шоттки М-кривых.

Соответствующая задача для уравнения КП решена в § 7. Группа G в этом случае - также фуксова группа второго рода. Предельные случаи многосолитонных решений и волн малой амплитуды исследованы в § 8. Как предел из (7) получена формула для многосолитонных решений.

Поверхность X, определяющая решения уравнения Кортевега - де Фриза

$$4u_t=6uu_x+u_{xxx},$$

гиперэллиптическая. Для униформизации это дает $B_n=-A_n$ и н.емного упрощает формулы (9)-(II). При помощи формул § 9 качественный анализ перехода режима волн малой амплитуды в солитонный выполнен в § I0. Решения уравнения Sine-Gordon описаны в § II. При этом группа G уже не обязательно фуксова, поскольку возможно $\mu_n<0$, но, по прежнему, удается доказать сходимость всех рядов. В § I2 приведены соответствующие формулы для уравнения (I). Их использование существенно

облегчает построение минимальных торов в S^3 поскольку упрощает численное решение соответствующих условий периодичности аналогичных (5). Доказательство неравенств (II) приведено в § I3.

В заключении обсуждаются несколько интересных возможных направлений развития теории.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ [1-12]:

I. Бобенко А.И. Униформизация и конечнозонное интегрирование, Препринт ЛОМИ Р - I0 - 86, Ленинград. I986.
2. Бобенко А.И. Униформизация Шоттки и конечнозонное интегрирование, ДАН СССР, I987, 295 : 2, 268 - 272
3. Бобенко А.И., Кубенский Д.А. Качественный анализ и вычисления конечнозонных решений уравнения КдФ. Автоморфный подход, ТМФ, I987, 72 : 3, 352 - 360
4. Бобенко А.И., Бордаг Л.А. Качественный анализ конечнозонных решений уравнения КдФ с помощью автоморфного подхода. Записки научн.семинаров ЛОМИ, I987, I65, 3I - 4I.
5. Бобенко А.И. Собственные функции краевых задач Дирихле и Неймана на прямоугольнике для эллиптического уравнения синус-Гордон. Записки научн.семинаров ЛОМИ, I989, I79, 32 - 36.
6. Бобенко А.И. Интегрируемые поверхности. Функц.анализ и его прилож., I990, 24 : 3, 68 - 69.
7. Бобенко А.И. Поверхности постоянной средней кривизны и интегрируемые уравнения, УМН, I99I, 46 : 4, 3 - 4I.
8. Bobenko A.I., Bordag L.A. Periodic multiphase solutions of the Kadomsev-Petviashvili equation. J.Phys.A, 1989, 22, 1259-1274.
9. Bobenko A.I. Finite-gap constant mean curvature tori in R^3 and S^3. LOMI preprint E-3-89, Leningrad, 1989.
10. Bobenko A.I. Uniformization of Riemann surfaces and effectivization of theta-functional formulae. Preprint TU Berlin 257, Berlin, 1990.
11. Bobenko A.I. Integrable surfaces. In: "Nonlinear World",

v.1, p.36, Singapore, 1990.

12. Bobenko A.I. All constant mean curvature tori in R^3, S^3, H^3 in terms of theta-functions. Math.Ann., 1991, 290, 209-245.
13. Bobenko A.I., Kuksin S.B. Finite-gap solutions of the KdV equation are non-degenerate, Preprint MPI/91-61, Bonn, 1991
14. Bobenko A., Ercolani N., Knörrer H., Trubowitz E. Density of Heat Curves in the Moduli Space, Preprint ETH, Zürich, 1991.

РТП ЛИЯФ,зак.904,тир.I00,уч.-изд.л.0,6;4/X-I99Iг.
Бесплатно