Таким образом, видно, что ограничение области определения уравнения эволюции в дифференциальной форме снизу условием (20), а также ограничение на допустимые значения пересыщения согласно или (5), (6) или (15), (16), или (17), (18) обусловлены требованием как к точности коэффициентов уравнения, так и к гладкости искомого решения.

Summary

Small parameters of macroscopic theory of homogeneous condensation are determined and the conditions of the validity of the theory are established. The error of the macroscopic expression for stationary rate of nucleation is determined.

Литература

1. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М., 1979. 567 с. 2. Зельдович Я. Б. Теория образования новой фазы. Кавитация. — Журн. экспер. и теор. физ., 1942, т. 12, № 11—12, с. 525—534. 3. Turnball D., Fisher J. C. Rate of nucleation in condenced systems. — J. Chem. Phys., 1949, vol. 17, N 1, p. 71—80.

Статья поступила в редакцию 4 мая 1982 г.

УДК 517.946+519.46

А. И. Бобенко

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ И КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Введение. В 1882 г. Дарбу [1] доказал следующую теорему.

Пусть $f(x, \lambda)$, $\varphi(x, \lambda_1)$ — решения уравнения Шредингера

$$-f_{xx} + qf = \lambda f. \tag{1}$$

Преобразование D_φ: $f \to \psi = f_x - \sigma f$, $\sigma = \varphi_x \varphi^{-1}$, $q \to \tilde{q} = q - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \varphi$

сохраняет уравнение Шредингера, т. е. функция ψ удовлетворяет уравнению

$$-\psi_{xx} + \tilde{q}\psi = \lambda\psi.$$

С помощью теоремы Дарбу сразу можно получить бесконечную серию интегрируемых уравнений Шредингера, которые строятся по затравочной задаче (1).

Важным обстоятельством является то, что итерации преобразований Дарбу описываются компактными детерминантными формулами, открытыми Крамом [2]. Теорема Крама состоит в следующем. Пусть $\varphi_1(x, \lambda_1), \ldots, \varphi_N(x, \lambda_N)$, $f(x, \lambda)$ — решения уравнения Шредингера, различающиеся значениями спектрального параметра. Функция

$$\psi^{[N]}(x, \lambda) = \frac{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_N, f)}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)},$$

где $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ — определитель Вронского, удовлетворяет уравнению Шредингера

$$-\psi^{[N]}_{xx} + q^{[N]}\psi^{[N]} = \lambda\psi^{[N]}, \quad q^{[N]} = q - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln W(\varphi_1, \ldots, \varphi_N). \tag{2}$$

В работе Вальквиста [3] было показано, что если рассмотреть в качестве потенциала в (1) решение уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ)

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx},$$

а функции $\varphi_i(x, \lambda_i, t)$, $f(x, \lambda, t)$ подчинить эволюционным уравнениям

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af, \quad A = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3\left(q\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}q\right), \tag{3}$$

то формула (2) будет определять новое решение уравнения КдФ.

Простое объяснение этого факта (оригинальный вывод, приведенный Вальквистом, был довольно сложным) дано В. Б. Матвеевым и состоит в том, что уравнения вида (3) также инвариантны относительно преобразования Дарбу. При этом законы преобразования коэффициентов в (1) и (3) согласованы. Учитывая, что уравнение КдФ есть условие совместности уравнения (1) и (3), приходим к результату Вальквиста.

Более того, как показано в работе [4], свойством Дарбу-инвариантности обладают все уравнения вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=0}^{N} u_n(x, t)\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \equiv Lf$$

с матричными или операторными коэффициентами $u_n(x, t)$. Условие совместности пары эволюционных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Lf, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Af, \quad A = \sum_{m=0}^{M} v_m(x, t)\frac{\partial^m}{\partial x^m}$$

порождает нелинейное уравнение Захарова — Шабата, для которых таким образом получается богатый класс явных решений. В скалярном случае для решений всегда справедливы формулы типа формул Крама.

В. Б. Матвеевым [5] были введены разностные аналоги преобразований Дарбу для уравнений

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} = \sum_{n=0}^{N} b_m(n, t) f_{n+m}(t)$$

с матричными коэффициентами и для скалярного случая доказаны формулы, аналогичные формулам Крама для дифференциальных операторов. Приложение этих результатов к интегрированию одномерной и двумерной цепочек Тода содержится в [6, 7].

