А.И.Бобенко

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН

Пусть R - прямоугольная область

$$R=\{(x,y)\,|\,x\in[0,X],\ y\in[0,Y]\}.$$

В настоящей работе строятся решения краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u+\operatorname{sh} u=0 \qquad \Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, & (1)\\ u\big|_{\partial R}=\begin{Bmatrix} N\\ D\end{Bmatrix} & (2)\end{cases}$$

с нулевыми краевыми условиями Неймана или Дирихле на ребрах прямоугольника R, причем на различных ребрах возможны различные краевые условия.

Такая задача возникает в дифференциальной геометрии при построении торов постоянной средней кривизны [1].

Уравнение (1) - это одна из вещественных редукций хорошо известного в теории солитонов уравнения синус-Гордон, при помощи конечнозонных решений которого, построенных впервые в работе [2], и решается задача (1), (2).

Рассмотрим риманову поверхность C рода g гиперэллиптической кривой

$$\mu^2=\lambda\prod_{i=1}^{g}(\lambda-c_i)\Big(\lambda-\frac{1}{\bar c_i}\Big), \qquad |c_i|\neq 1. \tag{3}$$

Она представляет собой два экземпляра комплексной плоскости, склеенных по разрезам $[0,\infty]$, $[c_i,\frac{1}{\bar c_i}]$. Проведем на C контур $\mathcal{L}$, обходящий разрез $[0,\infty]$, а канонический базис циклов C выберем так, что цикл a_i обходит разрез $[c_i,1/\bar c_i]$, причем $\mathcal{L}=a_1+a_2+\ldots+a_g$. Зафиксируем ветвь функции $\sqrt{\lambda}$ на $C\setminus\mathcal{L}$. $U=(U_1,\ldots,U_g)$, $V=(V_1,\ldots,V_g)$ - векторы b-периодов

$$U_n=\int_{b_n} d\Omega_1, \qquad V_n=\int_{b_n} d\Omega_2$$

нормированных абелевых дифференциалов второго рода с особенностями вида

$$d\Omega_1=d(\sqrt{\lambda}),\quad \lambda\sim\infty, \qquad d\Omega_2=d\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big),\quad \lambda\sim 0.$$

du_n - нормированные в выбранном базисе циклов голоморфные дифференциалы $\int_{a_n} du_m=2\pi i\,\delta_{nm}$, а $B_{nm}=\int_{b_n} du_m$ - матрица периодов, определяющая соответствующую тэта-функцию Римана

$$\theta(p)=\sum_{k\in Z^g} exp\Big(\frac{1}{2}\langle Bk,k\rangle+\langle p,k\rangle\Big),\quad p=(p_1,\ldots,p_g)\in\mathbb{C}^g.$$

Кривая (3) обладает антиголоморфной инволюцией $\tau:\lambda\to 1/\bar\lambda$ при действии которой происходят следующие преобразования:

$$\tau a_n=-a_n,\ \tau b_n=b_n-a_n+\sum_{i=1}^{g} a_i,\ \tau\sqrt{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{\bar\lambda}},\ \tau^* d\Omega_1=\overline{d\Omega_2}, \tag{4}$$

откуда $\bar U=V$.

ТЕОРЕМА ([3]). Все вещественные конечнозонные решения уравнения (1) задаются формулой

$$u(x,y)=\ln\Big(\frac{\theta(\Omega+D)}{\theta(\Omega+D+\Delta)}\Big)^2,\qquad \Omega=\frac{i}{2}(\alpha x-\beta y), \tag{5}$$

$$\Delta=\pi i(1,1,\ldots,1),\quad iD\in\mathbb{R}^g,\quad U=\alpha+i\beta,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}^g,$$

где $\theta(p)$ -тэта-функция кривой (3), а вектор D -произволен. Все эти решения несингулярны.

