

Differentialgleichungen III —
Vorlesungs-Skript
(Stand 18. Januar 2009)

Prof. Dr. Petra Wittbold
(Skript von Yannick Okonek)

Wintersemester 2008/2009

Inhaltsverzeichnis

I	Lineare Halbgruppen	3
1	Lineare Halbgruppen	4
1.1	Gleichmäßig stetige Halbgruppen	4
1.2	Stark stetige Halbgruppen	14
2	Beispiele zum Satz von Hille Yosida	34
2.1	Lineare Boltzmann-Gleichung	34
2.2	Altersstrukturierte Populationsmodelle	39
3	Das inhomogene Cauchy-Problem	42
4	Approximation von Halbgruppen	48
5	Holomorphe/Analytische Halbgruppen	53
6	Semilineare Anfangswertprobleme	71
6.1	Existenz und Eindeutigkeit von milden Lösungen	71
6.2	Regularität von milden Lösungen; klassische Lösungen	78

Teil I

Lineare Halbgruppen

Kapitel 1

Lineare Halbgruppen

1.1 Gleichmäßig stetige Halbgruppen

Im gesamten Kapitel bezeichne X einen beliebigen (reellen oder komplexen) Banachraum, $\|\cdot\|_X$ die zugehörige Norm in X .

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(X)$ die Menge aller stetigen linearen Operatoren $A : X \rightarrow X$. Mit der skalaren Multiplikation und der bekannten Addition von Operatoren ist $\mathcal{L}(X)$ ein (reeller oder komplexer) Vektorraum.

Erinnerung:

Für einen linearen Operator $A : X \rightarrow X$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i) A ist beschränkt, d.h. es existiert $M > 0$ so, dass

$$\|Ax\|_X \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

- (ii) A ist stetig auf X

- (iii) A ist stetig in 0

Durch

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Ax\|_X$$

wird eine Norm (die sog. Operatornorm) auf $\mathcal{L}(X)$ definiert. Es gilt dann für alle $x \in X$:

$$\|Ax\|_X \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \|x\|_X.$$

Der Raum $\mathcal{L}(X)$ ausgestattet mit der Operatornorm ist ein Banachraum.

Desweiteren ist mit der Komposition von Operatoren eine Multiplikation in $\mathcal{L}(X)$ definiert:

$$(A, B) \in \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \mapsto A \circ B \in \mathcal{L}(X),$$

und mit dieser Multiplikation ist $\mathcal{L}(X)$ eine (reelle oder komplexe) Algebra mit Einselement I , die Identität auf X . Weiter gilt

$$\|A \circ B\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$$

und

$$\|I\|_{\mathcal{L}(X)} = 1.$$

Mit anderen Worten: $(\mathcal{L}(X), \circ, \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)})$ ist eine sog. (nicht-kommutative) Banachalgebra.

Der Einfachheit halber werden wir meist kurz für die Komposition AB anstatt $A \circ B$ schreiben.

Wir haben in der Einführung motiviert, wieso ein autonomes deterministisches System durch eine Familie von Abbildungen $(S(t))_{t \geq 0}$ beschrieben werden sollte, die der Funktionalgleichung

$$S(t+s) = S(t)S(s) \quad \forall t, s \geq 0$$

genügen. Die Abbildungen $S(t)$ bilden dabei den Zustandsraum X des Systems in sich selbst ab. In der Vorlesung DGL 3 wollen wir den Fall untersuchen, dass der Zustandsraum X ein unendlich dimensionaler Banachraum X ist.

Die in der Einführung gemachten Betrachtungen motivieren nun folgende

Definition 1.1. Eine Familie $(S(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ heisst **Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf X** , falls gilt:

- (i) $S(0) = I$, die Identität auf X
- (ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ für alle $t, s \geq 0$.