В дальнейшем техника преобразований Дарбу была применена В. Б. Матвеевым и М. А. Саллем к уравнению синус-Гордон, его нелокальным аналогам и нелокальным аналогам уравнений КдФ и Кадомцева — Петвиашвили [8].

Цель настоящей работы — обобщение результата Флашки и Мак-Лафлина [9], которые установили, что «классическое преобразование Дарбу» является каноническим преобразованием относительно известной симплектической структуры, связанной с уравнением КдФ [10]. Мы покажем, что для обобщенных преобразований Дарбу, введенных в [5] и связанных с другими симплектическими структурами [11], свойство каноничности сохраняется.

Кроме того, мы построим преобразование Дарбу для нелинейного уравнения Шредингера, которое ранее не было известно, и докажем, что оно является каноническим относительно известной симплектической структуры, связанной с нелинейным уравнением Шредингера [10].

Цепочка Тода. Приведем основные сведения о преобразовании Дарбу для одномерной бесконечной цепочки Тода, следуя работам [5, 6].

Уравнение цепочки Тода

$$\ddot{q}_n = \exp(q_{n-1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n+1}), \quad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{4}$$

в новых переменных $p_n = \dot{q}_n$, $u_n = \exp(q_n - q_{n+1})$ можно записать следующим образом:

$$\dot{p}_n = u_{n-1} - u_n, \quad \dot{u}_n = u_n(p_n - p_{n+1}). \tag{5}$$

Система (5) является условием совместности системы линейных уравнений

$$\dot{f}_n = p_n f_n + f_{n-1}, \qquad (6')$$

$$p_n f_n + u_n f_{n+1} + f_{n-1} = \lambda f_n. \qquad (6'')$$

Если $\varphi_n(\lambda_0)$ — некоторое фиксированное решение этой системы, отвечающее $\lambda = \lambda_0$, p_n, u_n, то формулы

$$\psi_n = f_n - \sigma_n f_{n+1}, \quad \tilde{u}_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}} u_{n+1}, \qquad (7)$$

$$\tilde{p}_n = p_n - \dot{\sigma}_n + \sigma_{n-1} = p_{n+1} + \frac{d}{dt} \ln \sigma_n, \quad \sigma_n = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}$$

определяют новое решение уравнений (6), а следовательно, и уравнений (4), (5).

В работе [6] показано, что итерации преобразования Дарбу приводят к следующему выражению для многосолитонных решений на произвольном фоне:

$$p_n^{[m]} = p_{n+m} + \frac{d}{dt} \ln \frac{\Delta_m(n)}{\Delta_m(n+1)}, \quad \Delta_m(n) = \det A,$$

$$u_n^{[m]} = \frac{\Delta_m(n)\, \Delta_m(n+2)}{\Delta_m^2(n+1)} u_{n+m}, \quad A_{ik} = \varphi_{n+k-1}(\lambda_i, t), \; i, k = 1, 2, \ldots, m.$$

Теорема 1. *Преобразование Дарбу* (7) (*где* $\varphi_n(\lambda_0)$ — *некоторое фиксированное решение* (6'')) *является каноническим по отношению к скобке Пуассона:*

$$\{F, G\} = \sum_n \left(\frac{\partial F}{\partial q_n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q_n} \right).$$

Доказательство. Представим преобразование Дарбу (7) в удобном для нас виде

$$Q_n = q_{n+1} + \ln \sigma_n, \quad P_n = p_n - \sigma_n + \sigma_{n-1}. \qquad (8)$$

Технически удобнее проверять инвариантность относительно преобразования Дарбу (8) не скобки Пуассона, а соответствующей 2-формы, порождающей симплектическую структуру.

