УДК 517.946:519.633

М.В. БАБИЧ, А.И. БОБЕНКО, В.Б. МАТВЕЕВ

РЕДУКЦИИ ТЭТА-ФУНКЦИЙ РИМАНА РОДА g К ТЭТА-ФУНКЦИЯМ МЛАДШИХ РОДОВ И СИММЕТРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 17 XII 1982)

1. Редукция общих конечнозонных решений нелинейных уравнений типа Кортевега–де Фриза (КдФ) (теория конечнозонных решений и история их возникновения изложены в обзорах [1–4]) к эллиптическим уходит корнями в математическую проблематику прошлого века, когда, в основном как независимые, изучались три вопроса, связанные с темой данной статьи: интегрирование в эллиптических функциях линейных уравнений типа Ламэ и разных его обобщений; приведение абелевых интегралов первого рода, связанных с алгебраической кривой, к эллиптическим интегралам; выделение условий на матрицу B порядка $g \times g$, определяющую g-мерную тэта-функцию:

$$\theta_g(\mathrm{x}|B) = \sum_{\mathrm{m} \in \mathbf{Z}^g} \exp\{\pi i(B\mathrm{m}, \mathrm{m}) + 2\pi i(\mathrm{x}, \mathrm{m})\}, \tag{1}$$

при которых последняя сводится к θ-функциям низших размерностей, вообще говоря, без предположения о том, что B – матрица b-периодов некоторой римановой поверхности. Наиболее существенные результаты по первому из этих вопросов получены Эрмитом и Пикаром, по второму – Лежандром, Якоби, Эрмитом, Пикаром, Гурса, Кёнигсбергером, Больца, Ковалевской, Пуанкаре и другими, по третьему вопросу наибольший интерес представляют результаты П. Аппеля [5]. Современное исследование этих вопросов, протекающее в русле идей и методов конечнозонного интегрирования, представлено работами [6–9, 12, 13].

В связи с перечисленным кругом вопросов один из авторов (В.Б. Матвеев) привел убедительные примеры, показывающие, что одним из основных объектов, ответственных за соответствующие редукции тэта-функций Римана, является группа G бирациональных автоморфизмов алгебраической кривой: чем "симметричнее" кривая, тем меньше число параметров, от которых она зависит (при фиксированном роде), тем больше приводящих к редукции связей между элементами матрицы B должно существовать. Здесь мы обсудим простые, но важные в анализе уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, редукции, связанные с гиперэллиптическими кривыми малых родов и простейшими тригональными кривыми рода 3.

2. Для всех разобранных нами примеров последний столбец матрицы B, который мы обозначим B_g, удовлетворяет условию $\hat{k}B_g = h$, где $\hat{k}$ – прямоугольная целочисленная матрица порядка $(g-1) \times g$, h – целочисленный вектор. П. Аппель [5] доказал, что при этом условии g-мерная тэта-функция (1) представляется в виде

$$\theta_g(\mathrm{x}|B) = \sum_{\mathrm{t} \in \mathbf{Z}^g(n)} e^{\alpha}\theta_{g-1}(\mathrm{p}|A)\theta_1(\alpha_g|B_{gg}n_g^2). \tag{2}$$

В формуле (2) $\mathbf{Z}^g(n)$ обозначает множество векторов из $\mathbf{Z}^g$, составляющие которых удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant t_\rho \leqslant n_\rho - 1$, $1 \leqslant \rho \leqslant g$. Числа n_ρ находятся из соотношений

$$n_j B_{jg} = q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \nu; \quad n_{\nu+j}B_{\nu+j,g} = n_g B_{gg} + q_{\nu+j}, \tag{3}$$
$$j = 1, 2, \ldots, g - \nu - 1,$$

наименьшим из возможных. θ_{g-1} и θ_1 обозначают тэта-функции вида (1) размерности $g-1$ и 1 соответственно, а величины α, α_ρ, вектор $\mathbf{p}$ и матрица A описываются формулами

$$\alpha = 2\pi i(\mathbf{t},\mathbf{x}) + \pi i(B\mathbf{t},\mathbf{t}),$$

$$\mathbf{p} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu,\alpha_{\nu+1}-\alpha_g,\ldots,\alpha_{g-1}-\alpha_g),$$

$$\alpha_\rho = n_\rho x_\rho + \frac{1}{2}\,\frac{\partial(B\mathbf{t},\mathbf{t})}{\partial t_\rho},\quad \rho = 1,2,\ldots,g,$$

$$A_{ll} = n_l^2 B_{ll},\quad i \leqslant \nu;\quad A_{ll} = n_l^2 B_{ll} - n_g^2 B_{gg},\quad i>\nu;$$

$$A_{lj} = n_l n_j B_{lj},\ \text{если } i \text{ или } j \leqslant \nu;\quad A_{lj} = n_l n_j B_{lj} - n_g^2 B_{gg},\quad i,j>\nu.$$