Пусть теперь C обладает инволюцией $\pi:\lambda\to 1/\lambda$. Несложно показать, что базис циклов C можно выбрать так, что наряду с (4) он под действием π преобразуется следующим образом

$$\pi a=a\Pi,\ \pi b=b\Pi,\ \Pi=\begin{pmatrix} 0 & & 1\\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0\end{pmatrix},\ \begin{matrix} a=(a_1,\ldots,a_g),\\ b=(b_1,\ldots,b_g).\end{matrix} \tag{6}$$

Поскольку $\pi^*\sqrt{\lambda}=-1/\sqrt{\lambda}$, то под действием π абелевы дифференциалы второго рода переходят друг в друга

$$\pi^* d\Omega_1=-d\Omega_2. \tag{7}$$

Равенства (6), (7), в свою очередь, гарантируют следующие свойства симметрии тэта-функции и векторов α,β:

$$\theta(p)=\theta(p\Pi)=\theta(-p\Pi),\quad \alpha=-\alpha\Pi,\quad \beta=\beta\Pi. \tag{8}$$

3 Зак № 1893

Заметим, что все аргументы тэта-функций в (5) чисто мнимые. Тэта-функция периодична с периодами $2\pi i N$, где N g-мерный целочисленный вектор. Мы будем записывать равенство с точностью до таких периодов следующим образом:

$$z_1 \equiv z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2\pi i N, \quad N \in \mathbb{Z}^g.$$

ЛЕММА.

Если $D \equiv D\Pi$, то $u(-x,y) = u(x,y)$

$D \equiv D\Pi + \Delta$ $\quad u(-x,y) = -u(x,y)$

$D \equiv -D\Pi$ $\quad u(x,-y) = u(x,y)$

$D \equiv -D\Pi + \Delta$ $\quad u(x,-y) = -u(x,y)$.

Это утверждение есть прямое следствие симметрий (8) и того, что $\Delta \equiv \Delta\Pi \equiv -\Delta\Pi$. В свою очередь с его помощью легко доказывается следующая

ТЕОРЕМА. Решение (5) уравнения (I), построенное по римановой поверхности C, обладающей инволюцией π удовлетворяет нулевым краевым условиям Дирихле ($\mathcal{D}$) или Неймана ($\mathcal{N}$) на ребрах прямоугольника R, если выполняются следующие условия:

∂R	$\mathcal{N}$	$\mathcal{D}$
$x=0$	$D \equiv D\Pi$	$D \equiv D\Pi + \Delta$
$y=0$	$D \equiv -D\Pi$	$D \equiv -D\Pi + \Delta$
$x=X$	$\alpha X \equiv D\Pi - D$	$\alpha X \equiv D\Pi - D + \Delta$
$y=Y$	$\beta Y \equiv D\Pi + D$	$\beta Y \equiv D\Pi + D + \Delta$

В частности, если на всей границе ∂R выполняются нулевые условия Неймана, то получаем $\alpha X \equiv \beta Y \equiv 0$, $D = \pi i(\varepsilon, \varepsilon)$, если $g = 2k$, $D = \pi i(\varepsilon, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon)$, если $g = 2k+1$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, где числа ε_i принимают значения 0 или 1. Для условия $u|_{\partial R} = 0$ имеем $g = 2k$, $\alpha X \equiv \equiv \beta Y \equiv 0$, $D = \pi i((\varepsilon,\varepsilon) + (1,0))$, где 1-k -мерная строчка из единиц.

Условия $\alpha X \equiv \beta Y \equiv 0$ в силу (8) представляют собой g условий на g свободных параметров (точки ветвления) римановой поверхности C.

Кривая C двулистно накрывает кривую C/π. Используя технику редукции тэта-функций [4], легко показать, что исходная g-мерная тэта-функция выражается через произведения двух тэта-функций размерностей $k+1$ и k, если $g = 2k+1$, и k и k, если $g = 2k$, причем переменные x и y разделяются, входя в аргументы различных тэта-функций.

Оказывается, мы построили все решения сформулированных выше краевых задач. Этот факт доказывается при помощи следующей важной теоремы.

ТЕОРЕМА. Все двоякопериодические несингулярные решения уравнения (I) - конечнозонные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим за Λ решетку периодов решения $u(x,y)$. "Включим" "высшие" потоки уравнения (I). При этом u зависит от бесконечного числа "высших" времен $t_k : u(x,y,t_1,t_2,\dots)$, по прежнему удовлетворяя по x, y уравнению (I). Для всех частных производных u_{t_k} имеем

$$(\Delta + \operatorname{ch} u) u_{t_k} = 0. \tag{9}$$

Поскольку оператор (9) - оператор на торе $\mathbb{R}^2/\Lambda$, у него конечномерное ядро. Следовательно u_{t_k} линейнозависимы, и существует такое "высшее" время t, относительно которого решение стационарно $u_t = 0$, что и доказывает конечнозонность.

