Функциональный анализ и его приложения,
1986, т. 20, вып. 1, 64—66

УДК 517.9

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА НА АЛГЕБРАХ *e* (3) И *so* (4). ИЗОМОРФИЗМ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СЛУЧАЕВ

А. И. Бобенко

Как показано в работе [1], гамильтонова система $f_t = \{H, f\}$ с гамильтонианом $H(M, p)$ и скобкой Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \{p_i, p_j\} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

эквивалентна уравнениям Кирхгофа для движения твердого тела в идеальной, несжимаемой и покоящейся на бесконечности жидкости. Скобка (1) это скобка Ли—Пуассона алгебры Ли $e(3)$ группы движений евклидова пространства. Интегралы $f_1 = p^2$, $f_2 = \mathbf{pM}$ имеются всегда, поэтому для полной интегрируемости системы достаточно существования одного дополнительного интеграла I_4 (кроме гамильтониана $H = I_3$). Известны нетривиальные интегрируемые случаи Клебша и Стеклова [2], единственные, когда I_3 и I_4 квадратичны.

Другой интересный тип систем, также имеющих приложение к гидродинамике, описывается уравнениями Эйлера на $L = so(4) = so(3) \oplus so(3)$. На L^* имеется скобка Ли—Пуассона

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \ \{S_i, \mathrm{T}_j\} = 0, \ \ \{T_i, T_j\} = \varepsilon_{ijk} T_k \quad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{2}$$

которая обладает двумя интегралами: $g_1 = \mathrm{S}^2$, $g_2 = \mathrm{T}^2$. Следовательно, так же как и в случае $e(3)$, имеем систему с двумя степенями свободы, для интегрирования которой, помимо гамильтониана $H = I_3$ необходим еще один интеграл I_4. Известны интегрируемые случаи Манакова [3] и Стеклова (см. [4—6]), I_3, I_4 при этом также квадратичны. Других интегрируемых случаев с квадратичными интегралами нет.

Современный взгляд на рассматриваемые классические механические системы позволяет связать интегрируемые случаи на $so(4)$ и $e(3)$. Важную роль сыграло наблюдение [1], что при контракции $so(4)$ в $e(3)$ интегралы случая Манакова переходят в интегралы Клебша (аналогично, 2-й случай Стеклова переходит в 1-й случай Стеклова [5]). Вскоре [6, 7] были получены согласованные с контракцией $so(4) \to e(3)$ представления Лакса, спектральный параметр в которых меняется на эллиптической кривой. Однако рассматриваемые случаи интегрируемости связаны не только посредством контракции $so(4) \to e(3)$. В настоящей работе указана замена переменных, переводящая их друг в друга.

Определим функции $w_\alpha(u)$ через эллиптические функции Якоби модуля k: $w_1(u) = \mathrm{sn}^{-1}(u, k)$, $w_2(u) = \mathrm{dn}(u, k)/\mathrm{sn}(u, k)$, $w_3(u) = \mathrm{cn}(u, k)/\mathrm{sn}(u, k)$, $w_\alpha^2 - w_\beta^2 = J_\beta - J_\alpha$, $J_1 = 0$, $J_2 = k^2$, $J_3 = 1$, $w^2 = (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)/3$, $J = (J_1 + J_2 + J_3)/3$. u изменяется на торе $\hat{T}$ с решеткой $4K$, $4iK'$ (K — полный эллиптический интеграл первого рода модуля k).

1. Случай Манакова

$$\begin{gathered}
L^{(1)}(u) = \sum_{\alpha=1}^{3} \{S_\alpha w_\alpha(u - \varkappa) + T_\alpha w_\alpha(u + \varkappa)\}\, \sigma_\alpha/2i, \\
A^{(1)}(u) = c_{\mathrm{I}} A_{\mathrm{I}}^{(1)} + c_{\mathrm{II}} A_{\mathrm{II}}^{(1)}, \quad A_{\mathrm{I}}^{(1)} = \sum S_\alpha w_\alpha(u - \varkappa)\, \sigma_\alpha/2i, \\
A_{\mathrm{II}}^{(1)} = -\sum \left\{ S_\alpha \frac{w_1 w_2 w_3}{w_\alpha}(u - \varkappa) + T_\alpha w_\alpha(2\varkappa)\, w_\alpha(u - \varkappa) \right\} \sigma_\alpha/2i.
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь σ_α — матрицы Паули, $[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma$. Уравнение Лакса

