УДК 517.946+517.944

А. И. Бобенко

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА 2 УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ

Уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4} U_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U_t + \frac{1}{4}(6UU_x - U_{xxx})\right), \tag{1}$$

выведенное в 1970 г. [1], является естественным двумерным аналогом уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ). В последние годы было предложено несколько способов построения широких классов точных решений уравнения КП, в частности содержащих решения, зависящие от произвольного числа функциональных параметров. Первой в этом направлении была работа В. Е. Захарова и А. Б. Шабата [2], основанная на интегральных уравнениях Гельфанда — Левитана — Марченко. Далее, И. М. Кричевером [3] была предложена схема интегрирования уравнения КП, базирующаяся на найденном им обобщении алгеброгеометрической схемы интегрирования уравнения КдФ [4—6]. Развитием схемы И. М. Кричевера явилась построенная им и С. П. Новиковым теория решений высших рангов, наиболее полное изложение которой содержится в [7, 8]. Однако структура соответствующих решений в общем случае решений ранга $l \geqslant 2$ недостаточно изучена.

В работе [9] В. Б. Матвеев предложил простую алгебраическую схему интегрирования уравнения КП, названную им методом преобразований Дарбу. Эта схема также приводит к обширному классу точных решений, конструируемых по известному «затравочному» решению $U(x, y, t)$ (в качестве которого может быть использовано, например, нулевое, конечнозонное или какое-либо растущее решение) и набору из M линейно независимых решений $f_1, \ldots, f_M$ линейной системы

$$\psi_y = \psi_{xx} + U\psi,$$
$$\psi_t = \psi_{xxx} + \frac{3}{2} U\psi_x + W\psi, \tag{2}$$

совместность которой эквивалентна уравнению КП (1).

Преобразование Дарбу $\psi \to \tilde{\psi} = \psi_x - f_x f^{-1}\psi$, $\quad U \to \tilde{U} = U + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f$, где f — частное решение системы (2), сохраняет вид системы, следовательно, $\tilde{U}$ будет решением уравнения КП. Итерируя преобразование Дарбу, можно получить [9], что функция

$$U_M = U + 2\frac{\partial^2}{\partial x_2} \ln \det A, \qquad A_{ik} = \frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}} f_k, \quad 1 \leqslant i,\ k \leqslant M \tag{3}$$

есть решение уравнения КП ($f_k(x, y, t)$ — решения системы (2) с «затравочным» потенциалом U).

Интересным является вопрос о сопоставлении классов точных решений, получаемых различными методами. В этом направлении получены лишь некоторые результаты. В частности, В. Б. Матвеев указал [10], что рациональные решения уравнения КП возникают из формулы (3) при выборе f_i в виде

$$f_i = \sum_j a_{ij}(k)\frac{\partial^j}{\partial k^j} \exp(kx + k^2y + k^3t)\Big|_{k=k_i}.$$

Он заметил также, что убывающие рациональные решения «общего положения», полученные И. М. Кричевером в работе [11] иным, более сложным путем, сразу следуют из (3), если положить

$$f_i = \left(\frac{\partial}{\partial k} + g(k)\right) \exp(kx + k^2y + k^3t)\Big|_{k=k_i},$$

где $g(k)$ — произвольная функция.

В. Б. Матвеев высказал предположение, что все рациональные решения рангов $l \geqslant 2$ могут быть получены из формулы (3), если в качестве «затравочного» потенциала брать решения ранга $l = 1$. В данной работе мы приведем лишь частичное подтверждение этой гипотезы для ранга $l = 2$, а именно, покажем, что формула (3) с $U = 0$ и

$$f_k = f(\beta_k) = \sum_{s=0}^{2N+1} \beta_k^s \varphi_s(x, y, t), \quad 1 < i, \quad k < M = 2N,$$
$$\varphi_s(x, y, t) = \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial k^s} \exp(kx + k^2 y + k^3 t)\Big|_{k=0} \tag{4}$$

определяет рациональные решения ранга 2, изучавшиеся в работе [8].