Eine Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ heisst **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+. \quad (1.1)$$

Die Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ heisst **stark stetig** oder **\mathcal{C}_0 -Halbgruppe**, falls gilt:

$$\forall x \in X : \|S(t)x - x\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+. \quad (1.2)$$

Bemerkungen:

- 1) In analoger Weise kann eine **Gruppe von beschränkten linearen Operatoren** als eine Familie $(S(t))_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(X)$ definiert werden, für die gilt:

- (i) $S(0) = I$, die Identität auf X
- (ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$.

Die Gruppe $(S(t))_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(X)$ heisst **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Die Gruppe $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ heisst **stark stetig** oder **C_0 -Gruppe**, falls gilt:

$$\forall x \in X : \|S(t)x - x\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Ist $(S(t))_{t \geq 0}$ eine Gruppe, so folgt mit der Gruppeneigenschaft

$$I = S(t-t) = S(t)S(-t) = S(-t)S(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Jeder der Operatoren $S(t)$ ist somit invertierbar und

$$S(t)^{-1} = S(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere erlaubt die Kenntnis des Zustandes eines durch eine Gruppe beschriebenen dynamischen Systems zu einem Zeitpunkt $t > 0$ die Berechnung des Ausgangszustandes des Systems zum Zeitpunkt $t = 0$.

Damit beschreiben Gruppen dynamische Prozesse, die umkehrbar sind. Die meisten dynamischen Prozesse sind allerdings nicht umkehrbar (man denke z.B. an die Wärmeausbreitung in einem Medium oder die Ausbreitung eines Schadstoffes in einer Flüssigkeit) und werden daher von Halbgruppen beschrieben.

- 2) Falls $X = \mathbb{R}^n$, dann sind die Stetigkeitsbedingungen (1.1) und (1.2) äquivalent.
- 3) Im allgemeinen Fall ist die gleichmäßige Stetigkeitsbedingung (1.1) jedoch stärker als die punktweise Stetigkeit (1.2).

- 4) Bedenken wir, dass durch die Halbgruppe ein dynamischer Prozess beschrieben wird, so ist die punktweise Stetigkeit (1.2 auf der vorherigen Seite) eine natürliche Bedingung, da wir in der Regel erwarten, dass ein System „stetig“ von einem Zustand in den nächsten übergeht und keine „abrupten“ Zustandsveränderungen auftreten. Trotzdem ist es natürlich zu erwarten, dass bei manchen Ausgangszuständen sich ein System schneller verändert als bei anderen. Eine gleichmäßige Stetigkeitseigenschaft wie (1.1 auf der vorherigen Seite) erscheint daher in den meisten Fällen unrealistisch.

Beispiele

- 1) Sei $X = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen im Unendlichen verschwindenden reellwertigen Funktionen auf \mathbb{R} , d.h. $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{u \in C(\mathbb{R}); \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0\}$. Ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist X ein Banachraum. Sei weiter $q \in C_b(\mathbb{R})$, d.h. eine stetige beschränkte Funktion auf \mathbb{R} . Für $t \geq 0$ definieren wir die Abbildung

$$S(t) : X \rightarrow X \\ f \mapsto e^{tq} f,$$

wobei $e^{tq} f$ punktweise definiert ist als $(e^{tq} f)(x) := e^{tq(x)} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$.

Da q beschränkt ist, ist klar, dass $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ für alle $t \geq 0$. Desweiteren sieht man leicht, dass $S(0) = I$ und $S(t+s)f = e^{(t+s)q} f = e^{tq} \cdot e^{sq} f = S(t)S(s)f$ für alle $f \in X$, d.h. $(S(t))_{t \geq 0}$ ist eine Halbgruppe beschränkter linearer Operatoren auf X .

