

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
(Ленинградское отделение)

На правах рукописи
УДК 517.946

БОБЕНКО Александр Иванович

ТОЧНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ НА
ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

(01.01.02 - дифференциальные уравнения и
математическая физика)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ленинград
1985

Работа выполнена в лаборатории математических проблем гео-
физики Ленинградского отделения ордена Ленина и ордена Октябрь-
ской революции Математического института им. В.А.Стеклова АН
СССР

Научные руководители: доктор физико-математических наук
В.Б.Матвеев

кандидат физико-математических наук
А.Р.Итс

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
И.М.Кричевер

доктор физико-математических наук
Л.А.Тахтаджян

Ведущая организация: Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Защита состоится 21 февр. 1985 г. в 14⁰⁰ часов на
заседании специализированного совета Д002.38.04 при Ленинград-
ском отделении ордена Ленина и ордена Октябрьской революции
Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР (Ленинград,
наб.р.Фонтанки, д.27, комн.311).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ДОММ.

Автореферат разослан 15 января 1985 г.

Ученый секретарь специализированного совета
доктор физ.-матем.наук

А.П.Осколков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Возникновение и развитие метода обрат-
ной задачи (МОЗ) позволило проинтегрировать многие интересные
нелинейные уравнения математической физики. В основе интегри-
рования большинства нелинейных уравнений при помощи МОЗ лежит
представление их в виде уравнения нулевой кривизны

$$U_t(\lambda) - V_x(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0 \quad (I)$$

с рациональной зависимостью от дополнительного "спектрально-
го" параметра λ . Можно сказать, что в рамках этой схемы
МОЗ в настоящее время достаточно полно разработан. В то же
время, еще в 1979 году появился первый пример уравнения ин-
тегрируемого МОЗ с параметром λ меняющимся на эллиптической
кривой - соответствующее представление нулевой кривизны было
найдено (Е.К.Склянин, А.Е.Боровик) для уравнения Ландау-Лиф-
шица. Позднее аналогичные представления были получены для
уравнения асимметричного кирального $O(3)$ поля (И.В.Чередник),
а также для некоторых классических конечномерных гамильтоно-
вых систем (А.П.Веселов).

Актualityность точного интегрирования уравнений интегрируе-
мых МОЗ с параметром на эллиптической кривой объясняется преж-
де всего важностью их приложений в физике. Особенно важно в
этом отношении уравнение Ландау-Лифшица, вопрос о построении
точных решений которого активно изучался. В результате были
найденны (в основном прямыми методами) различные частные реше-
ния солитонного типа.

Сравнительно долгое время построить при помощи МОЗ явные
формулы для решений перечисленных выше уравнений не удавалось.
Дело в том, что МОЗ, разработанный для уравнений нулевой кри-

визны с параметром λ на комплексной плоскости, не переносится автоматически на случай λ меняющегося на эллиптической кривой - требовалась определенная модификация методов построения точных решений, относительно несложная при построении многосолитонных решений. Более серьезные трудности встретились при построении алгеброгеометрических решений в рамках созданной в середине 70-х годов в работах С.П.Новикова, Б.А.Дубровина, В.Б.Матвеева, А.Р.Игуса и др. теории конечнозонного интегрирования. Как следствие, в этом случае потребовалась более нетривиальная модификация теории, основанная на синтезе схемы Кричвера с общими идеями метода матричной задачи Римана и теории редукции тэта-функций алгебраических кривых.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Разработка методов построения точных решений уравнений интегрируемых МОЗ с параметром на эллиптической кривой. Построение процедуры одевания и конечнозонных (алгеброгеометрических) решений уравнений Ландау-Лифшица, асимметричного кирального $O(3)$ поля, а также интегрирование уравнений Эйлера на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$.

ОБЩАЯ МЕТОДИКА. Для достижения цели работы использовались различные методы алгебраической геометрии римановых поверхностей и абелевых многообразий, теории дифференциальных уравнений, а также теории эллиптических функций и функций комплексного переменного.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

- 1) Получены точные формулы для алгеброгеометрических решений уравнений Ландау-Лифшица и асимметричного кирального $O(3)$ поля, причем впервые подобные решения выражаются в терминах тэта-функций многообразий Прима.
- 2) Проинтегрированы случаи Манакера и Стеклова уравнений Эйлера на алгебре $so(4)$.
- 3) Доказан изоморфизм интегрируемых случаев уравнений Эйлера на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$.
- 4) Для уравнения Ландау-Лифшица построена процедура одевания

ния, позволяющая по известным решениям строить новые.

