Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Dr. Frank Jochmann
http://www.math.tu-berlin.de/∼wittbold/

Wintersemester 2009/2010

9. Übungsblatt zu Differentialgleichungen I

(Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten, Abgabe: bis Fr. 18.12. in den Tutorien)

Übung

1. Aufgabe

Sei $-\tau < 0 < T < \tau$ und $f \in C^1((-\tau,\tau) \times \mathbb{R}^n)$ linear wachstumsbeschränkt bzgl. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Für $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ sei $\phi(\mathbf{z},\cdot) : [-T,T] \to \mathbb{R}^n$ die Lösung des AWP

$$\mathbf{y}' = f(t,\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{z}, \qquad t \in [-T,T], \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass für alle $t \in [-T,T], \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial}{\partial z_k}\phi(\mathbf{z},t)$ existiert und das lineare AWP

$$\mathbf{u}'(t) = (D_y f)(t,\phi(\mathbf{z},t)) \cdot \mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{e}_k \overset{def}{=} (0,...,1,0,...,0) \text{ löst.}$$

2. Aufgabe

Sei $\phi(z,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu gegebenem $z \in \mathbb{R}$ die maximal fortgesetzte Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \arctan y, \qquad y(0) = z, \qquad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial z}\phi(0,x)$.

3. Aufgabe

Let X_0 be the space of all bounded sequences. We endow X_0 with the sup-norm, i. e.

$$\|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty \overset{def}{=} \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|, \qquad (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X_0.$$

Let $\gamma_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ be recursively defined by

$$\gamma_1 \overset{def}{=} 0, \qquad \gamma_{k+1} \overset{def}{=} 1 + \frac{\gamma_k}{2}, \quad k \geq 1.$$

For any $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X_0$ let $F(a)$ be the sequence defined by

$$F(a)_k \overset{def}{=} \gamma_k \sqrt{|a_{k-1}|} \text{ if } k \geq 2 \text{ and } F(a)_1 \overset{def}{=} 0.$$

1. Show that $F(a) \in X_0$ for each $a \in X_0$ and prove that $F : X_0 \to X_0$ is continuous.
2. Show that, for each $z \in X_0$, the initial value problem
$$y' = F(y), \quad y(0) = z, \quad t \in [0,\infty)$$
has a uniquely determined solution solution $y : [0,\infty) \to X_0$.
3. Show that, for each $\alpha \in [0,\infty)$, the solution $y_\alpha : [0,\infty) \to X_0$ to the initial value problem
$$y_\alpha' = F(y_\alpha), \quad y_\alpha(0) = (\alpha,0,0,...), \quad t \in [0,\infty)$$
is given by
$$y_{\alpha,n}(t) = \alpha^{(2^{1-n})} t^{\gamma_n}, \qquad n \in \mathbb{N}, t \in [0,\infty).$$

4. Does the solution to the initial-value problem depend continuously on the data?

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe
Seien $P \subset \mathbb{R}^m$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C(P \times \mathbb{R} \times U, \mathbb{R}^n)$ stetig bzgl. aller Variablen und linear wachstumsbeschränkt bzgl. $\mathbf{y}$. Seien $T > 0$, $\lambda \in P$, $\mathbf{y}_0 \in U$, $\lambda_n \in P$ und $\mathbf{y}_n \in U$ mit

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \text{ und } \mathbf{y}_0 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n.$$

Sei ferner $\mathbf{y}_n : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von

$$\mathbf{y}' = f(\lambda_n, t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_n.$$

Darüber hinaus sei vorausgesetzt, dass das AWP

$$\mathbf{y}' = f(\lambda, t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{1}$$

höchstens eine auf $[0, T]$ definierte Lösung hat.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{y}(t) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n(t)$ existiert, die Konvergenz auf $[0, T]$ gleichmässig ist, sowie $\mathbf{y}$ eine Lösung des AWP (1) ist.

2. Aufgabe
Sei $\phi(z, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu gegebenem $z \in \mathbb{R}$ die maximal fortgesetzte Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y \cos y, \qquad y(0) = z, \qquad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial z}\phi(0, x)$.

3. Aufgabe
Seien $f \in C(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variablen, $\phi_m(\mathbf{z}, \cdot) : (-T^-(\mathbf{z}), T^+(\mathbf{z})) \to \mathbb{R}^n$ zu gegebenem $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ die maximal fortgesetzte Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}), \qquad x \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{z}.$$

1. Zeigen Sie, dass $T^+ : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ unterhalbstetig ist.
2. Zeigen Sie, dass die Menge

$$G \stackrel{def}{=} \{(x, \phi_m(\mathbf{z}, x)) : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \quad x \in (-T^-(\mathbf{z}), T^+(\mathbf{z}))\}$$

offen ist.

Hausaufgaben

1. Aufgabe **3+5 Punkte**

i) Zeigen Sie, dass $\phi(1,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $\phi(1,x)\overset{def}{=}\exp(x)$ die eindeutig bestimmte, maximal fortgesetzte Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y + \sin(e^t - y), \qquad y(0) = 1, \qquad t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

ist.

ii) Sei $\phi(z,\cdot): I_z \to \mathbb{R}$ zu gegebenem $z \in \mathbb{R}$ die maximal fortgesetzte Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y + \sin(e^t - y), \qquad y(0) = z, \qquad t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial z}\phi(1,t)$.

2. Aufgabe **4+3 Punkte**

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Lösungen für $n \to \infty$ bei folgenden rechtsseitigen AWPs

$$y_n' = f(y_n), \qquad y_n(0) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad t \geq 0$$

in den Fällen

1. $f(y) = 4y^{3/4}$ falls $y \in \mathbb{R}^+$ und $f(y) = 0$ falls $y < 0$.
2. $f(y) = -4y^{5/4}$ falls $y \in \mathbb{R}^+$ und $f(y) = 0$ falls $y < 0$.

3. Aufgabe **5 Punkte**

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$ stetig und monoton, d.h.

$$\forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in U : (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot [F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{z})] \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass für zwei Lösungen $\mathbf{y}_1 : I_1 \to U$ und $\mathbf{y}_2 : I_2 \to U$ der Dgl. $\mathbf{y}' = -F(\mathbf{y})$ gilt:

$$|\mathbf{y}_2(t) - \mathbf{y}_1(t)| \leq |\mathbf{y}_2(s) - \mathbf{y}_1(s)| \text{ für alle } s, t \in I_1 \cap I_2 \text{ mit } s < t.$$

Zeigen Sie damit, dass für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ das rechtsseitige AWP

$$\mathbf{y}' = -F(\mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad t \geq 0$$

genau eine maximale Lösung hat.