Заключительные замечания

I. Впервые конечнозонные решения краевой задачи были построены в работе [5] для задачи на отрезке с общим краевым условием для нелинейного уравнения Шредингера.

2. Аналогично рассмотренному случаю строятся все решения имеющих важные физические приложения нулевых краевых задач Дирихле и Неймана на прямоугольнике для других эллиптических уравнений - вещественных редукций уравнения синус-Гордон $\Delta u = \sin u$, $\Delta u = \operatorname{sh} u$, $\Delta u = \operatorname{ch} u$.

Литература

1. W e n t e H.C. Counterexample to a conjecture of H.Hopf. - Pacific Journ.Math., 1986, v.121, N 1, p.193-244.
   A b r e s c h U. Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions. - Journ.Rein.Angew.Math., 1987, v.374, p.169-192.
2. К о з е л В.А., К о т л я р о в В.П. Почти периодические решения уравнения $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$. - Докл. АН УССР, 1976, A, № IO, с.878-88I.

3. Б о b e n k o A.I. Finite-gap constant mean curvature tori in R^3 and S^3. Preprint LOMI E-3-89, 1989, 48 p.

4. Б е л о к о л о с Е.Д., Б о б е н к о А.И., М а т в е е в В.Б., Э н о л ь с к и й В.З. Алгебро-геометрические принципы суперпозиции конечнозонных решений интегрируемых нелинейных уравнений. - УМН, 1986, т.41, № 2, с.3-42.

5. Б и к б а е в Р.Ф., И т с А.Р. Алгебро-геометрические решения краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера. - Мат.заметки, 1989, т.45, № 5, с.3-9.

Bobenko A.I. Eigenfunctions of the Dirichlet and Neumann problems for the elliptic sinh-Gordon equation on a rectangle.

The Dirichlet and Neumann zero boundary problems on a rectangular for the equation $\Delta u + \operatorname{sh} u = 0$ are considered. All solutions are constructed explicitly by the finite-gap integration technique.

Б.В.Будаев

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН ОТ СВОБОДНОГО КЛИНА. РЕДУКЦИЯ К СИНГУЛЯРНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Задаче дифракции упругих волн от свободного клина посвящена весьма обширная литература, однако удовлетворительный подход к проблеме пока не найден. В настоящей работе предлагается способ редукции задачи дифракции плоской волны к некоторому сингулярному интегральному уравнению на разомкнутом контуре. Такое уравнение в вырожденных случаях (при дифракции на щели, отражении от плоскости) тоже вырождается и решается в квадратурах. В случаях близких к вырожденным решение уравнения можно построить в форме ряда Неймана. В общем же случае можно использовать численные методы, которые для указанного типа уравнений весьма тщательно разработаны.

Что касается задачи в целом, то ее можно отнести к разряду "счетных", в том смысле, что качественная картина волнового поля очевидна и суть задачи состоит в определении количественных характеристик поля, а не каких-либо его структурных особенностей. С этой точки зрения, сведение задачи дифракции к сингулярному интегральному уравнению представляется вполне адекватным существу проблемы, поскольку оно открывает обоснованный путь к вычислению интересующих величин.

Необходимо отметить, что здесь излагается лишь общая схема метода. Детальное же его описание, равно как и доказательства формулируемых утверждений, опубликовано в [1].

1. Постановка задачи

Рассматривается однородная изотропная упругая среда, заполняющая клиновидную область $\Gamma = \{\rho > 0, |\theta| \leq \alpha\}$ заданную в полярной системе координат $\{\rho, \theta\}$. Свойства среды определяются постоянными Ляме λ и μ, а ее движение описывается в терминах продольного $\varphi(\rho,\theta)$ и поперечного $\psi(\rho,\theta)$ потенциалов, удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца.

$$\nabla^2\varphi + \gamma^2 k^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \qquad (1.1)$$

в которые помимо волнового числа k входит отношение

$$\gamma = \frac{V_s}{V_p} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}} < 1 \qquad (1.2)$$

скоростей распространения поперечных (V_s) и продольных (V_p)