5) Как различные частные случаи получены известные классические выражения для решений интегрируемых случаев Клебша и Стеклова движения твердого тела в идеальной жидкости, причем вычислены значения всех постоянных.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Результаты, полученные в диссертации, могут быть применены для расчета ряда конкретных процессов в теории нелинейных волн в соответствии с физическим смыслом изучаемых в диссертации уравнений. Наиболее важными в этом отношении представляются полученные новые решения уравнения Ландау-Лифшица.

Алгеброгеометрические решения уравнений Ландау-Лифшица и асимметричного кирального $O(3)$ поля выражаются через тэта-функции многообразия Прима. Последние до сих пор не использовались для построения решений нелинейных дифференциальных уравнений. Возможно использование развитой в диссертации техники в двух направлениях. Во-первых, в терминах тэта-функций многообразий Прима можно строить алгеброгеометрические решения других уравнений: А.П.Веселов и С.П.Новиков недавно нашли подобные выражения для собственной функции и потенциала двумерного оператора Шредингера. Во-вторых, аналогично известной гипотезе С.П.Новикова в теории уравнения Кадомцева-Петвиашвили, при подстановке полученных формул в нелинейные уравнения возможно выделение соответствующих многообразий Прима.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах ЛОМЛ АН СССР, семинарах теоретдела НИИФ ЛГУ им.А.А.Жданова, ИТФ АН УССР, ИТФ им.Ландау АН СССР. Они были представлены также в докладах автора, прочитанных на Совещании Второй международной рабочей группы по нелинейным и турбулентным процессам в физике (Киев, 1983), на Всесоюзном семинаре по нелинейным задачам математической физики (Ленинград, 1983), на Всесоюзном семинаре "Уравнение Ландау-Лифшица" (Киев, 1984) и на Всесоюзном семинаре-совещании молодых ученых "Нелинейные волны" (Калининград, 1984).

ПУБЛИКАЦИИ. Основное содержание диссертации опубликовано

в четырех работах [1 - 4].

ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на 9 параграфов и заключения. Общий объем диссертации 113 машинописных страниц. Список литературы содержит 74 наименования. Имеется 11 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткий обзор работ по теме диссертации, постановку задачи и изложение общего плана работы.

Первая глава диссертации состоит из четырех параграфов.

Первый из них носит вводный характер. Здесь приводятся известные представления нулевой кривизны для уравнений Ландау-Лифшица,

$$\vec{S}_t = [\vec{S} \times \vec{S}_{xx}] + [\vec{S} \times I \vec{S}], |S| = 1, I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3), \quad (2)$$

асимметричного кирального $O(3)$ поля и некоторых их обобщений. Пусть параметр u изменяется на торе $\hat{T}$ с решеткой $4K, 4iK'$ (K - полный эллиптический интеграл модуля k , K' - дополнительный модуль k'). Определим функции $w_\alpha(u)$ через эллиптические функции Якоби модуля k

$$w_1(u) = \frac{1}{\text{sn}(u, k)}, w_2(u) = \frac{\text{dn}(u, k)}{\text{sn}(u, k)}, w_3(u) = \frac{\text{cn}(u, k)}{\text{sn}(u, k)}. \quad (3)$$

Тогда уравнение (2) есть условие совместности (1) системы линейных уравнений

$$\Psi_x = U \Psi, \quad \Psi_t = V \Psi, \quad (4)$$

$$U = -ig \sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha(x, t) w_\alpha(u) \sigma_\alpha,$$

$$V = 2ig^2 \sum_{\alpha} w_1 w_2 w_3 w_\alpha^{-1}(u) S_\alpha \sigma_\alpha - ig \sum_{\alpha \neq \beta} w_\alpha(u) S_\beta \sigma_\alpha \sigma_\beta, \quad (5)$$