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|S(t)f - f\|_\infty \\ &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|(e^{tq} - 1)f\|_\infty \\ &\leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|(e^{tq} - 1)\|_\infty \|f\|_\infty \\ &\leq \|(e^{tq} - 1)\|_\infty. \end{aligned}$$

Da

$$e^{-t\|q\|_\infty} - 1 \leq e^{tq(x)} - 1 \leq e^{t\|q\|_\infty} - 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

und somit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |e^{tq(x)} - 1| \leq \max\{(e^{t\|q\|_\infty} - 1), (1 - e^{-t\|q\|_\infty})\},$$

folgt, dass

$$\begin{aligned} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \max\{(e^{t\|q\|_\infty} - 1), 1 - e^{-t\|q\|_\infty}\} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{wenn } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Die Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ ist somit gleichmäßig stetig.

- 2) In dem gleichen Banachraum $X = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ wie zuvor betrachten wir nun für $t \geq 0$ die Operatoren

$$S(t) : X \rightarrow X \\ f \mapsto f(\cdot - t)$$

$S(t)$ beschreibt also eine Rechtstranslation (Shift) um den Wert t auf dem Funktionenraum X . Es ist auch hier klar, dass $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ für alle $t \geq 0$, $S(0) = I$ und $S(t+s) = S(t)S(s)$ für alle $t, s \geq 0$. Da jedes $f \in X$ automatisch gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} ist, gilt außerdem für jedes $f \in X$, dass

$$\|S(t)f - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(t+x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+,$$

d.h. aber $(S(t))_{t \geq 0}$ ist eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf X .

Allerdings ist $(S(t))_{t \geq 0}$ nicht gleichmäßig stetig. Um dies zu zeigen, betrachten wir für $t > 0$ die Funktion $f_t \in X$ definiert durch

$$f_t(x) = \left(1 - \frac{|x|}{t}\right)^+ = \max\left(\left(1 - \frac{|x|}{t}\right), 0\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass $\|f_t\|_\infty = 1$ und

$$\begin{aligned} \|S(t)f_t - f_t\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_t(x+t) - f_t(x)| \\ &\geq |f_t(t) - f_t(0)| \\ &= 1 \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Somit ist dann aber

$$\begin{aligned} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} &\geq \|S(t)f_t - f_t\|_\infty \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

für alle $t > 0$, und somit $(S(t))_{t \geq 0}$ nicht gleichmäßig stetig.

Die hier betrachtete Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ ist ein wichtiges Beispiel der Familie der sog. **Translationshalbgruppen** (Rechts- sowie Linkstranslationen), die auch auf anderen Räumen (z.B. $L^p(\mathbb{R})$ mit $1 \leq p < \infty$, $BUC(\mathbb{R})$ (Raum der beschränkten gleichmäßig stetigen Funktionen)). Translationshalbgruppen auf \mathbb{R} können zu Translationsgruppen fortgesetzt werden.

- 3) Es gibt auch Halbgruppen, die nicht stark stetig sind. Ein Beispiel dafür ist etwa die (Rechts-)Translationshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf $L^\infty(\mathbb{R})$: $S(t)f = f(\cdot - t)$, $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Betrachte dazu die Funktion $f = \chi_{(0,1)} \in L^\infty(\mathbb{R})$, die Indikatorfunktion des Intervalls $(0, 1)$. Dann ist offensichtlich

$$\|S(t)f - f\|_\infty = \text{ess - sup}_{x \in \mathbb{R}} |\chi_{(t,1+t)}(x) - \chi_{(0,1)}(x)| = 1$$

für alle $t > 0$ und somit $\|S(t)f - f\|_\infty \not\rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0^+$.

Per Definition wird die Stetigkeit einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe (resp. \mathcal{C}_0 -Halbgruppe) nur im Nullpunkt gefordert. Es wird sich aber zeigen, dass die Abbildung $t \in [0, \infty[\mapsto S(t) \in \mathcal{L}(X)$ (resp. die Abbildungen $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x \in X$, für alle $x \in X$) dann sogar stetig auf ganz $[0, \infty[$ sind.

Dazu benötigen wir folgenden Satz, der besagt, dass \mathcal{C}_0 -Halbgruppen von Operatoren einer exponentiellen Wachstumsbeschränkung genügen.

Satz 1.2. Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X .

