Функциональный анализ и его приложения,
1990, т. 24, вып. 3, 68—69

УДК 514.772+517.957

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

А. И. Бобенко

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ — область, и $F\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ — конформная параметризация поверхности в $\mathbf{R}^n$: $\langle F_z, F_z\rangle = \langle F_{\bar z}, F_{\bar z}\rangle = 0$, $z = x + iy$, $(x, y) \in \Omega$; $4e^u dz d\bar z$ — индуцированная метрика на Ω, $\langle F_z, F_{\bar z}\rangle = 2e^u$. Дополним F_x, F_y до базиса в $\mathbf{R}^n$ векторами N_i, $i = 1, \ldots, m$; $m = n - 2$, ортогональными к поверхности:

$$\langle N_i, N_j\rangle = \delta_{ij},\ \langle N_i, F_x\rangle = \langle N_i, F_y\rangle = 0.$$

Этот базис удовлетворяет уравнениям Гаусса — Вейнгартена:

$$\sigma_z = U\sigma,\ \sigma_{\bar z} = V\sigma,\quad \sigma = \begin{pmatrix} F_z \\ F_{\bar z} \\ N \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_z & 0 & A \\ 0 & 0 & B \\ -e^{-u}B^T/2 & -e^{-u}A^T/2 & C \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & u_{\bar z} & \bar A \\ -e^{-u}\bar A^T/2 & -e^{-u}B^T/2 & \bar C \end{pmatrix},$$

где $A_i = \langle F_{zz}, N_i\rangle$, $B_i = \langle F_{z\bar z}, N_i\rangle$, $C_{ij} = \langle N_{iz}, N_j\rangle$. Условие совместимости

$$U_{\bar z} - V_z + [U, V] = 0 \tag{1}$$

представляет собой уравнения Гаусса — Петерсона — Кодацци поверхности.

Назовем поверхность *интегрируемой*, если уравнения (1) интегрируемы в обычном смысле теории солитонов, т. е. они могут быть представлены как условия совместности (1) с $U(\lambda)$, $V(\lambda)$, зависящими от дополнительного (спектрального) параметра λ. Следует отметить, что задача в такой постановке уже исследовалась в работах [1—3], где был, в частности, построен ряд примеров.

Теорема. *Поверхности с вектором средней кривизны $H = e^{-u}B/2$ таким, что $H_z + HC = 0$, являются интегрируемыми. Преобразование $A \to \lambda A$, $\bar A \to \frac{1}{\lambda}\bar A$ превращает* (1) *в обычное представление нулевой кривизны со спектральным параметром.*

Пример 1. Поверхности постоянной средней кривизны (ПСК) ($H = \mathrm{const}$) в $\mathbf{R}^3$. Здесь $C = 0$, уравнения (1) имеют вид

$$u_{z\bar z} + 2H^2 e^u - |A|^2 e^{-u}/2 = 0,\quad A_{\bar z} = 0.$$

Пример 2. Поверхности ПСК в $\mathbf{S}^3$, $\langle F, F\rangle = 1$. Можно выбрать $N_2 = F$, откуда $C = 0$, $A_2 = \langle F_{zz}, F\rangle = 0$, $H = (h, -1) = \mathrm{const}$. Уравнения (1) имеют вид

$$u_{z\bar z} + 2e^u(1 + h^2) - |A_1|^2 e^{-u}/2 = 0,\ A_{1\bar z} = 0.$$

Пример 3. Минимальные поверхности в $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, $\langle F, F\rangle = 1$. Уравнение минимальности поверхности в $\mathbf{S}^n$ имеет следующий вид: $F_{z\bar z} = -2e^u F$. Выбирая $N_m = F$, имеем $H = (0, \ldots, 0, -1)$, $A_m = \langle F_{zz}, F\rangle = 0$, $C_{mi} = \langle F_z, N_i\rangle = 0$. В новых обозначениях $\alpha = (A_1, \ldots, A_{m-1})$, $Q_{pq} = C_{pq}$, $p, q = 1, \ldots, m - 1$ получаем

$$\begin{gathered} u_{z\bar z} + 2e^u - \alpha\bar\alpha^T e^{-u}/2 = 0, \\ \alpha_{\bar z} + \alpha\bar Q = 0,\quad \bar\alpha_z + \bar\alpha Q = 0, \\ Q_{\bar z} - Q_z + (\bar\alpha^T\alpha - \alpha^T\bar\alpha)e^{-u}/2 + [Q, \bar Q] = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

В следующих двух примерах рассматриваются поверхности в лоренцевом пространстве $\mathbf{R}^{n,1}$.