где σ_α - матрицы Паули, а параметры I_α даются соотношениями

ями

$$k = \sqrt{\frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_1}}, \quad g = \frac{1}{2} \sqrt{I_3 - I_1}, \quad I_1 < I_2 < I_3.$$

Решения известных уравнений с эллиптической $U-V$ парой стационарные относительно некоторых высших интегралов движения являются также решениями интересных классических систем (А.П. Веселов). Это интегрируемые уравнения Эйлера с квадратичными интегралами движения на алгебрах Ли $e(3)$ (случай Клебша и Стеклова интегрируемости уравнений Кирхгофа движения твердого тела в идеальной жидкости) и $so(4)$ (случай Манакова и Стеклова). Все они обладают представлениями Лакса в матрицах (2×2) с параметром на эллиптической кривой. Современный взгляд на рассматриваемые классические системы как на уравнения Эйлера позволил связать между собой системы прежде вместе не рассматривавшиеся. С.П.Новиковым впервые замечено, что при контракции $so(4)$ в $e(3)$ интегралы случая Манакова перейдут в интегралы Клебша. В § 2 доказан более сильный результат: оказывается, рассматриваемые случаи интегрируемости на $so(4)$ и $e(3)$ связаны не только посредством контракции $so(4) \rightarrow e(3)$. Имеется замена переменных, переводящая их друг в друга.

В § 3 приводится обобщение найденной А.В.Михайловым формулировки задачи Римана для уравнения Ландау-Лифшица на случай произвольного эллиптического пучка матричной размерности (2×2) . Таким образом, каждому решению нелинейного уравнения сопоставляется функция $\Psi(x, t, u)$, являющаяся решением соответствующей обобщенной задачи Римана с некоторым набором данных Λ . Пусть $\Psi_0(x, t, u)$ - функция, удовлетворяющая уравнению (4), (5) и приводящая тем самым к некоторому решению $S_0(x, t)$ уравнения (2). Отвечающие Ψ_0 данные обобщенной задачи Римана обозначим через Λ_0 . Процедура одевания, приведенная в § 4, позволяет по функции Ψ_0 явным образом построить новую функцию $\Psi(x, t, u)$, удовлетворяющую той же обобщенной задаче Римана, но с новым набором данных $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda'$, и, тем самым, по известному решению S_0 уравнения (2) построить его

новое решение.

Зададимся парой точек $\lambda_1, \lambda_2 \in \hat{T}$ и парой комплексных чисел A_1, A_2 . Рассмотрим матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 - \omega_3 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) & -\omega_1 (\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2) + \omega_2 (\beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2) \\ -\omega_1 (\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2) - \omega_2 (\beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2) & \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 + \omega_3 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \end{pmatrix} \quad (6)$$

где введены обозначения

$$\Psi_0(\lambda_j) \begin{pmatrix} 1 \\ A_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}, j=1,2; \quad \omega_\alpha = \frac{w_\alpha \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)}{w_\alpha \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right)}. \quad (7)$$

Тогда

$$S = Q S_0 Q^{-1}, \quad S = \sum S_\alpha \sigma_\alpha \quad (8)$$

является решением уравнения Ландау-Лифшица с данными $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda', \Lambda' = \{\lambda_1, \lambda_2, A_1, A_2\}$. Формулы (6-8) - центральные в § 4. Далее обсуждаются условия на параметры Λ' , которые обеспечивают в преобразовании (8) сохранение вещественности вектора S , а также строятся решения солитонного типа. Интегральной особенностью уравнения Ландау-Лифшица является возможность построить при помощи процедуры одевания некоторые периодические по $\mathcal{S}$ решения.

Одновременно и независимо несколько отличные процедуры одевания для уравнений нулевой кривизны с параметром на эллиптической кривой были предложены А.Б.Борисовым и И.В.Чередников. Мы же в § 4 используем подход А.Р.Итса, основанный на нестандартной (в духе работ Дэймбо, Мива и Уэно) версии сведения интегрируемого уравнения к задаче Римана, которая приведена в § 3.