Dann existiert ein $M \geq 1$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$, so dass

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass ein $\delta > 0$ und ein $M \geq 1$ existiert, so dass

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \quad \forall 0 \leq t \leq \delta. \quad (1.3)$$

Angenommen, dies gilt nicht. Dann existiert eine Folge $t_n \downarrow 0$, so dass $\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow +\infty$.

Andererseits ist aber $(S(t))_{t \geq 0}$ stark stetig, d.h.

$$\|S(t)x - x\|_X \rightarrow_{t \rightarrow 0^+} 0 \quad \forall x \in X,$$

und somit ist jede Folge $(S(t_n)x)_n$ beschränkt in X , für alle $x \in X$. Aus dieser punktweisen Beschränktheit folgt mit dem Satz von Banach-Steinhaus die gleichmäßige Beschränktheit:

$$\sup_n \|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$$

Dies ist ein Widerspruch und somit (1.3 auf der vorherigen Seite) gezeigt.

Wir setzen nun $\omega = \ln(M)/\delta$. Ein beliebiges $t > 0$ schreiben wir dann als $t = n\delta + \sigma$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq \sigma < \delta$ und erhalten so

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|S(n\delta + \sigma)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \|S(\sigma)S(\delta)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq M^{n+1} \\ &\leq M \cdot M^{\frac{t}{\delta}} \quad (\text{da } \frac{t}{\delta} > n) \\ &= Me^{\frac{t \ln(M)}{\delta}} \\ &= Me^{\omega t} \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. □

Aus Satz 1.2 auf der vorherigen Seite ergibt sich sofort

Korollar 1.3. (i) Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X .

Dann ist die Funktion

$$t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x \in X$$

stetig, für alle $x \in X$.

(ii) Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe auf dem Banachraum X .

Dann ist die Funktion

$$t \in [0, \infty[\mapsto S(t) \in \mathcal{L}(X)$$

stetig.

Beweis:

(i) Sei $t \geq 0$ und $x \in X$. Dann ist für $h > 0$:

$$\begin{aligned} &\|S(t+h)x - S(t)x\|_X \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|S(h)x - x\|_X \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d.h. $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ ist rechtsseitig stetig.

Weiter ist, für $0 < h < t$, nach Satz 1.2 auf der vorherigen Seite,

$$\begin{aligned} &\|S(t-h)x - S(t)x\|_X \\ &\leq \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x - S(h)x\|_X \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \|x - S(h)x\|_X \end{aligned}$$

für ein $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$. Somit folgt auch, dass $\lim_{h \rightarrow 0} \|S(t-h)x - S(t)x\|_X = 0$ für alle $t > 0$, d.h. die linksseitige Stetigkeit der Funktion $t \in]0, \infty[\mapsto S(t)x$.

(ii) Supremumbildung über der Einheitskugel B_X in X in den punktwisen Abschätzungen von (i) und Übergang zum Limes mit $h \rightarrow 0$ liefert die Behauptung. □

Wie in der Einleitung beschrieben, wollen wir untersuchen, wann Halbgruppen bzw. die Trajektorien von Halbgruppen differenzierbar sind und einer Differentialgleichung genügen. Dazu führen wir den folgenden Begriff ein:

Definition 1.4. Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf X . Der Operator A definiert durch

$$D(A) = \{x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(S(t)x - x) \text{ existiert in } X\}$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(S(t)x - x) \quad \text{für alle } x \in D(A)$$

heißt **Erzeuger** (oder *Generator*) **der \mathcal{C}_0 -Halbgruppe** $(S(t))_{t \geq 0}$.

Der folgende Satz zeigt, dass jeder beschränkte lineare Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ der Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe ist. Genauer gilt:

Satz 1.5. Sei $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist die Familie $(S(t))_{t \geq 0}$ definiert durch

$$S(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \quad t \geq 0$$

eine gleichmäßig stetige Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf X , deren Erzeuger A ist.