Вариации δq_n, δp_n согласно формуле (6'') порождают сначала вариацию $\delta\sigma_n$, а затем δQ_n, δP_n, которые находятся из (8). В канонических координатах q_n, p_n симплектическая форма имеет вид $\Omega = \sum_n dq_n \wedge dp_n$. Поэтому для доказательства каноничности преобразования Дарбу достаточно проверить соотношение

$$\Omega = \Omega(\delta_1 q, \delta_1 p; \delta_2 q, \delta_2 p) = \sum_n (\delta_1 q_n \delta_2 p_n - \delta_2 q_n \delta_1 p_n) =$$

$$= \Omega(\delta_1 Q, \delta_1 P; \delta_2 Q, \delta_2 P) = \tilde{\Omega}.$$

Выполним необходимые преобразования:

$$\tilde{\Omega} = \sum_n (\delta_1 (q_{n+1} + \ln \delta_n) \delta_2 (p_n - \sigma_n + \sigma_{n-1}) - \delta_2 (q_{n+1} + \ln \sigma_n) \delta_1 (p_n - \sigma_n + \sigma_{n-1})).$$

Из (6'') легко получить равенство

$$\delta(q_{n+1} + \ln \sigma_n) = \delta q_n - \delta \ln(\lambda_0 - \sigma_{n-1} - p_n). \qquad (9)$$

Из него вытекает следующее представление для $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{\Omega} = \sum_n (\delta_1 (q_n - \ln(\lambda_0 - \sigma_{n-1} - p_n)) \delta_2 (p_n - \sigma_n + \sigma_{n-1}) -$$

$$- \delta_2 (q_n - \ln(\lambda_0 - \sigma_{n-1} - p_n)) \delta_1 (p_n - \sigma_n + \sigma_{n-1})) = \Omega +$$

$$+\sum_n\left(-\delta_1 \ln(\lambda_0-\sigma_{n-1}-p_n)\,\delta_2(p_n+\sigma_{n-1}-\sigma_n)+\delta_1 q_n\,\delta_2(\sigma_{n-1}-\sigma_n)+\right.$$
$$\left.+\delta_2 \ln(\lambda_0-\sigma_{n-1}-p_n)\,\delta_1(p_n+\sigma_{n-1}-\sigma_n)-\delta_2 q_n\,\delta_1(\sigma_{n-1}-\sigma_n)\right).$$

Пользуясь соотношением $\delta(p_n+\sigma_{n-1})=-(\lambda_0-\sigma_{n-1}-p_n)\,\delta \ln(\lambda_0-\sigma_{n-1}-p_n)$, преобразуем $\widetilde{\Omega}$ к виду

$$\widetilde{\Omega}=\Omega+\sum_n\left(\delta_1 \ln(\lambda_0-\sigma_{n-1}-p_n)\,\delta_2\sigma_n+\delta_1 q_n\delta_2(\sigma_{n-1}-\sigma_n)-\delta_2 \ln(\lambda_0-\right.$$
$$\left.-\delta_{n-1}-p_n)\,\delta_1\sigma_n-\delta_2 q_n\delta_1(\sigma_{n-1}-\sigma_n)\right).$$

Учтя еще раз тождество (9), получим

$$\widetilde{\Omega}=\Omega,$$

что и требовалось доказать.

Легко показать, что производящая функция свободного канонического преобразования Дарбу для цепочки Тода задается равенством

$$F_1(Q,q)=\sum_n\left(\exp(Q_n-q_{n+1})-\exp(q_n-Q_n)+\lambda_0(q_n-Q_n)\right).$$

Уравнение синус-гордон. М. А. Салль получил преобразование Дарбу для уравнения синус-Гордон. Уравнение

$$s_{xt}=-4\sin s \tag{10}$$

является условием совместности системы

$$\Psi_x=\begin{pmatrix} v & \lambda \\ \lambda & -v\end{pmatrix}\Psi,\quad \Psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},$$

$$\Psi_t=\begin{pmatrix} 0 & \frac{w}{\lambda} \\ \frac{1}{w\lambda} & 0\end{pmatrix}\Psi,\quad v=\frac{i}{2}s_x,\quad w=-e^{is}. \tag{11}$$

Пусть $\Phi_0=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ — фиксированное решение (11), отвечающее определенным v, w, λ_0. Тогда система (11) (а следовательно, и уравнение (10)) инвариантна относительно преобразования Дарбу:

$$\widetilde{\psi}_1=\lambda\psi_2-\lambda_0\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\psi_1,\ \widetilde{\psi}_2=\lambda\psi_1-\lambda_0\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\psi_2,\ \widetilde{v}=-v+\lambda_0\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right),\ \widetilde{w}=w\frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2}.$$