3. В этом разделе мы покажем, используя лишь соображения симметрии, что матрицы b-периодов некоторых семейств гиперэллиптических кривых удовлетворяют условию Аппеля. Более того, мы выбираем эти кривые так, что теорему Аппеля можно применять многократно – вплоть до расщепления g-мерной тэта-функции Римана в конечную сумму произведений из g одномерных тэта-функций. Примеры этого пункта соответствуют, в частности, выделению физических интересных периодических и условно периодических решений цепочки Тода, нелинейного уравнения Шредингера, уравнения анизотропного XXZ ферромагнетика Гейзенберга, уравнений КдФ, МКдФ и ряда других. Соответствующие приложения мы обсудим в отдельной работе. Отметим здесь лишь следующий важный факт: зависимость от пространственных и временных переменных в аргументах соответствующих одномерных тэта-функций, возникших в результате расщепления конечнозонных решений, оказывается линейной.

а) Рассмотрим кривую $\omega^2 = P_3(z^2)$, где P_3 – невырожденный полином 3-й степени. Род $g=2$. Выберем канонический базис циклов a_1, a_2, b_1, b_2 так, чтобы при автоморфизме $z \to -z$ циклы трансформировались следующим образом:

$$(4)\qquad a_1 = a_1',\ a_2 = -a_1' - a_2',\quad b_1 = -b_2' + b_1',\quad b_2 = -b_2'.$$

Пусть абелевы интегралы первого рода $I_1(z)$, $I_2(z)$ нормированы в базисе a_l, b_l и матрица их b-периодов равна B. Ясно, что интегралы $I_1'(z) = I_1(-z)$, $I_2'(z) = I_2(-z)$ нормированы в базисе a_l', b_l' с той же матрицей b-периодов. Пользуясь соотношением (4), легко получить периоды I_1' и I_2' в первоначальном базисе (их матрица a-периодов отлична от единичной); наконец, нормируя I_1' и I_2', получим матрицу b-периодов, которая должна совпадать с исходной матрицей B. Это совпадение и приводит к нужному условию "специальности" матрицы B:

$$(5)\qquad B = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{pmatrix},$$

автоматически попадающей под действие теоремы Аппеля. Тэта-функция Римана (1) представляется по формуле (2) в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых – произведение одномерных θ-функций с периодами 2α и $4\beta - 2\alpha$. Указанная кривая, конечно, не единственная кривая рода 2 с такой структурой матрицы B. Определяющей является замена (4) базиса циклов при автоморфизме, имеющая место, например, для кривой рода 2, допускающей автоморфизм $z \to sz^{-1}$. Соответствующий пример кривой вида $\omega^2 = P_5(z)$ в связи с обобщением анзатца Лэмба для уравнения sine-Гордон впервые рассмотрен Е.Д. Белоколосом и В.З. Энольским [6–8]. Чтобы привести их результаты в соответствие с нашими, достаточно заметить, что матрицы b-периодов B_1 и B_2,

$$(6)\qquad B_1 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{pmatrix},\qquad B_2 = \begin{pmatrix} \beta & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & \beta \end{pmatrix},$$

эквивалентны, т.е. отличаются только выбором канонического базиса кривой. Поэтому случай $B_{11} = B_{22}$, рассмотренный в [6–8] (см. также [15]), по сути дела также попадает под действие теоремы Аппеля.

б) Кривая $\omega^2 = P_2(z^3)$. Накрывающая группа циклическая. Род $g=2$. Выберем канонический базис так, чтобы действие автоморфизма $z \to ze^{2\pi i/3}$ на базисные циклы имело вид

$$b_1 = b_2' - b_1',\quad b_2 = -b_2',\quad a_1 = a_2',\quad a_2 = -a_1' - a_2'.$$

Матрица B имеет при этом вид (5) с $\beta = 2\alpha$.

в) Кривая $\omega^2 = zP_2(z^2)$. Род $g=2$. При автоморфизме $z \to -z$ базисные циклы преобразуются по правилу

$$a_1 = -b_2',\quad a_2 = -b_1' + b_2',\quad b_1 = a_2' + a_1',\quad b_2 = a_1'.$$

Матрица B имеет вид (5) с $\beta = (\alpha^2 - 1)/2\alpha$. Этот пример – частный случай двухзонной кривой Ламэ. Общий случай двухзонной кривой Ламэ и сопоставление соответствующих результатов с формулами Дубровина и Новикова [12] для динамики двухзонного потенциала Ламэ разобраны в самое последнее время В.З. Энольским, который существенно использовал приведение соответствующих абелевых интегралов к эллиптическим при помощи подстановок Эрмита (личное сообщение на конференции "Квантовые солитоны" в октябре 1982 г.)