Вторая глава диссертации посвящена алгеброгеометрическому интегрированию. Оказывается, что все рассмотренные в первой

главе нелинейные уравнения математической физики, связанные с эллиптическими представлениями нулевой кривизны, интегрируются в тэта-функциях многообразий Прима. § I носит вспомогательный вводный характер. Необходимость включения такого параграфа в диссертацию обусловлена тем, что понятия дифференциалов и тэта-функций Прима до сих пор встречались преимущественно только в работах по алгебраической геометрии, где встречаются почти исключительно с абстрактной алгеброгеометрической точки зрения, неудобной для использования в нелинейных уравнениях.

В § 2 строится центральная для дальнейшего явная формула для конечнозонной Ψ -функции (функции Бейкера-Ахизера). В рассматриваемом случае эллиптической $U-V$ пары конечнозонная Ψ -функция определяется на двулистом разветвленном накрытии тора. Рассмотрим риманову поверхность Γ рода $n+1$ задаваемую равенством

$$z^2 = \prod_{j=1}^n \left(w_1^2 \left(u - \frac{p_j + q_j}{2} \right) - w_1^2 \left(\frac{p_j - q_j}{2} \right) \right), \quad u \in T. \quad (9)$$

Γ - двулистное накрытие $\mu: \Gamma \rightarrow T$ над тором T - "четвертинка" тора $\hat{T}$, стороны T равны $2K, 2iK'$ с точками ветвления p_j, q_j . Инволюция $\mathcal{I}: \Gamma \rightarrow \Gamma$ меняет листы накрытия. Канонический базис циклов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ можно выбрать так, что $\mathcal{I}$ действует на него по правилу (см. рис. I, где $n=2$, части циклов, лежащие на верхнем торе изображены сплошной линией, а части, лежащие на нижнем листе - пунктирной) $\mathcal{I} \alpha_i = \alpha_{n+1-i}, \mathcal{I} \beta_i = \beta_{n+1-i}, \mathcal{I} \alpha_i = -\alpha_i, \mathcal{I} \beta_i = -\beta_i, i=2, \dots, n, du_1, \dots, du_{n+1}$ - соответствующие нормированные голо-

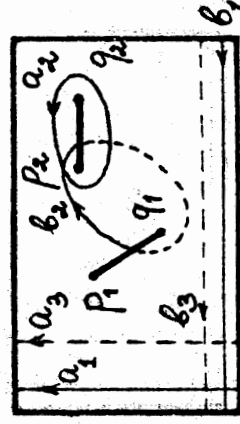


Рис. I

формные дифференциалы. Определим дифференциалы

$$d\lambda_i = \frac{1}{2}(du_1 - du_{n+1}), \quad d\lambda_i = du_i, \quad i=2, \dots, n.$$

это дифференциалы Прима кривой Γ относительно инволюции J : $J^* d\lambda = -d\lambda$. Они не нормированы. Их θ -периоды определяют матрицу

$$\Pi_{ij} = \int_{\theta_j} d\lambda_i, \quad i, j=1, \dots, n,$$

по которой строится тета-функция соответствующего многообразия Прима

$$\theta(z|\Pi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \exp\{ \pi i \langle m, m \rangle + 2\pi i \langle z, m \rangle \}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Будем обозначать за u^+ и $u^- = Ju^+$ точки соответственно на верхнем и нижнем листах Γ такие, что $\mu u^+ = \mu u^- = u$. Рассмотрим нормированные интегралы Прима второго рода $\Omega_i(P)$

$$\pi^* d\Omega_i = -d\Omega_i, \quad \int_{\alpha_j} d\Omega_i = 0 \quad i=1, 2 \quad j=1, \dots, n$$

однозначно определяемые видом асимптотики в полюсах

$$\Omega_1 \rightarrow \mp i g u^{-1}, \quad \Omega_2 \rightarrow \pm 2ig u^{-2}, \quad u \rightarrow 0^{\pm},$$

и обозначим за $\omega_i \in \mathbb{C}^n$ векторы их θ -периодов

$$\omega_j^i = \int_{\theta_j} d\Omega_i, \quad \omega_2^i = \int_{\theta_j} d\Omega_2. \quad (10)$$

функция

$$\Psi(P) = \begin{pmatrix} \psi_1(P) & \psi_1(\pi P) \\ \psi_2(P) & \psi_2(\pi P) \end{pmatrix} \quad (11)$$

