А.И. БОБЕНКО

УНИФОРМИЗАЦИЯ ШОТТКИ И КОНЕЧНОЗОННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

(Представлено академиком С.П. Новиковым 21 I 1986)

1. Теория конечнозонного интегрирования, возникшая в рамках метода обратной задачи (МОЗ) в середине 70-х годов в работах С.П. Новикова, Б.А. Дубровина, В.Б. Матвеева, А.Р. Итса и др. (см. обзор [1]), позволяет строить многофазные решения нелинейных уравнений интегрируемых МОЗ. Эти решения сравнительно просто выражаются через римановы тэта-функции

$$\theta(z \mid B) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} \exp\{\pi i \langle Bm, m \rangle + 2\pi i \langle z, m \rangle\}. \tag{1}$$

Например, решение уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t - \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx})\right) \tag{2}$$

задается следующим выражением [2] (см. также [4]):

$$u(x, y, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta((Ux + Vy + Wt + D)/2\pi i \mid B) + 2c. \tag{3}$$

Однако несмотря на простоту формулы (3) извлечь из нее данные о решении сложно ввиду неявности задания U, V, W, B. Реальным параметром в (3) является компактная риманова поверхность Γ рода g и точка $P_0 \in \Gamma$. Постоянные U, V, W, B связаны между собой, они определяются следующим образом. Пусть $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ – канонический базис циклов Γ; $du_1, \ldots, du_g$ – нормированные голоморфные дифференциалы; p – локальный параметр в окрестности P_0, $p \to 0$, $P \to P_0$; $du_n(P) = f_n(p)dp$, $P \sim P_0$. Тогда

$$B_{nm} = \int_{b_m} du_n, \quad \int_{a_m} du_n = \delta_{nm}, \quad U_n = 2\pi i f_n(p)|_{p=0}, \quad V_n = 2\pi i \left.\frac{d}{dp} f_n(p)\right|_{p=0}, \tag{4}$$

$$W_n = \pi i \left.\frac{d^2}{dp^2} f_n(p)\right|_{p=0}, \quad \Omega(P) \to p^{-1} - cp + O(p^2), \quad P \to P_0,$$

где $\Omega(P)$ – нормированный абелев интеграл второго рода. Если Γ – гиперэллиптическая, а P_0 – неподвижная точка гиперэллиптической инволюции, то $V = 0$ и (3) превращается в формулу Матвеева–Итса [3] для конечнозонных решений уравнения Кортевега–де Фриса (КдФ) $4u_t = 6uu_x + u_{xxx}$. В отличие от уравнения КП здесь можно явно указать базис циклов Γ и выражения для du_n, однако в этом случае анализ решения сильно затруднен.

Были предприняты серьезные усилия для более эффективного описания конечнозонных решений. Мы имеем ввиду "алгебро-геометрическую эффективизацию" Дубровина–Новикова [4] и "физическую эффективизацию", предложенную в работах [8, 9]. Они основаны на подстановке в уравнение выражений типа (3), при этом происхождение постоянных "забывается", и они определяются прямо из уравнения. Серьезно продвинуться на этом пути удается лишь при $g = 2$ (и при $g = 3$ для уравнения КП [4]).

В настоящей работе предлагается универсальный по отношению к значению рода g подход к этой проблеме, основанный на теории униформизации Шоттки римановых поверхностей. При этом постоянные в формулах типа (3) выражаются через параметры униформизации при помощи рядов Пуанкаре. Таким образом удается эффективно описать все физически важные вещественные несингулярные решения.

2. Пусть F — $2g$-связная область в $\overline{\mathbf{C}}$, ограниченная $2g$ непересекающимися жордановыми кривыми $C_1, C_1', \ldots, C_g, C_g'$. Отмеченная группа Шоттки G — это свободная клейнова группа с выбранной системой образующих $\sigma_1, \ldots, \sigma_g$

$$\frac{\sigma_n z - B_n}{\sigma_n z - A_n} = \mu_n \frac{z - B_n}{z - A_n}, \quad 0 < |\mu_n| < 1,$$