Для того чтобы убедиться в каноничности такого преобразования, сделаем сначала замену переменных:

$$\xi=2(t-x),\ \tau=2(t+x).$$

В этих переменных (после переобозначения $s\to q$) уравнение (10) принимает вид

$$q_{\tau\tau}-q_{\xi\xi}+\sin q=0, \tag{12}$$

а система (11) преобразуется к системе

$$\Psi_\xi=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} i(q_\xi-p) & \frac{w}{\lambda}-\lambda \\ \frac{1}{w\lambda}-\lambda & i(p-q_\xi)\end{pmatrix}\Psi, \tag{13'}$$

$$\Psi_\tau=V\Psi,\ p=q_\tau,\ w=-e^{iq}. \tag{13''}$$

Оператор V не потребуется и приводить его не будем.

Теорема 2. *Преобразование Дарбу*

$$q \to Q = q - 2i \ln f,$$

$$p \to P = P + 2i \frac{d}{d\xi} \ln f + \frac{i}{\lambda_0}\left(fw - \frac{1}{fw}\right) \tag{14}$$

$\left(f = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right.$, *где* $\Phi_0 = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}$*—решение* $\left.(13')\right)$ *является каноническим относительно формы*

$$\Omega(\delta_1 q, \delta_1 p; \delta_2 q, \delta_2 p) = \int\limits_\Delta d\xi\, (\delta_1 q\, \delta_2 p - \delta_1 p \delta_2 q)$$

как в случае быстроубывающих p *и* q $(\Delta = (-\infty, \infty))$, *так и в случае периодических* p *и* q $(\Delta = [0, 1])$.

Доказательство. Из $(13')$ легко получить уравнение для f:

$$4 \frac{d}{d\xi} \ln f = 2i(p - q_\xi) + \lambda_0\left(f - \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{wf} - fw\right). \tag{15}$$

Требуется доказать, что

$$\Omega_{q,p} = \Omega(\delta_1 q, \delta_1 p; \delta_2 q, \delta_2 p) = \Omega(\delta_1 Q, \delta_1 P; \delta_2 Q, \delta_2 P) = \Omega_{Q,P}.$$

Проведем необходимые для этого преобразования:

$$\Omega_{Q,P} = \int\limits_\Delta d\xi \left[\delta_1 (q - 2i \ln f)\, \delta_2\left(p + 2i \frac{d}{d\xi} \ln f + \frac{i}{\lambda_0}\left(fw - \frac{1}{fw}\right)\right) -\right.$$

$$\left.- \delta_2 (q - 2i \ln f)\, \delta_1 \left(p + 2i \frac{d}{d\xi} \ln f + \frac{i}{\lambda_0}\left(fw - \frac{1}{fw}\right)\right)\right] =$$

$$= \Omega_{q,p} + \int\limits_\Delta d\xi \left[2i\left(\delta_2\left(\frac{d}{d\xi}\ln f\right)\delta_1 q - \delta_1\left(\frac{d}{d\xi}\ln f\right)\delta_2 q\right) + 4\delta_1 \ln f\, \delta_2\left(\frac{d}{d\xi}\ln f\right) -\right.$$

$$- 2i\delta_1 \ln f\, \delta_2 p - 4\delta_2 \ln f\, \delta_1\left(\frac{d}{d\xi}\ln f\right) + 2i\delta_2 \ln f\, \delta_1 p +$$

$$\left.+ \frac{i}{\lambda_0}\left(\delta_2\left(fw - \frac{1}{fw}\right)\delta_1 (q - 2i \ln f) - \delta_1\left(fw - \frac{1}{wf}\right)\delta_2 (q - 2i \ln f)\right)\right].$$

Интегрируя по частям первые два члена подынтегрального выражения, пользуясь (15) и тем, что $\delta\left(fw - \frac{1}{fw}\right) = \left(fw + \frac{1}{fw}\right)(\delta \ln f + i\delta q)$, после несложных преобразований получаем

$$\Omega_{Q,P} = \Omega_{q,p} + (\delta_1 q \delta_2 \ln f - \delta_2 q \delta_1 \ln f)\,|_\Delta. \tag{16}$$

Для периодических p и q, в силу формулы (14), $\ln f$ также есть периодическая функция, поэтому из равенства (16) следует

$$\Omega_{Q,P} = \Omega_{q,p}.$$

Аналогичное утверждение легко получить из (16) и для быстроубывающих q и p.