г) Кривая $\omega^2 = (z^4 - (a^2 + s^2a^{-2})z^2 + s^2)(z^4 - (b^2 + s^2b^{-2})z^2 + s^2)$. Род $g=3$. Накрывающая группа – диэдральная группа автоморфизмов с образующими $z \to -z$, $z \to sz^{-1}$. Канонический базис выбран так, чтобы при отображении $z \to -z$, $a_i \to a_i'$, $b_i \to b_i'$:

$$b_1 = b_2' - b_3',\quad b_2 = b_1' - b_3',\quad b_3 = -b_3',$$

$$a_1 = a_2',\quad a_2 = a_1',\quad a_3 = -a_1' - a_2' - a_3',$$

а при отображении $z \to sz^{-1}$, $a_l \to a_l''$, $b_l \to b_l''$:

$$b_1 = b_2'',\quad b_2 = b_1'',\quad b_3 = b_3'',\quad a_1 = a_2'',\quad a_2 = a_1'',\quad a_3 = a_3''.$$

Матрица B при этом имеет вид

$$(7)\qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & 2\beta \end{pmatrix}.$$

д) Кривая $\omega^2 = P_2(z^4)$. Накрывающая группа – циклическая группа с одной образующей $z \to iz$ порядка 4. Матрица B в подходящем базисе имеет вид (7) с $\gamma = \alpha - \beta$. В примерах г) и д), применяя дважды теорему Аппеля, убеждаемся, что исходная θ-функция редуцируется до одномерных (при этом необходимо учесть эквивалентность B-матриц п. а) при вторичном использовании теоремы Аппеля).

е) Кривая $\omega^2 = (z^4 - (a^2 + a^{-2})z^2 + 1)\left(z^4 - 2\,\dfrac{a^4 - 6a^2 + 1}{(a^2+1)^2} + 1\right) \times$

$\times \left(z^4 + 2\,\dfrac{a^4 + 6a^2 + 1}{(a^2-1)^2}\,z^2 + 1\right)$. Род $g=5$. Накрывающая группа неабелева и совпадает с группой тетраэдра. Ее образующие $z \to T(z) = (i - z)/(i + z)$ и $z \to U(z) =$

каноническом базисе матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & 2\beta & -4\beta \\ \beta & \alpha & \beta & -4\beta & 2\beta \\ \beta & \beta & \alpha & 2\beta & 2\beta \\ 2\beta & -4\beta & 2\beta & -8\beta & 4\beta \\ -4\beta & 2\beta & 2\beta & 4\beta & -8\beta \end{pmatrix}.$$

Четырехкратное применение теоремы Аппеля позволяет представить исходную θ-функцию в виде суммы 64 слагаемых, каждое из которых (с точностью до экспоненциального множителя) – произведение одномерных тэта-функций с периодами -8β, $4\alpha + 8\beta$, -24β, $16\alpha + 32\beta$, $16\alpha + 32\beta$.

4. Негиперэллиптические кривые. Для тригональных кривых рода 3 $x^4 + y^4 = 1$ и $y^3 + xy + x^3y = 0$ (кривая Клейна) матрицы периодов абелевых интегралов первого рода приведены в книге [10], а для кривой Клейна – и в работе Пуанкаре [11]. Пользуясь результатами Бейкера ([10], стр. 260), легко показать, что в указанном им каноническом базисе кривой $x^4 + y^4 = 1$ матрица B имеет вид

$$B = \frac{1}{2-3i}\begin{pmatrix} 2+2i & -2 & 2i-1 \\ -2 & 2+2i & 1-i \\ 2i-1 & 1-i & 2-i \end{pmatrix}.$$

К такой матрице нельзя непосредственно применить теорему Аппеля, однако в другом базисе, получаемом из исходного заменой $a_1' = a_3$, $a_2' = a_2 - a_1$, $a_3' = a_1$, $b_1' = b_3$, $b_2' = b_2$, $b_3' = b_1 + b_2$, матрица B уже имеет нужную структуру:

$$B = \frac{1}{2-3i}\begin{pmatrix} 2-i & 1-i & i \\ 1-i & 2+2i & 2i \\ i & 2i & 4i \end{pmatrix},$$

из которой ясно, что и здесь исходная θ-функция редуцируется до одномерных.