Пример 4. Поверхности ПСК в $\mathbf{H}^3$. Метрика $\mathbf{R}^{3,1}$ индуцирует метрику $\{,\}$ на $\mathbf{H}^3$: $\{F, F\} = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - F_4^2 = -1$. Фиксируем $N_1 = N$, $N_2 = F$ так же, как и для $\mathbf{S}^3$, $\{N, N\} = 1$, $\{F_z, F_{\bar z}\} = 2e^u$. Тогда верно (1), но с заменой $\langle,\rangle \to \{,\}$ для A, B, C. Для поверхностей ПСК в $\mathbf{H}^3$ имеем $C = 0$,

$$A_2 = 0,\ H = (h, 1) = \mathrm{const},\quad u_{z\bar z} + 2(h^2 - 1)e^u - |A_1|^2 e^{-u}/2 = 0,\quad A_{1\bar z} = 0.$$

Пример 5. Минимальные поверхности в $H^{n-1} \subset R^{n-1,1}$, $\{F, F\} = F_1^2 + \ldots + F_{n-1}^2 - F_n^2 = -1$. Выбор $N_m = F$ и уравнение минимальной поверхности $F_{z\bar z} = 2e^u F$ дают нелинейные уравнения почти такие же, как и в случае S^{n-1}, только первое из уравнений (2) выглядит несколько по-другому:

$$u_{z\bar z} - 2e^u - \alpha\bar\alpha^T e^{-u}/2 = 0.$$

Для H^4 интегрируемость доказана в [2].

Можно упростить уравнения (1), выбирая специальным образом координату z и N-базис. В примерах 1, 2, 4, если Ω — окрестность неамбилической точки ($A \neq 0$), то, благодаря аналитичности функции A, подходящей аналитической заменой $z \to w(z)$ можно добиться, чтобы $A = \langle F_{w,w}, N\rangle = 1$. Аналогичное положение и для минимальных поверхностей в S^n, H^n. Уравнения (2) показывают, что $\alpha\alpha^T$ — аналитическая функция. Поэтому подходящая аналитическая замена $z \to w(z)$ переводит условие $\langle F_{zz}, F_{zz}\rangle \neq 0$ (или $\{F_{zz}, F_{zz}\} \neq 0$) в условие $\alpha\alpha^T = 1$.

Рассмотрим более детально случаи S^4 и S^5. Зафиксируем N-базис так, чтобы $\alpha_1, i\alpha_2 \in R$ ($\alpha_3 = 0$ для S^5). Совместно с $\alpha\alpha^T = 1$ это дает $\alpha_1 = \operatorname{ch}(v/2)$, $\alpha_2 = -i \operatorname{sh}(v/2)$, где $v(z, \bar z)$ — вещественнозначная функция. Таким образом, минимальные поверхности в S^4 описываются уравнением *)

$$u_{z\bar z} + 2e^u - \operatorname{ch} v \cdot e^{-u}/2 = 0, \quad v_{z\bar z} + \operatorname{sh} v \cdot e^{-u}/2 = 0.$$

Это специальная редукция двумерной цепочки Тода [4]. Для S^5 имеем $Q_{12} = -iv_z/2$, $Q_{13} = w \operatorname{sh}(v/2)$, $Q_{23} = iw \operatorname{ch}(v/2)$, где $w(z, \bar z)$ — комплекснозначная функция, и уравнения (2) выглядят следующим образом:

$$u_{z\bar z} + 2e^u - \operatorname{ch} v \cdot e^{-u}/2 = 0, \quad v_{z\bar z} + \operatorname{sh} v\,(e^{-u}/2 - w\bar w) = 0,$$
$$w_{\bar z} + (\bar w \operatorname{ch} v)_z = 0, \quad \bar w_z + (w \operatorname{ch} v)_{\bar z} = 0.$$

Принципиально важно, что приведенные выше интегрируемые дифференциальные уравнения применимы не только в дифференциальной геометрии в малом, но и в дифференциальной геометрии в целом. В частности, погружению тора отвечает двоякопериодическая функция $F(z, \bar z)$. При этом функции A, A_1, $\alpha\alpha^T$ в примерах — эллиптические функции, и условие их отличия от тождественного нуля и ограниченности приводит к тем же интегрируемым уравнениям. Например, торы ПСК в R^3 и S^3 описываются при помощи двоякопериодических решений эллиптического уравнения sh — Gordon таких, что и соответствующая функция погружения $F(z, \bar z)$ также двоякопериодична. При помощи такого решения в работе [5] впервые был построен тор ПСК. Все такие торы расклассифицированы в [6]. Наконец, в работе [7] при помощи конечнозонного интегрирования все торы ПСК в R^3 и S^3 явно описаны в терминах тэта-функций. Сама функция погружения выражается при этом через функцию Бейкера — Ахиезера, что позволило получить формулы для $F(z, \bar z)$.

Автор благодарен У. Пинкалю, который привлек его внимание к данной проблеме, а также А. Итсу и А. Китаеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савельев М. В.* // ТМФ.— 1984.— Т. 60, № 1.— С. 9—23. 2. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* // Физика элем. частиц и атомн. ядра.— 1984.— Т. 15, № 5.— С. 1032—1072. 3. *Sym A.* // Preprint IFT—3—85.— 1985. 4. *Fordy A. P., Gibbons J.* // Comm. Math. Phys.— 1980.— V. 77, № 1.— P. 21—31. 5. *Wente H. C.* // Pacific J. Math.— 1986.— V. 121, № 1.— P. 193—244. 6. *Pinkall U., Sterling I.* // Preprint Techn. Univ. Berlin.— 1988, № 199. 7. *Bobenko A. I.* // Preprint LOMI.— 1989, E—3—89.

Ленинградское отделение
математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило в редакцию
24 июля 1989 г.

*) Этот факт сообщил автору У. Пинкаль.