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями из [8] и подробно разберем пример 2 ([8, с. 48—49]), так как связанные с ним вычисления не были доведены до окончательных формул.

Рассмотрим случай ранга $l=2$. Начнем с определения векторной функции Бейкера — Ахиезера. Она ищется в виде

$$\psi(x, y, t, k) = \left(\xi_0 + \sum_{q=1}^{Nl} \mathbf{a}_q(x, y, t)(k - \gamma_q^{-1})\right)\psi_0(x, y, t, k), \quad \xi_0 = (1, 0).$$

Матрицы A_i берутся простейшими: $A_1 = \varkappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \varkappa^2$, $A_3 = \varkappa^3$. Тогда

$$\psi_0 = \exp(A_1 x + A_2 y + A_3 t) = \exp(-py) \begin{pmatrix} \cos\theta & p^{-1/2}\sin\theta \\ -p^{1/2}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

где $\theta = p^{1/2}(x - pt)$, $p = -k$.

Выпишем два условия на функцию ψ, которые гарантируют ее единственность:

$$\sum_{i=1}^{l} a_{si}\psi_0^{ij} = \alpha_{sj}\left(\sum_{i=1}^{l} a_{si}\psi_0^{il}\right), \quad s = 1, \ldots, Nl \tag{5}$$

(a_{si} — элементы векторов $\mathbf{a}_s(x, y, t)$, α_{sj} — постоянные произвольные величины),

$$\frac{\partial\psi}{\partial k}\Big|_{k=0} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^N\psi}{\partial k^N}\Big|_{k=0} = 0. \tag{6}$$

Тогда, как показано в работе [8], функция

$$U(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=1}^{Nl} a_{jl}\right) \tag{7}$$

будет являться решением уравнения КП.

Условие (5) при $\gamma_s = \alpha_s^2$ приводит к равенству $a_{s1} = a_{s2}\alpha_s$. В дальнейшем $a_{s2} = a_s$. Условие (6) исследуем сначала в случае $N=2$. Для этого разложим ψ_0 в ряд по степеням p:

$$\psi_0 = \exp(-py)\left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} & t + \frac{x^3}{6} \\ x & \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} + p^2\begin{pmatrix} xt + \frac{x^4}{24} & \frac{x^2 t}{2} + \frac{x^5}{120} \\ t + \frac{x^3}{6} & xt + \frac{x^4}{24} \end{pmatrix} + O(p^3)\right\}. \tag{8}$$

Первое из условий (6) эквивалентно уравнению

$$(\xi_0 + \mathbf{A})\frac{\partial\psi_0}{\partial p}\psi_0^{-1}\Big|_{p=0} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial k}\Big|_{k=0}, \quad \xi_0 = (1, 0), \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{4}\frac{\mathbf{a}_i}{k - \gamma_i}. \tag{9}$$

Из разложения (8) легко получить выражения для

$$\hat{D} = \frac{\partial\psi_0}{\partial p}\psi_0^{-1}\Big|_{p=0} = \begin{pmatrix} -y - \frac{x^2}{2} & -t + \frac{x^3}{3} \\ -x & -y + \frac{x^2}{2} \end{pmatrix},$$

поэтому (9) можно записать следующим образом:

$$\left(1-\frac{a_i}{\alpha_i},\quad -\frac{a_i}{\alpha_i^2}\right)\hat{D}=\left(-\frac{a_i}{\alpha_i^3},\quad -\frac{a_i}{\alpha_i^4}\right), \tag{10}$$

где учтено, что $\gamma_i=\alpha_i^2$, и по **индексу** i **подразумевается суммирование от 1** до 4. Аналогично второе из условий (6) $\partial^2\psi/\partial k^2|_{k=0}=0$ приводит к **уравнению**

$$-2\left(\frac{a_i}{\alpha_i^5},\ \frac{a_i}{\alpha_i^6}\right)-2\left(\frac{a_i}{\alpha_i^3},\ \frac{a_i}{\alpha_i^4}\right)\hat{D}+\left(1-\frac{a_i}{\alpha_i},\ -\frac{a_i}{\alpha_i^2}\right)\hat{E}=0, \tag{11}$$

$$\hat{E}=\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}\psi_0^{-1}\bigg|_{p=0}=\begin{pmatrix} y^2+2xt+\frac{x^4}{12}+yx^2 & -\frac{x^5}{15}-x^2t-\frac{2}{3}yx^3+2ty \\ 2t+\frac{x^3}{3}+2xy & y^2-yx^2-\frac{x^4}{4}\end{pmatrix}.$$