Нелинейное уравнение Шредингера. Получим преобразование Дарбу для нелинейного уравнения Шредингера

$$ip_t = -p_{xx} + 2\varkappa |p|^2 p. \tag{17}$$

Во вспомогательной линейной задаче

$$\frac{d}{dx}\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda}{2} & i\varkappa \bar{p}(x) \\ -ip(x) & i\frac{\lambda}{2}\end{pmatrix}\Psi(\lambda) \tag{18}$$

чая доказана. Для быстроубывающего случая доказательство выглядит аналогично.

Автор выражает благодарность В. Б. Матвееву за постановку задачи и помощь в работе и А. Р. Итсу за полезные обсуждения.

Summary

Darboux transformation for nonlinear Schrödinger equation is suggested. Hamiltonian interpretation of general Darboux transformations connected with sine-Gordon equation, Toda lattice and nonlinear Schrödinger equation as canonical transformations is obtained.

Литература

1. Darboüx G. Sur une proposition relative aux équation linéaires. — C. R. Acad. sci., 1882, vol. 94, p. 1456—1459. 2. Crum M. M. Associated Sturm — Liouville systems. — Quaterly J. Math., vol. 6, N 22, p. 121—128. 3. Wahlquist H. Bachlund transformations and inverse scattering method. — Lect. Notes in Math., 1974, vol. 515, p. 103—145. 4. Matveev V. B. Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomcev — Petviaschvily equation, depending on functional parameters. — Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, p. 213—216. 5. Matveev V. B. Darboux transformation and the explicit solutions of differential — difference and difference — difference evolution equations. I. — Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, p. 217—222. 6. Matveev V. B., Salle M. A. Differential — difference evolution equations. II (Darboux transformation for the Toda lattice). — Lett. Math. Phys., 1979, vol. 3, p. 425—429. 7. Матвеев В. Б., Салль М. А. Преобразование Дарбу и двумеризованная цепочка Тода. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1981, т. 101, с. 111—118. 8. Матвеев В. Б., Салль М. А. Нелокальные аналоги уравнений КдФ и Кадомцева — Петвиашвили. I. — Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 3, с. 533—537. 9. Flaschka H., McLaughlin D. W. Some comments on Backlünd transformations, canonical transformations, and the inverse scattering method. — Lect. Notes in Math., 1974, vol. 515, p. 253—295. 10. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система. — Функциональный анализ и его приложения, 1971, т. 5, № 4, с. 18—27. 11. Теория солитонов / Под ред. С. П. Новикова. М., 1980. 300 с. 12. Склянин Е. К. Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, т. 95, с. 55—128.

Статья поступила в редакцию 15 декабря 1981 г.

УДК 535.341+539.186.3

Г. В. Жувикин, Л. Н. Шабанова

АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СЕЧЕНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ В КРЫЛЬЯХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Введение. Известно, что изучение контуров спектральных линий, обусловленных столкновениями оптически активных атомов с окружающими их частицами, позволяет получать информацию о сечениях процессов уширения и потенциалах взаимодействия атомов. Точность информации, извлекаемой из контура возмущенной спектральной линии, определяется точностью его аналитического описания, соответствием условий эксперимента предпосылкам теории и чистотой самого эксперимента. В приближении бинарности взаимодействия атомов контур в центре линии описывается ударной теорией, а в далеких крыльях — квазистатической теорией уширения спектральных линий [1].

Анализ экспериментальных работ, выполненных в последние годы по уширению контуров спектральных линий атомов металлов, показывает, что существенное влияние на точность получаемых результатов оказывает определение концентрации атомов металлов в основном состоянии. Чаще всего концентрацию атомов находят с помощью уравнения давления насыщенных паров. Однако точность, с которой эти уравнения константу связи введем несимметрично, чтобы одновременно рассмотреть случаи отталкивания ($\varkappa > 0$) и притяжения ($\varkappa < 0$). В силу известных редукций $\Psi(\lambda)$ имеет вид [12]

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} \psi(\lambda) & \varkappa\overline{\varphi(\bar\lambda)} \\ \varphi(\lambda) & \overline{\psi(\bar\lambda)} \end{pmatrix}.$$

