Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Dr. Frank Jochmann
http://www.math.tu-berlin.de/∼wittbold/

Wintersemester 2009/2010

14. Übungsblatt zu Differentialgleichungen I

(Wiederholung)

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

Sei $F(y) \stackrel{def}{=} \sqrt{1-y^2}$ falls $y \in [-1,1]$ und $F(y) \stackrel{def}{=} 0$ falls $y \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Bestimmen Sie alle maximalen Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = F(y), \qquad y(0) = y_0.$$

2. Aufgabe

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

1. Seien
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
Untersuchen Sie die Nulllösung der Systeme $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}' = (A+B)\mathbf{z}$ auf Stabilität, bzw asymptotische Stabilität.

2. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $[A,B] = 0$, so dass die Nulllösungen der Systeme $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}' = B\mathbf{y}$ stabil sind. Zeigen Sie, dass dann auch die Nulllösung des Systems $\mathbf{z}' = (A+B)\mathbf{z}$ stabil ist.

4. Aufgabe

Seien $R, T \in (0,\infty)$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $K \in C([0,T] \times [0,T] \times \overline{B_R(\mathbf{y}_0)}, \mathbb{R}^n)$ mit $\|K(x,t,\mathbf{y})\| \le M$ mit einem $M \in (0,\infty)$ für alle $(x,t,\mathbf{y}) \in [0,T] \times [0,T] \times \overline{B_R(\mathbf{y}_0)}$ und $TM \le R$. Ferner sei K Lipschitz-stetig bzgl. der dritten Variablen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, d. h.

$$\|K(x,t,\mathbf{y}) - K(x,t,\mathbf{z})\| \le L\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \text{ für alle } x, t \in [0,T], \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \overline{B_R(\mathbf{y}_0)}.$$

Zeige dass es eine eindeutig bestimmte Funktion $\mathbf{u} \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ gibt, so dass für alle $x \in [0,T]$ gilt

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_0^x K(x,t,\mathbf{u}(t))dt.$$

5. Aufgabe

Seien

$$F_\alpha(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} e^{x_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \alpha e^{|\mathbf{x}|^2} \mathbf{x}.$$

- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die Dgl. $\mathbf{x}' = F_\alpha(\mathbf{x})$ immer globale Lösungen?
- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Nulllösung von $\mathbf{x}' = F_\alpha(\mathbf{x})$ stabil?
- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Nulllösung von $\mathbf{x}' = F_\alpha(\mathbf{x})$ asymptotisch stabil?

6. Aufgabe

Seien

$$F(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} -(1+\mathbf{x}_2^2)\sin x_1 \\ F_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

mit einer lokal Lipschitz-stetigen und linear wachstumsbeschränkten Funktion $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass dass AWP $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ immer eine globale Lösung hat
- Zeigen Sie, dass für die Lösung des AWP $\mathbf{x}' = F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ gilt: $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}_1(t) = 0$, falls $\mathbf{x}_{0,1} \in (-\pi, \pi)$.