причем σ_n отображает внешность C_n во внутренность C_n', $\sigma_n C_n = -C_n'$. A_n лежит внутри C_n, B_n — внутри C_n'. Если C_n, C_n' — окружности, то группа Шоттки называется классической [7]. F — фундаментальная область группы. Предельное множество группы G канторово, область разрывности Ω связана. Фактор-пространство Ω/G — компактная риманова поверхность рода g. Выберем на ней канонический базис циклов следующим образом: цикл a_n совпадает с кривой C_n', ориентированной в положительном направлении, b_n идет в F от точки $z_n \in C_n$ до точки $\sigma_n z_n \in C_n'$, причем между собой b-циклы не пересекаются. Согласно классической теореме о разрезах [5] в таком виде можно представить любую отмеченную компактную риманову поверхность Г рода g. Тем самым, каждой отмеченной римановой поверхности Г сопоставляется точка $(A_1, \ldots, A_g, B_1, \ldots, B_g, \mu_1, \ldots, \mu_g) \in \mathbf{C}^{3g}$. Сопряженные в $PSL(2, \mathbf{C})$ группы Шоттки приводят к конформно-эквивалентным римановым поверхностям, поэтому обычно рассматривают нормированные группы Шоттки. Нам будет удобно при униформизации Г с отмеченной точкой $P_0 \in \Gamma$ выбрать нормировку $A_1 = 1, B_1 = -1, P_0 = \infty$. Тогда точки $(A_2, \ldots, A_g, B_2, \ldots, B_g, \mu_1, \ldots, \mu_g)$ образуют некоторое подмножество $S \subset \mathbf{C}^{3g-2}$.

Обозначим G_n наименьшую подгруппу G, содержащую элемент σ_n. G/G_n и $G_m \backslash G/G_n$ состоят из элементов $\sigma = \sigma_{i_1}^{j_1} \sigma_{i_2}^{j_2} \ldots \sigma_{i_k}^{j_k}$, $j_l \neq 0$, где $i_k \neq n$, а для $G_m \backslash G/G_n$ еще и $i_1 \neq m$.

Лемма. *Если ряды Пуанкаре размерности* (−2)

$$du_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma \in G/G_n} \left(\frac{1}{z - \sigma B} - \frac{1}{z - \sigma A_n} \right) dz \tag{5}$$

абсолютно сходятся, то они определяют голоморфные дифференциалы поверхности Г, *нормированные в указанном выше базисе циклов. Матрица периодов задается выражением*

$$\begin{aligned} B_{nm} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma \in G_m \backslash G/G_n} \ln\{B_m, A_m, \sigma B_n, \sigma A_n\}, \quad m \neq n, \\ B_{nn} &= \frac{\ln \mu_n}{2\pi i} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma \in G_n \backslash G/G_n,\ \sigma \neq I} \ln\{B_n, A_n, \sigma B_n, \sigma A_n\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где фигурные скобки обозначают двойное отношение

$$\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4)/(z_1 - z_4)(z_2 - z_3).$$

Фактически доказательство этой леммы содержится уже в работах [10–12].

Таким образом, для целей конечнозонного интегрирования необходимо решить 2 задачи:

1) явно описать подмножество S,

2) доказать абсолютную сходимость рядов (5).

Дать общее решение этих двух задач в общем случае, по-видимому, невозможно. (В частности, доказано, что не любая группа Шоттки классическая [7], а ряд Пуанкаре размерности (–2) может не сходиться абсолютно [15]). Однако, в самом важном для приложений случае вещественных римановых поверхностей ситуация более благоприятна.

Риманова поверхность Г называется M-кривой, если на ней задана антиголоморфная инволюция $\tau\colon \Gamma \to \Gamma$, $\tau^2 = 1$, имеющая $g+1$ неподвижный овал. Овалы делят M-кривую на две компоненты Γ_+ и Γ_-, гомеоморфные сфере с $g+1$ дыркой. M-кривую можно униформизовать при помощи фуксовой группы Шоттки. Действительно, построим фуксову униформизацию $\Gamma_+ = H/G$, где $H = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$, G – фуксова группа второго рода. Такие группы хорошо изучены [14, 13]. Можно выбрать фундаментальный многоугольник F_+ с границей $c'_g l'_{g-1} c'_{g-1} \ldots c'_1 l_0 c_1 l_1 c_2 \ldots c_g l_g$, где l_n, l'_n – отрезки вещественной оси, а c_n, c'_n – полуокружности, $0 \in l_0$, $\infty \in l_g$. Гиперболические преобразования σ_n, отображающие c_n на c'_n, – свободная от соотношений система порождающих преобразований группы G. Неподвижные точки σ_n упорядочены следующим образом:

$$(7)\qquad -\infty < B_g < B_{g-1} < \ldots < B_1 < 0 < A_1 < A_2 < \ldots < A_g < +\infty, \quad A_n, B_n \in \mathbf{R}.$$