Система уравнений (10), (11) — это система 4 линейных уравнений на 4 неизвестные функции a_i:

$$\begin{pmatrix} f(\beta_1) & f(\beta_2) & f(\beta_3) & f(\beta_4)\\ g(\beta_1) & g(\beta_2) & g(\beta_3) & g(\beta_4)\\ h(\beta_1) & h(\beta_2) & h(\beta_3) & h(\beta_4)\\ s(\beta_1) & s(\beta_2) & s(\beta_3) & s(\beta_4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_{11}\\D_{12}\\E_{11}\\E_{12}\end{pmatrix},$$

где D_{11}, D_{12}, E_{11}, E_{12} — элементы матриц $\hat{D}$ и $\hat{E}$, $\beta_i=\alpha_i^{-1}$, $f(\beta)=\beta b_1(\beta)=\beta(-\beta^2+D_{21}\beta+D_{11})$, $g(\beta)=\beta b_2(\beta)=\beta(-\beta^3+D_{22}\beta+D_{12})$, $h(\beta)=\beta b_3(\beta)=\beta(-2\beta^2 b_1(\beta)+E_{21}\beta+E_{11})$, $s(\beta)=\beta b_4(\beta)=\beta(-2\beta^2 b_2(\beta)+E_{22}\beta+E_{12})$.

Простой проверкой можно убедиться в справедливости равенств

$$(b_1(\beta)-D_{11})\beta^{-1}=b_{1x}(\beta),\quad (b_3(\beta)-E_{11})\beta^{-1}=b_{3x}(\beta),\quad (b_2(\beta)-D_{12})\beta^{-1}-b_{2x}(\beta)=b_1(\beta),\quad (b_4(\beta)-E_{12})\beta^{-1}-b_{4x}(\beta)=b_2(\beta). \tag{12}$$

Используя их, для $U(x, y, t)$ **по формуле (7) можно получить**

$$U(x,y,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det A,\quad A_{ik}=b_i(\beta_k). \tag{13}$$

В случае $N=1$ имеем

$$U(x,y,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det B,\quad B=\begin{pmatrix} b_1(\beta_1) & b_1(\beta_2)\\ b_2(\beta_1) & b_2(\beta_2)\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Покажем теперь, как решения (13), (14) могут быть выведены **методом преобразований** Дарбу. Для этого приведем их к виду (3)

$$2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det B=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\begin{vmatrix} b_2(\beta_1)+xb_1(\beta_1) & b_2(\beta_2)+xb_1(\beta_2)\\ b_1(\beta_1) & b_1(\beta_2)\end{vmatrix}=$$

$$=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{vmatrix} f(\beta_1) & f(\beta_2)\\ f_x(\beta_1) & f_x(\beta_2)\end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$f(\beta)=-b_2(\beta)-xb_1(\beta)=\varphi_3+\beta\varphi_2+\beta^2\varphi_1+\beta^3\varphi_0,$$

$$\varphi_s(x,y,t)=\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial k^s}\exp(kx+k^2y+k^3t)\bigg|_{k=0}.$$

При доказательстве второго равенства в **выражении** (15) **необходимо** воспользоваться соотношением (12). Для случая $N=2$ получается

$$2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det A=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det C,\quad C_{ik}=\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}f(\beta_k),\quad 1\leqslant i,\ k\leqslant 4,$$

$$f(\beta)=\sum_{s=0}^{5}\beta^{5-s}\varphi_s(x,y,t).$$

Аналогично для произвольного N доказывается формула (4). Здесь не приводятся соответствующие выкладки ввиду их громоздкости.