$$L_t + [L, A] = 0 \tag{4}$$

с операторами (3) описывает гамильтонову систему со скобкой Пуассона (2) и гамильтонианом

$$\begin{gathered}
H = c_{\mathrm{I}} H_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{II}} H_{\mathrm{II}}, \ H_{\mathrm{I}} = \sum w_\alpha S_\alpha T_\alpha, \\
H_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2} \sum \left(-w_\alpha^2 (S_\alpha^2 + T_\alpha^2) + 2\, \frac{w_1 w_2 w_3}{w_\alpha} S_\alpha T_\alpha \right), \quad w_\alpha \equiv w_\alpha(2\varkappa).
\end{gathered} \tag{5}$$

2. Случай Клебша

$$L^{(2)}(u)=\sum\left\{p_\alpha\frac{w_1w_2w_3}{w_\alpha}+M_\alpha w_\alpha\right\}\sigma_\alpha/2i,$$
$$A^{(2)}(u)=d_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{I}}^{(2)}+d_{\mathrm{II}}A_{\mathrm{II}}^{(2)},\quad A_{\mathrm{I}}^{(2)}=\sum p_\alpha w_\alpha\sigma_\alpha/2i, \tag{6}$$
$$A_{\mathrm{II}}^{(2)}=\sum\left\{p_\alpha w_\alpha(w^2+J_\alpha-2J)+M_\alpha\frac{w_1w_2w_3}{w_\alpha}\right\}\sigma_\alpha/2i,\quad w_\alpha\equiv w_\alpha(u).$$

Это гамильтонова система со скобкой Пуассона (1) и гамильтонианом

$$H=d_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{I}}+d_{\mathrm{II}}H_{\mathrm{II}},\quad H=\frac{1}{2}\sum(J_\alpha p_\alpha^2+M_\alpha^2),\quad H_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{J_1J_2J_3}{J_\alpha}p_\alpha^2-J_\alpha M_\alpha^2\right). \tag{7}$$

Соответствующие выражения для случаев Стеклова выглядит следующим образом.
3. 2-й случай Стеклова

$$L^{(3)}(u)=\sum\left\{S_\alpha w_\alpha(u)+\frac{1}{2}T_\alpha(w_\alpha(u-\varkappa)+w_\alpha(u+\varkappa))\right\}\sigma_\alpha/2i,$$
$$A^{(3)}(u)=c_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{I}}^{(3)}+c_{\mathrm{II}}A_{\mathrm{II}}^{(3)},\quad A_{\mathrm{I}}^{(3)}=2\sum S_\alpha\frac{w_1w_2w_3}{w_\alpha}(u)\,\sigma_\alpha/2i, \tag{8}$$
$$A_{\mathrm{II}}^{(3)}=\sum T_\alpha(w_\alpha(u-\varkappa)-w_\alpha(u+\varkappa))\,\sigma_\alpha/2i,$$
$$H=c_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}}H_{\mathrm{II}},\quad H_{\mathrm{I}}=\sum\left(w_\alpha^2(\varkappa)S_\alpha^2-2\frac{w_1w_2w_3}{w_\alpha}(\varkappa)S_\alpha T_\alpha\right),$$
$$H_{\mathrm{II}}=\sum\left(-\frac{w_1w_2w_3}{w_\alpha^2}(\varkappa)T_\alpha^2+2w_\alpha(\varkappa)S_\alpha T_\alpha\right). \tag{9}$$