Beweis:

Der Beweis funktioniert ähnlich wie im endlich-dimensionalen Fall (vgl. Einleitung). Es ist lediglich an den entsprechenden Stellen die Matrixnorm durch die Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ zu ersetzen. Die Schritte der Vollständigkeit halber noch einmal im einzelnen:

Wir zeigen zunächst, dass $S(t) \in \mathcal{L}(X)$: Dazu bemerken wir nur, dass die Folge

$(\sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k}{k!})_n$ eine Cauchy-Folge im Banachraum $\mathcal{L}(X)$ bildet, da

$$\left\| \sum_{k=m}^n \frac{t^k A^k}{k!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{k=m}^n \frac{t^k \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^k}{k!}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, und die skalare Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^k}{k!}$ bekanntermaßen konvergiert.

$(S(t))_{t \geq 0}$ ist eine Halbgruppe: Es ist klar, dass $S(0) = I$. Da $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^k}{k!}$ konvergiert, kann man außerdem wie für das Cauchy-Produkt im skalaren Fall zeigen

$$\begin{aligned} S(t+s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} t^{n-k} s^k A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \frac{s^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \\ &= S(t)S(s). \end{aligned}$$

$(S(t))_{t \geq 0}$ ist gleichmäßig stetig:

$$\begin{aligned} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{n!} \\ &= e^{t\|A\|} - 1 \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

A ist Erzeuger von $(S(t))_{t \geq 0}$: Für $t > 0$ ist

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - tA}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n}{n!} \\ &\leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)} (e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}} - 1) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

□

Beschränkte lineare Operatoren erzeugen somit gleichmäßig stetige Operatorhalbgruppen. Umgekehrt gilt aber auch

Satz 1.6. Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine gleichmäßig stetige Operatorhalbgruppe auf X . Dann ist der Erzeuger A von $(S(t))_{t \geq 0}$ ein beschränkter linearer Operator auf X .

Beweis:

Aus der Stetigkeit der Funktion $S(\cdot)$ (siehe Korollar 1.1) folgt sofort, dass

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma) d\sigma \rightarrow S(0) = I \quad (t \rightarrow 0^+). \quad (1.4)$$

Wir benötigen nun die Tatsache, dass die Menge der stetig invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(X)$ offen ist. Im endlich-dimensionalen Fall ($X = \mathbb{R}^n$, A $n \times n$ -Matrix) konnten wir diese Tatsache beispielsweise leicht daraus herleiten, dass die Determinante eine stetige Abbildung von $M_n(\mathbb{C})$ nach \mathbb{C} ist und eine Matrix bekannterweise genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante ungleich Null ist.

Im unendlich-dimensionalen können wir wie folgt argumentieren:

Zunächst bemerken wir, dass für jeden Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ die Reihe (sog. *Neumann'sche Reihe*) $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ in $\mathcal{L}(X)$ konvergiert, $I - A$ in $\mathcal{L}(X)$ invertierbar ist und der inverse Operator gerade durch die Neumann'sche Reihe gegeben ist: $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.

Die letzten beiden Behauptungen sieht man wie folgt. Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\begin{aligned} (I - A) \sum_{k=0}^n A^k &= \sum_{k=0}^n A^k (I - A) \\ &= I - A^{n+1} \\ &\rightarrow I \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

in $\mathcal{L}(X)$, da $\|A^{n+1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{n+1} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ wegen $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$.
Sei nun $T \in \mathcal{L}(X)$ ein stetig invertierbarer Operator. Für $S \in \mathcal{L}(X)$ mit

$$\|T - S\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \|I - T^{-1}S\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|T^{-1}T - T^{-1}S\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|T - S\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Somit folgt nach unseren zuvor gemachten Bemerkungen, dass der Operator $I - (I - T^{-1}S) = T^{-1}S$ in $\mathcal{L}(X)$ invertierbar ist. Da aber schon T^{-1} invertierbar ist, folgt daraus unmittelbar die Invertierbarkeit von S in $\mathcal{L}(X)$.