Распространяя действие G на нижнюю полуплоскость $\overline{H}$, замечаем $\Gamma_- = \overline{H}/G$, а фундаментальный многоугольник $F_- = \overline{F}_+$ – отражение F_+ относительно вещественной оси. $F = F_+ \cup F_-$, ограниченная окружностями $C_n = c_n \cup \overline{c}_n$, $C'_n = c'_n \cup \overline{c}'_n$, – фундаментальная область группы Шоттки с образующими $\sigma_n\colon C_n \to C'_n$, униформизующей M-кривую $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, а $l_0, l_1 \cup l'_1, \ldots, l_g$ – вещественные овалы. Ограничения на параметры μ_n

$$(8)\qquad \{B_{n+1}, A_{n+1}, B_n, A_n\} > \left(\frac{\sqrt{\mu_n} + \sqrt{\mu_{n+1}}}{1 + \sqrt{\mu_n \mu_{n+1}}}\right)^2, \quad n = 1, \ldots, g-1,$$

являются следствием гиперболичности элементов $\sigma_{n+1}\sigma_n^{-1}$. Из анализа инвариантных прямых фуксовых групп, следуя работам [6, 13], можно показать, что соотношения (7), (8) полностью определяют множество S. Проблема сходимости рядов (5) для M-кривых также успешно разрешается, так как для фуксовой группы второго рода ряды Пуанкаре размерности (–2) абсолютно сходятся [5, 10].

Если Γ – M-кривая, P_0 лежит на вещественном овале, $\tau^* p = \overline{p}$, $\tau b_n = b_n$, $\tau a_n = -a_n$, $D \in \mathbf{R}^g$, то формула (3) задает вещественное несингулярное решение уравнения (2) [4]. Недавно Б.А. Дубровин и С.М. Натанзон показали, что условия являются и необходимыми (частное сообщение). Полагая теперь $P_0 = \infty \in F$, $p = z^{-1}$, из (4) и (6) получаем

$$(9)\qquad U_n = \sum_{\sigma \in G/G_n} (\sigma A_n - \sigma B_n), \quad V_n = \sum_{\sigma \in G/G_n} ((\sigma A_n)^2 - (\sigma B_n)^2),$$

$$W_n = \sum_{\sigma \in G/G_n} ((\sigma A_n)^3 - (\sigma B_n)^3), \quad c = \sum_{\sigma \neq I} \gamma^{-2}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$\det \sigma = 1.$$

Таким образом, справедлива следующая

Т е о р е м а. *Все вещественные несингулярные конечнозонные решения урав-*

нения (2) *задаются формулами* (3), (6), (9), *в которых параметры* A_n, B_n, μ_n *удовлетворяют ограничениям* (7), (8).

Пусть $B_n = -A_n$, тогда можно выбрать F ограниченной изометрическими окружностями преобразований σ_n. F симметрична относительно инволюции $\pi z = -z$, $\pi F = F$. Группа G – подгруппа индекса 2 группы с образующими π, α_n: $\alpha_n^2 = 1$, $\sigma_n = \alpha_n \pi$, $n = 1, \ldots, g$. Соответствующая поверхность $\Gamma = \Omega / G$ гиперэллиптическая. Точки пересечения C_n с вещественной осью, а также 0 и ∞ (неподвижные точки α_n и π) – неподвижные точки гиперэллиптической инволюции. Таким образом, униформируются все гиперэллиптические M-кривые. Именно они определяют конечнозонные потенциалы оператора Шредингера и вещественные несингулярные конечнозонные решения уравнения КдФ [3]. В этом случае $V = 0$, а матрица периодов

$$(10) \quad B_{nm} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma \in G_m \backslash G / G_n} \ln \left(\frac{A_m - \sigma A_n}{A_m - \sigma(-A_n)} \right)^2,$$

$$B_{nn} = \frac{\ln \mu_n}{2\pi i} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma \in G_n \backslash G / G_n,\, \sigma \neq I} \ln \left(\frac{A_n - \sigma A_n}{A_n - \sigma(-A_n)} \right)^2.$$

3. З а к л ю ч и т е л ь н ы е з а м е ч а н и я. 1) Сходимость рядов (5) доказана не только для фуксовых групп Шоттки, но также и в случае, когда окружности C_n малы и расположены далеко друг от друга [10–12]. Чем меньше C_n, тем быстрее сходятся ряды. Предел $\mu_n \to 0$ $(C_n \to A_n)$ особенно удобен для изучения. В этом пределе в суммах (6), (9) остаются только члены, отвечающие $\sigma = I$, а решение вырождается в многосолитонное. Уравнение КдФ инвариантно относительно замены $x \to ix$, $t \to -it$, $u \to -u$. Если произвести такую замену и выбрать $iD \in \mathbf{R}^g$, то получится несколько другая формула для тех же несингулярных вещественных конечнозонных решений. С ее помощью удобно изучать предел малых амплитуд.

2) Полученные выражения позволяют определить физические характеристики многофазного решения такие, как амплитуды, волновые числа и фазовые скорости гармоник, что в подходе, основанном на прямых подстановках, вызывало известные трудности, связанные с тем, что тэта-функция (1) допускает модулярное преобразование, меняющее эти характеристики [9]. В пределе малых и больших амплитуд легко убедиться, что получаемые при нашем подходе характеристики решения действительно физические.