Кривая Клейна заменой $x = -s$, $y = s^2(1-t)^{-1}$ преобразуется к виду $s^7 = t(1-t)^2$ – семилистного накрытия плоскости с точками ветвления 0, 1, ∞ и разрезами $[0, 1]$, $[1, \infty]$. Выберем базис циклов Ω_h, $h = 1, 2, \ldots, 6$, такой, что цикл Ω_h h раз обходит точку 0 и $3h$ раз точку 1 в положительном направлении. Матрица периодов в этом базисе приведена в [10]. Канонический базис может быть получен по формулам:

$$a_1 = \Omega_5 - \Omega_6, \quad a_2 = \Omega_6, \quad a_3 = \Omega_3 - \Omega_1 - \Omega_5 + \Omega_6,$$
$$b_1 = \Omega_6 - \Omega_1 - \Omega_5, \quad b_2 = \Omega_6 - \Omega_4, \quad b_3 = \Omega_4 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_1 - \Omega_5.$$

В этом базисе

$$B = \frac{1}{\tau+1}\begin{pmatrix} \tau-2 & -1 & \tau \\ -1 & 2\tau-1 & -\tau \\ \tau & -\tau & 3\tau \end{pmatrix}, \quad \tau = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{7}).$$

Исходная θ-функция, очевидно, опять редуцируется до одномерных.

5. Из-за недостатка места мы не имеем возможности привести рисунки соответствующих римановых поверхностей с разрезами и указанием канонических базисов. Они будут приведены в более подробной публикации. Наши результаты ... рования (см. по этому поводу также работы [8, 9, 14]) и решению задачи о выделении во множестве всех матриц Римана матриц b-периодов алгебраических кривых. Формулируя теорему Аппеля, мы игнорировали тот факт, что в условиях теоремы числа n_p могут, вообще говоря, оказаться отрицательными. Соответствующие уточнения, а также различные обобщения можно найти в [5].

В заключение нам приятно поблагодарить Е.Д. Белоколоса и В.З. Энольского, обсуждение с которыми затронутого здесь круга вопросов и разбор работ [6, 8] существенно стимулировали написание этой статьи.

Ленинградский государственный университет
им. А.А. Жданова

Поступило
4 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П.* – УМН, 1976, т. 31, № 1, с. 55–136. 2. *Кричевер И.М.* – УМН, 1977, т. 32, № 6, с. 183–208. 3. *Дубровин Б.А.* – УМН, 1982, т. 36, № 2, с. 11–80. 4. *Matveev V.B.* Abelian functions and solitons, Preprint № 373. Univ. of Wroclaw, 1976, p. 1–98. 5. *Appel P.* – Bull. Soc. Math. France, 1882, vol. 10, p. 59–66. 6. *Belokolos E.D., Enolskii V.Z.* Preprint ITP–81–121 E, 1981, p. 1–58. 7. *Белоколос Е.Д., Энольский В.З.* – ТМФ, 1982, т. 53, 2, с. 271–282. 8. *Belokolos E.D., Enolskii V.Z.* Preprint ITP–82–36E, 1982, p. 1–18. 9. *Zagrodziński J.* – J. Phys. A: Math. and Gen., 1982, vol. 15, p. 3109–3118. 10. *Baker H.* Multiply periodic functions. Cambridge, 1907. 11. *Poincaré H.* – J. math., 1903, 5 ser., vol. 9, p. 139–212. 12. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* – ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 12, с. 2131–2143. 13. *Кричевер И.М.* – Функц. анализ, 1980, т. 14, № 4, с. 45–54. 14. *Hirota R., Ito Masaaki* – J. Phys. Soc. Japan, 1981, vol. 50, № 1, p. 338–342. 15. *Дубровин Б.А., Натанзон С.М.* – Функц. анализ и его прилож., 1982, т. 16, № 1, с. 40.

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

В.Ю. БЕНТКУС

АСИМПТОТИКА МОМЕНТОВ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 21 XII 1982)

Пусть B – сепарабельное банахово пространство с нормой $|\cdot|$, $X \in B$ – случайный элемент, далее всюду фиксированный, $\mathrm{E}X = 0$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые копии X, $S_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/\sqrt{n}$, $Y \in B$ – гауссовский случайный элемент с нулевым средним и ковариацией элемента X, $\Delta_n(q) = E|S_n|^q - E|Y|^q$. В работе рассматривается вопрос о скорости убывания к нулю при $n \to \infty$ величины $\Delta_n(q)$.

Будем говорить, что норма $\theta(x) = |x|$ банахова пространства B принадлежит к классу C^m, $m = 1, 2, \ldots$, если в области $B \setminus \{0\}$ функция θ непрерывно дифференцируема в смысле Фреше m раз и существуют конечные постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_m$ такие, что

$$\|\theta^{(i)}(x)\| \leqslant c_i |x|^{1-i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

(через $\theta^{(i)}(x)$ мы обозначаем производную функции θ в точке x, через $\|\theta^{(i)}(x)\|$ – норму полилинейной формы $\theta^{(i)}(x)$).

Теорема 1. *Пусть $2 \leqslant p \leqslant 4$, $0 < q \leqslant p$, $\mathrm{E}|X|^p < \infty$, норма банахова прост-*