Таким образом, решения уравнения КП для вырожденной кривой Г, $l=2$ и произвольного N легко могут быть получены при помощи $2N$-кратной итерации преобразования Дарбу с нулевым «затравочным» потенциалом. Очевидно, что все они убывают при $x\to\infty$, $y=y_0$, $t=t_0$ (этот факт для случая $N=1$ впервые был доказан

А. П. Веселовым (устное сообщение)), поэтому гипотеза о росте решений (13), (14), содержащаяся в работе [8], не подтверждается.

Автор благодарит В. Б. Матвеева за постановку задачи.

Summary

It is shown that the rational solutions of rank 2 of the Kadomcev — Petviaschvily equation decrease as a function of x, and can be obtained by Darboux transformation method.

Литература

1. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах.—Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 4, с. 753—756. 2. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I. — Функц. анализ и его приложения, 1974, т. 8, № 3, с. 43—53. 3. Кричевер И. М. Алгеброгеометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений. — Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 2, с. 291—294. 4. Новиков С. П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. I. — Функц. анализ и его приложения, 1974, т. 8, № 3, с. 54—66. 5. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. — Успехи мат. наук, 1976, т. 31, № 1, с. 55—136. 6. Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шредингера с конечным числом лакун и многосолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза. — Теор. мат. физ., 1975, т. 23, № 1, с. 51—67. 7. Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. — Успехи мат. наук, 1980, т. 35, № 6, с. 47—68. 8. Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева — Петвиашвили. — Функц. анализ и его приложения, 1978, т. 12, № 4, с. 41—52. 9. Matveev V. B. Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomcev — Petviaschvily equation, Depending on functional parameters. — Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, p. 213—216. 10. Matveev V. B. Some comments on the rational solutions of the Zakharov — Schabat equations. — Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, p. 503—512. 11. Кричевер И. М. О рациональных решениях уравнения Кадомцева — Петвиашвили и системах частиц на прямой. — Функц. анализ и его приложения, 1978, т. 12, № 1, с. 76—78.

Статья поступила в редакцию 15 июня 1983 г.

УДК 539.217.5

Ю. И. Беляков, Н. Б. Логинова, В. В. Михайлов

АДСОРБЦИОННЫЙ РЕЖИМ ВОДОРОДОПРОНИЦАЕМОСТИ

Диффузия по самой своей природе безградиентна и не приводит к спонтанному возникновению направленного потока вещества в среде. Для этого в простейшем случае необходимо наличие градиента концентрации вещества, который может возникнуть только за счет внешних причин. В водородопроницаемости это, например, разные по величине давления молекулярного водорода по обе стороны металлической мембраны.

Однако, как показывает опыт, водородопроницаемость может наблюдаться при определенных условиях и в отсутствие градиента концентрации в толще мембраны. Если мембрана плоская, то для этого необходимы малая толщина мембраны l, малое давление водорода со стороны входа p_2 (на стороне выхода высокий вакуум $p_2 \gg p_1$), определенный интервал температур системы, зависящий, в частности, от природы металла и состояния его поверхности [1]. Безградиентное проникновение водорода сквозь плоские мембраны из Fe, Ni и Cu описано в [2—4]. Теоретические представления о данном режиме развиты в [1]. Безградиентный режим водородопроницаемости в дальнейшем будем называть адсорбционным, хотя в его реализации, как будет видно, важнейшую роль играет десорбция. Однако абсолютная величина потока проникающего водорода в этом режиме определяется исключительно адсорбцией на стороне входа, что в какой-то мере оправдывает такое название.

Диффузионный режим проникновения водорода сквозь металлические мембраны реализуется при больших толщинах мембран и больших давлениях водорода на стороне входа. Это квазиравновесный случай в смысле близости концентраций водорода в приповерхностных слоях металла к равновесным для давлений p_2 (сторона входа) и p_1 (сторона выхода), т. е. наличие направленного потока мало искажает равновесие на сторонах входа и выхода. Поскольку отклонения от равновесия невелики, здесь