3) При конечнозонном интегрировании встречаются отличные от M-кривых вещественные римановы поверхности. Например, решения уравнения sine-Gordon параметризуются гиперэллиптическими вещественными римановыми поверхностями неразделяющего типа. В этом случае группа Шоттки G, так же как и для уравнения КдФ, задается образующими $\sigma_n = \alpha_n \pi$, $\alpha_n^2 = 1$; отличие состоит в том, что неподвижные точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \leqslant g$, не лежат на вещественной оси, а сопряжены относительно нее. $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ переводят H в $\overline{H}$, и G не является фуксовой группой. Однако и в этом случае удается доказать сходимость рядов (5).

4. Д.А. Кубенским и автором проведены эксперименты по вычислению на ЭВМ параметров конечнозонных решений уравнения КдФ по формулам (9), (10). Оказалось, что вычисления можно проводить практически на всем множестве S при значениях $g = 4$ и даже бо́льших. Результаты будут приведены в отдельной работе.

5. Результаты настоящей работы позволяют эффектизовать классификацию [2] коммутирующих дифференциальных операторов взаимно простого порядка с гладкими вещественными коэффициентами.

Автор глубоко признателен В.Б. Матвееву, который привлек внимание автора к работе [11], в результате анализа которой возникла настоящая заметка. Автор также благодарен А.Б. Венкову, П.Г. Зографу, Л.А. Тахтаджяну и особенно А.Р. Итсу за полезные обсуждения.

Ленинградское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
11 II 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П.* – УМН, 1976, т. 31, № 1, с. 55–136. 2. *Кричевер И.М.* – УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 183–208. 3. *Итс А.Р., Матвеев В.Б.* – ТМФ, 1975, т. 23, № 1, с. 51–67. 4. *Дубровин Б.А.* – УМН, 1981, т. 36, № 2, с. 11–80. 5. *Форд Л.Р.* Автоморфные функции, 1936. 6. *Натанзон С.М.* – УМН, 1972, т. 27, № 4, с. 145–160. 7. *Marden A.* Contrib. to Analysis, 1974, p. 273–278. 8. *Nakamura A.A.* – J. Phys. Soc. Japan, 1979, vol. 47, p. 1701; 1980, vol. 48, p. 1365. 9. *Boyd J.P.* – J. Math. Phys., 1984, vol. 25, № 12, p. 3390–3423. 10. *Burnside W.* – Proc. London Math. Soc., 1892, vol. 23, p. 49–88. 11. *Baker H.F.* Abel's theorem and the allied theory including the theory of theta functions. Cambridge, 1897. 12. *Schottky F.* – J. Reine Angew. Math., 1887, Bd. 101, S. 227–272. 13. *Keen L.* – Ann. Math., 1966, vol. 84, p. 404–420; Ann. Math. Stud., 1971, vol. 66, p. 205–224. 14. *Fricke R., Klein F.* Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Funktionen. Leipzig, 1926. 15. *Myrberg P.J.* – Ann. Acad. Sci. Fenn (A), 1916, vol. 9, № 4, p. 1–75.

УДК 517.958 : 532.5

МАТЕМАТИКА

С.А. ГАБОВ, Ю.Д. ПЛЕТНЕР

К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННО-ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ВОЛН

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 12 II 1986)

1°. При рассмотрении движения тонкого крыла в потоке несжимаемой идеальной жидкости возникает следующая задача Дирихле: найти гармоническую вне отрезка дуги кривой функцию, принимающую заданные и различные значения на разных сторонах указанной дуги. Эта задача решается в явном виде с использованием интеграла Коши. Здесь мы рассмотрим аналог этой задачи для уравнения гравитационно-гироскопических волн:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2 u + \omega^2 u_{x_1 x_1} + \alpha^2 u_{x_2 x_2} = 0, \tag{1}$$

где ω и α – числовые параметры, а Δ_2 – оператор Лапласа по переменным $(x_1, x_2) = x \in R^2$.

2°. Пусть $\Gamma \in A^{(m,\lambda)}$, $m \geqslant 1$, – простая кривая ляпуновского типа, естественным образом параметризованная, т.е. в качестве параметра выступает длина дуги s. Пусть $\bar{n}_s$ – вектор нормали к Γ в точке $y(s) = (y_1(s), y_2(s))$, направленный влево от кривой по отношению к направлению возрастания параметра s. Ориентируем кривую, выделив ее "внешнюю" Γ^+ и "внутреннюю" Γ^- стороны следующим образом: в н е ш н е й с т о р о н о й назовем ту сторону кривой Γ, которую бу-