Для дальнейшего будет удобно перейти к функции

$$\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \psi(\lambda) & \varkappa\overline{\varphi(\lambda)} \\ \varphi(\lambda) & \overline{\psi(\lambda)} \end{pmatrix}.$$

Перепишем уравнение (18) в терминах функции $\Phi(\lambda)$:

$$\frac{d}{dx}\Phi(\lambda) = U\Phi(\lambda) + J\Phi(\lambda)\hat\lambda, \tag{19}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & i\varkappa\bar p \\ -ip & 0 \end{pmatrix}, \quad J = -i\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \hat\lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar\lambda \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Phi(\lambda_0)$ — фиксированное решение (19). Определим преобразование Дарбу формулой

$$\tilde\Phi(\lambda) = -\Phi(\lambda_0)\hat\lambda_0\Phi^{-1}(\lambda_0)\Phi(\lambda) + \Phi(\lambda)\hat\lambda,$$
$$\tilde U = U + [J, \ \Phi(\lambda_0)\hat\lambda_0\Phi^{-1}(\lambda_0)]. \tag{20}$$

Теорема 3. *Уравнение* (19) *инвариантно относительно преобразования Дарбу* (20), *т. е.* $\tilde\Phi(\lambda)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d}{dx}\tilde\Phi(\lambda) = \tilde U\tilde\Phi(\lambda) + J\tilde\Phi(\lambda)\hat\lambda.$$

Доказательство теоремы проводится прямым вычислением.

Небезынтересно заметить, что преобразование Дарбу (20) может быть записано в другом виде. Используя уравнение (19), получаем

$$\tilde\Phi(\lambda) = -J(\Phi_x(\lambda) - \Phi_x(\lambda_0)\Phi^{-1}(\lambda_0)\Phi(\lambda)),$$
$$\tilde U = -U + [J\Phi_x(\lambda_0)\Phi^{-1}(\lambda_0), \ J], \tag{21}$$

где $\Phi_x = \frac{d}{dx}\Phi$. В форме (21) преобразование Дарбу нелинейного уравнения Шредингера напоминает преобразование Дарбу для уравнений КдФ, Кадомцева — Петвиашвили, цепочки Тода и др.

Можно показать, что преобразование Дарбу (20), (21) коммутирует с потоком по времени, задаваемым V — оператором для нелинейного уравнения Шредингера. Поэтому возникает возможность по одним решениям (17) строить другие. Из конкретного вида (20), (21), очевидно, что преобразование нетривиально, только если $\mathrm{Im}\lambda_0 \neq 0$. Если взять нулевое затравочное решение $U=0$, то в результате преобразования Дарбу получим ($\varkappa < 0$) солитон уравнения (17). Проведя n-кратную итерацию (20), (21) с затравочными решениями $\Phi(\lambda_1), \ldots, \Phi(\lambda_n)$ аналогично [4—7], найдем n-солитонное решение (9).*)

Теорема 4. *Преобразование Дарбу* (20), (21) *для уравнения* (17) *является каноническим относительно формы*

$$\Omega(\delta_1 p, \delta_2 p) = \int_\Delta dx\,(\delta_1 p(x)\,\overline{\delta_2 p(x)} - \delta_2 p(x)\,\overline{\delta_1 p(x)})$$

---

*) Как сообщил автору М. А. Салль, им на этом пути получены компактные формулы типа Крама для n-солитонных решений на произвольном фоне.

как в быстроубывающем ($\Delta = (-\infty, \infty)$), *так и в периодическом* ($\Delta=[0, 1]$) *случае.*

Доказательство. Заметим, что

$$\Omega(\delta_1 p, \delta_2 p) = -i\varkappa \int\limits_{\Delta} dx \,\mathrm{Sp}\,(J\delta_1 U \delta_2 U).$$

Значит, для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$\int\limits_{\Delta} dx \,\mathrm{Sp}(J\delta_1 \tilde{U} \delta_2 \tilde{U}) = \int\limits_{\Delta} dx \,\mathrm{Sp}\,(J\delta_1 U \delta_2 U).$$

Используя определение преобразования Дарбу (20), легко получить

$$\int\limits_{\Delta} dx \,\mathrm{Sp}(J\delta_1 \tilde{U} \delta_2 \tilde{U}) = \int\limits_{\Delta} dx \,\mathrm{Sp}\,(J\delta_1 U \delta_2 U) + 4 \int\limits_{\Delta} dx \,\mathrm{Sp}\,((\delta_1 U + $$
$$+ J\delta_1 \left(\Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1}\right)\right) \delta_2 \left(\Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1}\right) - \left(\delta_2 U + J\delta_2 \left(\Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1}\right)\right) \delta_1 \left(\Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1}\right)\Big). \qquad (22)$$

Здесь $\Phi_0 = \Phi(\lambda_0)$.