Wegen der Offenheit der Menge der invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(X)$ können wir nun aus (1.4 auf der vorherigen Seite) folgern, dass der Operator $\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma) d\sigma$ und somit auch der Operator

$$\int_0^t S(\sigma) d\sigma$$

für $t > 0$ genügend klein in $\mathcal{L}(X)$ invertierbar ist. Sei solch ein $t > 0$ genügend klein fest gewählt. Da für $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{h} \left[\int_0^t S(\sigma + h) d\sigma - \int_0^t S(\sigma) d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^{t+h} S(\sigma) d\sigma - \int_0^t S(\sigma) d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma) d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

(hierbei haben wir nur die Halbgruppeneigenschaft und die Tatsache benutzt, dass stetige lineare Operatoren in das Integral gezogen werden dürfen), folgt dann durch Multiplikation von rechts mit dem inversen Operator $\left(\int_0^t S(\sigma) d\sigma\right)^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} &= \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma) d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma) d\sigma \right) \circ \left(\int_0^t S(\sigma) d\sigma \right)^{-1} \\ &\rightarrow \underbrace{(S(t) - S(0)) \circ \left(\int_0^t S(\sigma) d\sigma \right)^{-1}}_{\in \mathcal{L}(X)} \quad \text{für } h \rightarrow 0^+ \text{ in } \mathcal{L}(X) \end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit der Abbildung $t \in [0, \infty[\mapsto S(t) \in \mathcal{L}(X)$. Es folgt, dass $(S(t) - S(0)) \circ \left(\int_0^t S(\sigma) d\sigma\right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ der Generator der gleichmäßig stetigen Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ und somit die Behauptung. \square

Eine Frage ist bislang offen geblieben: wenn $(S(t))_{t \geq 0}$ eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe von Operatoren in $\mathcal{L}(X)$ und A ihr Generator, ist dann schon $S(t) = e^{tA}$ für $t \geq 0$. Anders ausgedrückt: ist eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ eindeutig durch ihren Generator bestimmt? Der Beweis des vorhergehenden Satzes liefert darauf keine Antwort, wohl aber der folgende

Satz 1.7. *Seien $(S(t))_{t \geq 0}, (T(t))_{t \geq 0}$ gleichmäßig stetige Halbgruppen von beschränkten linearen Operatoren auf X . Wenn $(S(t))_{t \geq 0}$ und $(T(t))_{t \geq 0}$ den gleichen Generator A besitzen, dann gilt $S(t) = T(t)$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis:

Sei $T > 0$. Gemäß Satz 1.1 existiert dann eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \text{ und } \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (1.5)$$

Sei nun weiter $\epsilon > 0$. Wir wollen zeigen, dass $\|S(t) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \epsilon$ auf $[0, T]$, woraus die Behauptung dann folgt.

Da $(S(t))_{t \geq 0}$ und $(T(t))_{t \geq 0}$ den gleichen Generator besitzen, gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t},$$

(Limes in $\mathcal{L}(X)$!) und somit

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - T(t)}{t} = 0.$$

Folglich existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{\|S(t) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} < \frac{\epsilon}{TM^2} \quad \text{für alle } t \in]0, \delta]. \quad (1.6)$$

Sei nun $t \in [0, T]$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$ so, dass $t/n < \delta$. Dann erhalten wir nur durch Ausnutzen der Halbgruppeneigenschaft und den Abschätzung 1.5 und 1.6

$$\begin{aligned} & \|S(t) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ = & \left\| S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(\frac{t}{n}\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ = & \left\| \sum_{k=0}^{n-1} S\left((n-k)\frac{t}{n}\right) T\left(k\frac{t}{n}\right) - S\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) T\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \leq & \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left((n-k)\frac{t}{n}\right) T\left(k\frac{t}{n}\right) - S\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) T\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ = & \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) T\left(k\frac{t}{n}\right) - S\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) T\left(k\frac{t}{n}\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \leq & \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \left[S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(\frac{t}{n}\right) \right] T\left(k\frac{t}{n}\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \leq & \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(\frac{t}{n}\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| T\left(k\frac{t}{n}\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ \leq & M^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(\frac{t}{n}\right) \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\ & \leq M^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{TM^2} \frac{t}{n} \\ & \leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Beispiel: Betrachten wir noch einmal die gleichmäßig stetige Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf $X = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ definiert durch

