Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
PROF. DR. P. WITTBOLD
DR. FRANK JOCHMANN
http://www.math.tu-berlin.de/∼wittbold/

Wintersemester 2009/2010

1. Übungsblatt zu Differentialgleichungen I

(Elementare Lösungsmethoden, Abgabe: bis Fr. 30.10. in den Tutorien)

ÜBUNG

1. Aufgabe

Die Geschwindigkeit eines fallenden Gegenstandes genügt bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes, der proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist, (nach geeigneter Skalierung) der Dgl.

$$\dot{v} = a^2 - v^2, \qquad (a > 0 \text{ konstant}).$$

1. Bestimmen Sie $v(t)$ unter der Anfangsbedingung $v(0) = 0$.
2. Bestimmen Sie die Grenzgeschwindigkeit , d.h. den Grenzwert der Lösung $v(t)$ für $t \to \infty$.

2. Aufgabe

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, a_0, .., a_{n-1} \in C(I, \mathbb{R})$. Wir betrachten die Dgl.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{1}$$

sowie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & . & . & . & . & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Sei $L_0 \subset C^n(I, \mathbb{R})$ die Menge der Lösungen von (1) und $L_1 \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)$ die Menge der Lösungen von (2). Für $u \in L_0$ sei $(Su)(t) = (u(t), u'(t), .., u^{(n-1)}(t)) \in C^1(I, \mathbb{R})^n$.

1. Zeigen Sie, dass dann $Su \in L_1$ für alle $u \in L_0$ und dass $S : L_0 \to L_1$ bijektiv ist (und somit die Dgl. (1) äquivalent zu (2) ist.)
2. Zeigen Sie, dass der Raum der Lösungen der zu (1) gehörenden homogenen Dgl. (d.h. (1) für $f = 0$) (wie der des zu (2) gehörenden homogenen Systems) die Dimension n hat.
3. Zeigen Sie, dass das AWP (1) mit der AB

   $$y(t_0) = y_0, .., y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

   für gegebene $t_0 \in I$, $y_0, .., y_{n-1} \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung hat unter Benutzung später in der VL gezeigter Existenz/Eindeutigkeitsaussagen für (2).

3. Aufgabe

Wir betrachten ein Federpendel bestehend aus einer Masse m, die an einer Feder mit Federkonstanten k hängt. Das Pendel werde mit einer äusseren Kraft f angeregt.

a.) Stellen Sie die DGL für den Ort $x(t)$ als Funktion der Zeit auf.

b.) Berechnen Sie die Lösungen für $k = m = 1$ und $f(t) = \cos(\omega t)$. Wann bleibt x beschränkt für $t \to \infty$?

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe

Eine chemische Substanz mit der Konzentration $m(t)$ zerfalle mit einer Zerfallskonstante $\lambda > 0$ und werde mit einer konstanten Massenrate β neu produziert. $m(t)$ genügt dann der Differentialgleichung

$$\dot{m} = \beta - \lambda m.$$

1. Bestimmen Sie $m(t)$ unter der Anfangsbedingung $m(0) = m_0$.
2. Bestimmen Sie die Grenzkonzentration, d.h. den Grenzwert der Lösung $m(t)$ für $t \to \infty$.
3. Im Falle $\beta = 0$ zerfalle in 20 Sekunden die Konzentration auf ein Zehntel der Anfangskonzentration. Bestimmen Sie dann die Zerfallskonstante λ.

2. Aufgabe

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der separablen DGL

$$y' = (y^2 + 1)x^2.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = (y^2 + 1)x^2, \qquad y(0) = 1.$$

Geben Sie das maximale Definitionsintervall an. Was geschieht an den Randpunkten dieses Definitionsbereiches?

3. Aufgabe

a) Das Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ habe die doppelte Nullstelle $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

durch

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_0 t} + C_1 t e^{\lambda_0 t}, \qquad C_1, C_1 \text{Konstanten},$$

gegeben ist.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe **7 Punkte**

Wir betrachten die Dgl.

$$y' + y + y^2 = 0.$$

1. Transformieren Sie diese Dgl. im Fall $y(t) \neq 0$ mit der Substitution $y(t) = u(t)^{-1}$ in eine inhomogene, lineare skalare Dgl. 1. Ordnung und bestimmen Sie deren allgemeine Lösung

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + y + y^2 = 0, \qquad y(0) = 1.$$

2. Aufgabe **6 Punkte**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2ty^4, \qquad y(0) = y_0$$

mit

1. $y_0 = 1$
2. $y_0 = -1$

Geben Sie jeweils das maximale Definitionsintervall an. Was geschieht jeweils an den Randpunkten dieses Definitionsbereiches?

3. Aufgabe **7 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = e^{2t}.$$