Используя уравнение (19) в виде $U + J\Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} = \Phi_{0\lambda} \Phi_0^{-1}$, докажем равенство нулю второго интеграла в выражении (22), который для удобства обозначим F:

$$F = 4 \int\limits_{\Delta} dx \,\mathrm{Sp}\left(\delta_1 \left(\Phi_{0_x} \Phi_0^{-1}\right) \delta_2 \left(\Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1}\right) - \delta_2 \left(\Phi_{0_x} \Phi_0^{-1}\right) \delta_1 \left(\Phi_0 \lambda_0 \Phi_0^{-1}\right)\right) =$$
$$= 4 \int\limits_{\Delta} dx \,\mathrm{Sp}\Big(\delta_1 \Phi_{0_x} \Phi_0^{-1} \delta_2 \Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} - \delta_2 \Phi_{0_x} \Phi_0^{-1} \delta_1 \Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} -$$
$$- \delta_1 \Phi_{0_x} \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} \delta_2 \Phi_0 \Phi_0^{-1} + \delta_2 \Phi_{0_x} \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} \delta_1 \Phi_0 \Phi_0^{-1} - \Phi_{0_x} \Phi_0^{-1} \delta_1 \Phi_0 \Phi_0^{-1} \delta_2 \Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} +$$
$$+ \Phi_{0x} \Phi_0^{-1} \delta_2 \Phi_0 \Phi_0^{-1} \delta_1 \Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} + \Phi_{0x} \Phi_0^{-1} \delta_1 \Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} \delta_2 \Phi_0 \Phi_0^{-1} - \Phi_{0_x} \Phi_0^{-1} \times$$
$$\times \delta_1 \Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} \delta_2 \Phi_0 \Phi_0^{-1}\Big).$$

Проинтегрируем по частям первые два члена. Тогда интеграл пропадает и остается только внеинтегральный член:

$$F = 4 \,\mathrm{Sp}\left(\delta_1 \Phi_0 \Phi_0^{-1} \delta_2 \Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1} - \delta_2 \Phi_0 \Phi_0^{-1} \delta_1 \Phi_0 \hat{\lambda}_0 \Phi_0^{-1}\right)\Big|_{\Delta}. \qquad (23)$$

Все решения (18) с периодическим потенциалом $p(x)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} \psi(x, \lambda) \\ \varphi(x, \lambda) \end{pmatrix} = e^{\pm i\mu(\lambda) x} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

где χ_1 и χ_2 — функции, периодические по x. Условие (24) можно записать следующим образом:

$$\Phi_0(1) = \Phi_0(0) \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & \bar{q} \end{pmatrix} = \Phi_0(0)\, \hat{q}.$$

Подставим выражение (25) в равенство (23) (для краткости $\Phi_0(0) \to G$):

$$F = 4 \,\mathrm{Sp}\,((\delta_1 G\hat{q} + G\delta_1 \hat{q})\, \hat{q}^{-1} G^{-1} (\delta_2 G \hat{q} + G\delta_2 \hat{q}) J \hat{q}^{-1} G^{-1} -$$
$$- \delta_1 G G^{-1} \delta_2 G J G^{-1} + \delta_2 G G^{-1} \delta_1 G J G^{-1} - (\delta_2 G \hat{q} + G \hat{\delta}_2 \hat{q})\, \hat{q}^{-1} G^{-1} (\delta_1 G \hat{q} +$$
$$+ G\delta_1 \hat{q}) J \hat{q}^{-1} G^{-1}).$$

Учитывая, что матрицы $\hat{q}$, $\delta\hat{q}$ и J диагональны и коммутируют между собой, убеждаемся, что

$$F = 0.$$

Итак, каноничность преобразования Дарбу для периодического слу-