определяется формулами

$$\psi_1(P) = \frac{\theta(\lambda(P) + \omega + 2|\Pi)}{\theta(\lambda(P) + 2|\Pi)} \exp\{ \Omega_1(P)x + \Omega_2(P)t \}$$

$$\psi_2(P) = \frac{\theta(\lambda(P) + \omega + 2\Delta|\Pi)}{\theta(\lambda(P) + 2|\Pi)} \exp\{ \Omega_1(P)x + \Omega_2(P)t \} \quad (12)$$

$$2\lambda \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda(P) = \int_{P_0}^P d\lambda, \quad d\lambda = (d\lambda_1, \dots, d\lambda_n), \quad \Omega_i(P) = \int_{P_0}^P d\Omega_i,$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} (\omega_1 x + \omega_2 t), \quad \Delta = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0) = \sum_{\alpha_1}$$

функция (II), (12) является функцией Бейкера-Ахизера, отвечающей уравнению Ландау-Лифшица. Изменяя соответствующим образом интегралы $\Omega_i(P)$ получаем выражения для функций Бейкера-Ахизера, отвечающих другим нелинейным уравнениям.

Ψ -функция построенная в § 2 есть решение некоторой линейной системы (4), (5) в случае уравнения Ландау-Лифшица.

Коэффициенты этой системы, зависящие от x, t , легко определяются по Ψ , и являются в свою очередь решением соответствующего нелинейного уравнения. Оказывается, например, что решения уравнения Ландау-Лифшица задаются следующими выражениями

$$S_1 = \frac{CD-AB}{AD-BC}, \quad S_2 = -i \frac{CD+AB}{AD-BC}, \quad S_3 = \frac{AD+BC}{AD-BC}, \quad (13)$$

$$A = \theta(\omega + 2|\Pi), \quad B = \theta(\omega + 2 + 2|\Pi)$$

$$C = \theta(\omega + 2 + \Delta|\Pi), \quad D = \theta(\omega + 2 + \Delta|\Pi), \quad z = \int_{0^+}^0 d\lambda.$$

Там же приведены похожие выражения для решений других нелинейных уравнений и выделены некоторые решения в тета-функциях

Якоби, отвечающие поверхностям Γ , обладающим дополнительной симметрией.

Отметим, что алгеброгеометрические решения уравнений с эллиптическим представлением нулевой кривизны (произвольной матричной размерности), с несколько отличных от предлагаемых в диссертации позиций, исследовались И.В.Чередником. В его работах, однако, не содержится явного интегрирования в тэта-функциях.

Интегрированию конечномерных гамильтоновых систем механики и гидродинамики, рассматривавшихся в § 2 первой главы, посвящен § 4. Рассмотрим скобку Ли-Пуассона, отвечающую алгебре $so(4) = so(3) \oplus so(3)$

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \{T_i, T_j\} = \epsilon_{ijk} T_k, \{S_i, T_j\} = 0. \quad (I4)$$

Случай интегрируемости Манакова на $so(4)$ - это гамильтоновы уравнения $\dot{S} = \{H, S\}$, $\dot{T} = \{H, T\}$ со скобкой (I4) и гамильтонианом

$$H = c_I H_I + c_{II} H_{II}, \quad H_I = \sum w_\alpha S_\alpha T_\alpha, \quad w_\alpha \equiv w_\alpha(2x),$$

$$H_{II} = \frac{1}{2} \sum (-w_\alpha^2 (S_\alpha^2 + T_\alpha^2) + 2w_1 w_2 w_3 w_\alpha^{-1} S_\alpha T_\alpha).$$

Они имеют следующее представление Лакоа

$$L_t + [L, A] = 0, \quad L = \frac{1}{2i} (\sum S_\alpha w_\alpha(u-x) \sigma_\alpha + \sum T_\alpha w_\alpha(u+x) \sigma_\alpha),$$

$$A = c_I A_I + c_{II} A_{II}, \quad A_I = \frac{1}{2i} (\sum S_\alpha w_\alpha(u-x) \sigma_\alpha),$$

$$A_{II} = \frac{1}{2i} (-w_1 w_2 w_3 (u-x) \sum S_\alpha w_\alpha^{-1} (u-x) \sigma_\alpha - \sum w_\alpha(2x) T_\alpha w_\alpha(u-x) \sigma_\alpha).$$