$$S(t)f = e^{tq}f, \quad \forall t \geq 0, \forall f \in X,$$

wobei $q \in C_b(\mathbb{R})$ fest vorgegeben.

Wir wissen nun bereits, dass $(S(t))_{t \geq 0}$ einen Generator $A \in \mathcal{L}(X)$ besitzt und dass

$$A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}$$

in $\mathcal{L}(X)$. Insbesondere gilt dann aber auch für jedes $f \in X$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (Af)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tq(x)}f(x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tq(x)} - 1}{t} (f(x)) \\ &= q(x)f(x). \end{aligned}$$

Folglich ist der Generator A von $(S(t))_{t \geq 0}$ der Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} A: X &\rightarrow X \\ f &\mapsto qf \end{aligned}$$

Welche Erkenntnisse haben wir nun durch die Ergebnisse des zurückliegenden Kapitels für das abstrakte (homogene) Cauchy-Problem

$$(ACP) \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au & , t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für einen Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ gewonnen? Die Antwort liefert der folgende

Satz 1.8. Für alle $u_0 \in X$ ist die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto u(t) = S(t)u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} u_0$ die eindeutige klassische Lösung von (ACP), d.h. $u \in C^1([0, \infty[; X)$, $u(0) = u_0$ und $u'(t) = Au(t)$ für alle $t \geq 0$.
Darüber hinaus gilt sogar $u \in C^\infty([0, \infty[; X)$.

Beweis:

Aus den bisherigen Ergebnissen folgt dank der Halbgruppeneigenschaft sofort die rechtsseitige Differenzierbarkeit der Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ in jedem Punkt $t \geq 0$ in der Operatornorm:

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \frac{S(h) - I}{h} S(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} AS(t) = S(t)A \quad \text{in } \mathcal{L}(X).$$

Nun kann man die Stetigkeit dieser rechtsseitigen Ableitung ausnutzen, um zu folgern, dass $S(\cdot)$ sogar stetig differenzierbar auf $[0, \infty[$ ist, $\frac{d}{dt} S(t) = AS(t)$ für alle $t \geq 0$ gilt. Alternativ kann die linksseitige Differenzierbarkeit von „zu Fuß“ nachgerechnet werden: so gilt für $t > 0$ und $0 < h < t$

$$\frac{S(t-h) - S(t)}{-h} = \frac{S(h) - I}{h} S(t-h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} AS(t) \quad \text{in } \mathcal{L}(X),$$

und wieder folgt die Behauptung.

Da $A \in \mathcal{L}(X)$, folgt damit auch sofort die stetige Differenzierbarkeit der Funktion $t \mapsto AS(t) \in \mathcal{L}(X)$ auf $[0, \infty[$ mit $\frac{d}{dt} AS(t) = A^2 S(t)$ und dann iterativ, dass $S(\cdot) \in C^\infty([0, \infty[; \mathcal{L}(X))$ mit $\frac{d^n}{dt^n} S(t) = A^n S(t)$ für alle $t \geq 0$, für alle n .

Die entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften der Bahnen der Halbgruppe, d.h. der Funktionen $t \mapsto S(t)u_0$ mit $u_0 \in X$ folgt unmittelbar aus den gerade gezeigten Differenzierbarkeitseigenschaften der Halbgruppe in der Operatornorm.