4. 1-й случай Стеклова

$$L^{(4)}(u)=\sum\left\{p_\alpha w_\alpha\left(w^2+\frac{J_\alpha-J}{2}\right)+\frac{1}{2}M_\alpha w_\alpha\right\}\sigma_\alpha/2i,$$
$$A^{(4)}(u)=d_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{I}}^{(4)}+d_{\mathrm{II}}A_{\mathrm{II}}^{(4)},\quad A_{\mathrm{I}}^{(4)}=-2\sum p_\alpha\frac{w_1w_2w_3}{w_\alpha}\sigma_\alpha/2i, \tag{10}$$
$$A_{\mathrm{II}}^{(4)}=\sum\left\{2p_\alpha\frac{w_1w_2w_3}{w_\alpha}\left(w^2+J-\frac{J_\alpha}{2}\right)+M_\alpha\frac{w_1w_2w_3}{w_\alpha}\right\}\sigma_\alpha/2i,\quad w_\alpha\equiv w_\alpha(u),$$
$$H=d_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{I}}+d_{\mathrm{II}}H_{\mathrm{II}},\quad H_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\sum\left(\left(J_\alpha^2+2\frac{J_1J_2J_3}{J_\alpha}\right)p_\alpha^2+2J_\alpha p_\alpha M_\alpha-M_\alpha^2\right),$$
$$H_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\sum\left(J_\alpha(J_1^2+J_2^2+J_3^2-J_\alpha^2)p_\alpha^2+2\frac{J_1J_2J_3}{J_\alpha}p_\alpha M_\alpha+J_\alpha M_\alpha^2\right). \tag{11}$$

Замечание. Все рассматриваемые случаи — шестипараметрические. Дополнительные к фигурирующим в (5), (7), (9), (11) параметры возникают из-за того, что к гамильтониану можно добавить постоянные f_1, f_2, g_1, g_2. Кроме того, скобка (1) инвариантна относительно преобразования $p_\alpha\to ap_\alpha$ (сразу для всех α), которое меняет гамильтониан.

Теорема. *Классические интегрируемые системы Клебша и Стеклова можно рассматривать как уравнения Эйлера не только на алгебре e (3), но также и на алгебре so (4). В последнем случае они совпадают со случаями Манакова и Стеклова 2 интегрируемости на алгебре so (4). Пусть* $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{M}(t)$ *являются решением системы Клебша, задаваемой гамильтонианом* (7) *и скобкой* (1). *Тогда* $\mathbf{S}(t)$, $\mathbf{T}(t)$, *определяемые тождествами*

$$p_\alpha=w_\alpha(\varkappa)(S_\alpha-T_\alpha),\quad M_\alpha=\frac{w_1w_2w_3}{w_\alpha}(\varkappa)(S_\alpha+T_\alpha), \tag{12}$$

есть решение системы с гамильтонианом (5) *и скобкой* (2), *где*

$$c_{\mathrm{I}}=\frac{w_1^2w_2^2+w_1^2w_3^2+w_2^2w_3^2}{2w_1w_2w_3}(d_{\mathrm{I}}-w_1^2d_{\mathrm{II}})+2w_1w_2w_3d_{\mathrm{II}},$$
$$c_{\mathrm{II}}=d_{\mathrm{I}}-w_1^2d_{\mathrm{II}},\quad w_\alpha\equiv w_\alpha(\varkappa). \tag{13}$$

Соответствие между случаями Стеклова задается равенствами

$$p_\alpha = S_\alpha, \quad M_\alpha = S_\alpha (w_\alpha^2(\varkappa) - 3w^2(\varkappa)) - 2T_\alpha \frac{w_1 w_2 w_3}{w_\alpha}(\varkappa), \tag{14}$$

$$c_{\text{I}} = d_{\text{I}} - w^2(\varkappa)\, d_{\text{II}}, \quad c_{\text{II}} = -w_1 w_2 w_3(\varkappa)\, d_{\text{II}}. \tag{15}$$

Доказательство. L-операторы (3) и (6), а также (8) и (10) различаются только преобразованием $L(u, t) \to f(u)\, L(u, t)$ ($f(u)$ — скалярная функция, не зависящая от t), относительно которого (4) инвариантно. Действительно, справедливы тождества

$$(w^2(\varkappa) - w^2(u))\, L^{(1)}(u) = L^{(2)}(u), \quad (w^2(u) - w^2(\varkappa))\, L^{(3)}(u) = L^{(4)}(u), \tag{16}$$

где функции $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{S}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ связаны соответственно соотношениями (12) и (14), которые доказываются приравниванием коэффициентов при сингулярностях в (16). В случае Стеклова справедливо равенство

$$2d_{\text{II}} L^{(3)} w_1 w_2 w_3(u) + c_{\text{I}} A_{\text{I}}^{(3)} + c_{\text{II}} A_{\text{II}}^{(3)} = d_{\text{I}} A_{\text{I}}^{(4)} + d_{\text{II}} A_{\text{II}}^{(4)}, \tag{17}$$

где постоянные связаны соотношениями (15). Аналогично, только более громоздко, доказывается формула (13). Утверждение теоремы есть простое следствие (16), (17).