Риманова поверхность Γ в этом случае задается уравнением $z^2 = \det L(u)$ и является частным случаем поверхности (9), $(n=2, p_1+p_2+q_1+q_2=0)$. $V \in C^2$ - вектор $\mathcal{E}$ -перiodов (10) нормированного интеграла Принга $\Omega(P)$, определяемого асимптотической в полюсах

$$\Omega \rightarrow \pm (ic_{II} \sqrt{g_1} (u-x)^{-2} - ic_I \sqrt{g_1} (u-x)^{-1}), u \rightarrow x^\pm, g_1 = |S|^2, g_2 = |T|^2.$$

Тогда общее решение случая Манакова дается следующей формулой

$$S_k = \epsilon_k \sqrt{g_1} \frac{\theta[i_k](z_0+Vt)\theta[i_k](z+\delta) + \theta[j_k](z_0+Vt)\theta[j_k](z+\delta)}{\theta[m](z_0+Vt)\theta[m](z+\delta) + \theta[n](z_0+Vt)\theta[n](z+\delta)}$$

$$T_k = \epsilon_k \sqrt{g_2} \frac{\theta[i_k](z_0+Vt)\theta[i_k](z-\delta) + \theta[j_k](z_0+Vt)\theta[j_k](z-\delta)}{\theta[m](z_0+Vt)\theta[m](z-\delta) + \theta[n](z_0+Vt)\theta[n](z-\delta)}$$

$$\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = -i, \epsilon_3 = 1, [i_1] = [(\frac{1}{2}0), (00)], [i_2] = [(00), (00)],$$

$$[j_3] = [(00), (\frac{1}{2}0)] \quad [j_1] = [(\frac{1}{2}\frac{1}{2}), (00)] \quad [j_2] = [(\frac{0}{2}\frac{1}{2}), (00)],$$

$$[j_3] = [(0\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}0)] \quad [m] = [(\frac{1}{2}0), (\frac{1}{2}0)] \quad [n] = [(\frac{1}{2}\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}0)],$$

$$z = \int \frac{dx^-}{-x^+} \frac{dx^+}{x^+}, \quad \delta = \int dx, \quad z_0 \in C^2, \quad \theta(z) \equiv \theta(z|2\Gamma).$$

Похожими выражениями в двумерных тэта-функциях задаются решения других интегрируемых уравнений Эйлера на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$ с квадратичными интегралами движения. При определенных начальных данных $\det L(u)$ имеет кратный нуль, в этом случае одна зона Γ пропадает, и получается семейство периодических решений в тэта-функциях Якоби.

В общем случае полученные алгеброгеометрические решения - комплексные. В § 5 указаны эффективные ограничения на поверхность Γ и вектор $\mathcal{E} \in C^n$, приводящие к вещественности определяемых по формулам (13) решений уравнения Ландау-Лифшица.

В заключении подведены основные итоги работы, а также сформулирован ряд математических задач, тесно связанных с содержа-

нием диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Бобенко А.И. Уравнение Ландау-Лифшица. Процедура "одевания". Элементарные возбуждения. - Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1983, т.123, с.58-66.
2. Бикбаев Р.Ф., Бобенко А.И., Итс А.Р. Уравнение Ландау-Лифшица. Теория точных решений.П. Препринт ДОНФТИ-84-7 (82); Донецк, 1984, 51 с.
3. Bikbaev R.F., Bobenko A.I. On finite-gap integration of the Landau-Lifshitz equation. XYZ case. LOMI preprint, E-8-83, Leningrad, 1983, 27 p.
4. Belokolos E.D., Bobenko A.I., Enol'skii V.Z., Matveev V.B. Algebraic-geometric principles of superposition of finite-gap solutions for integrable nonlinear equations: Nonlinear equation solutions expressible in terms of elliptic functions. Preprint ITP-84-154E, Kiev, 1984, 56 p.



РГН ЛНАФ, зак.11, тип.110, уч.-изд.л.0,5;3/1-1985г.,М-24701

Бесплатно