Указанное соответствие между гамильтоновыми системами Клебша и Манакова независимо обнаружено в работе [8].

Все описанные выше системы интегрируются в тета-функциях двух переменных. Классические системы Клебша (7) и Стеклова (11) проинтегрированы еще в прошлом веке [9, 10]. Случай Манакова исследовался при помощи $L - A$-пары с рациональной зависимостью от спектрального параметра [11, 12, 13]. Абстрактной теории алгебро-геометрических решений уравнений интегрируемых методом обратной задачи со спектральным параметром на эллиптической кривой посвящена работа [14].

Формулы для решений рассматриваемых здесь систем получаются при помощи техники, предложенной в [15] (несколько более продвинутую версию см. в [16]). Кривая Γ, задаваемая уравнением $\det(L^{(1)}(u) - zI) = 0$, есть двулистное разветвленное (в четырех точках) накрытие тора T, стороны которого $2K$, $2iK'$. Γ обладает инволюцией π, переставляющей листы ($T = \Gamma/\pi$). Многообразие Прима $\mathrm{Prym}_\pi(\Gamma)$ в нашем случае — двумерный абелев тор. Уравнения движения для системы Манакова отвечают условно-периодическому движению на $\mathrm{Prym}_\pi(\Gamma)$ (ср. [12]). В случаях Стеклова Γ, задаваемая уравнением $\det(L(u) - zI) = 0$, обладает, кроме инволюции π, также инволюцией λ: $u \to -u$. Движение линеаризуется на якобиане $J(\Gamma_0)$ кривой $\Gamma_0 = \Gamma/\lambda\pi$ рода 2.

Автор благодарен П. И. Голоду, А. Р. Итсу и В. Б. Матвееву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков С. П.*— УМН, 1982, т. 37, вып. 5, с. 3—49. 2. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости.— Харьков, 1893. 3. *Манаков С. В.*— Функцион. анализ и его прил., 1976, т. 10, вып. 4, с. 92—94. 4. *Богоявленский О. И.*— ДАН СССР, 1983, т. 268, № 1, с. 11—15. 5. *Веселов А. П.*— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 6, с. 1298—1300. 6. *Веселов А. П.*— ДАН СССР, 1984, т. 276, № 3, с. 590—593. 7. *Веселов А. П.*— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 5, с. 1094—1097. 8. *Барьяхтар В. Г., Белоколос Е. Д., Голод П. И.* Препринт ИТФ—84—128Р, 1984. 9. *Kötter F.*— J. Reine Angew. Math., 1892, v. 109, S. 51—81, 89—111. 10. *Kötter F.*— Sitzungsber. Königlich Preuslischen Akad. Wess. Berlin, 1900, v. 6, S. 79—87. 11. *Adler M., van Moerbeke P.*— Adv. Math., 1980, v. 38, № 3, p. 318—379. 12. *Haine L.* Math. Ann., 1983, v. 263, p. 435—472. 13. *Дубровин Б. А.*— В кн.: Совр. проблемы мат.— М.: Изд. ВИНИТИ, 1983, № 23, с. 33—78. 14. *Чередник И. В.*— Изв. АН СССР, сер. мат., 1983, т. 47, № 2, с. 384—406. 15. *Бобенко А. И.*— Функцион. анализ и его прил., 1985, т. 19, вып. 1, с. 6—19. 16. *Белоколос Е. Д., Бобенко А. И., Матвеев В. Б., Энольский В. З.*— УМН, 1986, т. 41, вып. 2.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило в редакцию
14 августа 1984 г.