Um die Eindeutigkeit der klassischen Lösung von (ACP) zu zeigen, seien u und v nun zwei beliebige klassische Lösungen von (ACP). Aus der Linearität der Differentialgleichung folgt, dass dann $w = u - v$ eine klassische Lösung des Cauchy-Problems zum Anfangswert $w(0) = w_0 = 0$ ist. Betrachten wir nun, für $T > 0$ die Funktion

$$\Phi(t) := S(T-t)w(t), \quad t \in [0, T].$$

Offensichtlich ist

$$\Phi(T) = w(T) \quad \text{und} \quad \Phi(0) = 0.$$

Ausserdem ist Φ stetig differenzierbar auf $[0, T]$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t) &= -Ae^{(T-t)A}w(t) + e^{(T-t)A}Aw(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

auf $[0, T]$. Folglich ist Φ konstant auf $[0, T]$ und somit $w(T) = \Phi(T) = \Phi(0) = 0$. Da $T > 0$ beliebig, folgt $w \equiv 0$, d.h. aber $u \equiv v$. \square

Da konkrete partielle Differentialgleichungen in der Regel nur als ein abstraktes Cauchy-Problem mit einem linearen (oder allgemeiner: nicht-linearen) **unbeschränkten** Operatoren A in einem Banachraum X formuliert werden können, reichen die bislang gewonnen Erkenntnisse offensichtlich nicht aus, um solche Probleme zu lösen.

1.2 Stark stetige Halbgruppen

Die Realisierung eines formal gegebenen linearen Differentialausdrucks, wie etwa „ $\frac{d}{dx}$ “, als Operator in einem Banachraum X führt i.a. zu einem linearen Operator, der nur noch auf einem Teilraum von X definiert ist und selbst auf diesem Teilraum nicht stetig (d.h. unbeschränkt) ist. Betrachten wir dazu nur den eben erwähnten Differentialausdruck $\frac{d}{dx}$ und wählen etwa als Banachraum $X = C([0, 1])$ ausgestattet mit der üblichen Supremumsnorm.

Offensichtlich können wir den Differentialoperator $\frac{d}{dx}$ nicht auf ganz X definieren, wohl aber auf dem dichten linearen Teilraum $C^1([0, 1])$. Dort ist der Differentialoperator aber bzgl. der Supremumsnorm nicht stetig, da die gleichmäßige Konvergenz einer Folge stetig differenzierbarer Funktionen $(f_n)_n$ gegen eine Funktion f ja bekanntlich nicht einmal die Differenzierbarkeit des Grenzelements f garantiert, geschweige denn die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Ableitungen $(f'_n)_n$ gegen f' nach sich zieht.

Die Realisierung A des Differentialausdrucks $\frac{d}{dx}$ im Banachraum X , d.h. der Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definiert durch $D(A) = C^1([0, 1])$ und $Af = f'$ für $f \in D(A)$, ist ein typisches Beispiel eines linearen unbeschränkten Operators in einem Banachraum.

Mit dieser Klasse von Operatoren wollen wir uns zunächst ein wenig beschäftigen und ein paar grundlegende Begriffe und Tatsachen in diesem Zusammenhang kennenlernen.

Sei dazu im folgenden $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ ein *linearer Operator* von einem Banachraum X in einen Banachraum Y , d.h. $D(A)$, der Definitionsbereich von A , ist ein linearer Teilraum des Banachraumes X , und die Abbildung $u \in D(A) \mapsto Au \in Y$ ist linear. Falls $D(A)$ eine dichte Teilmenge von X ist, heisst A kurz *dicht definiert*. Die eingangs erwähnten Differentialoperatoren sind zwar unstetig, besitzen aber oft eine andere sehr nützliche Eigenschaft.

Definition 1.9. Ein linearer Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ heisst **abgeschlossen**, wenn gilt:

$$\text{falls } (x_n)_n \subset D(A), x_n \rightarrow x \text{ und } Ax_n \rightarrow y \text{ in } Y \quad (n \rightarrow \infty)$$

dann folgt

$$x \in D(A) \text{ und } Ax = y.$$

Bemerkungen:

1.) Falls $D(A)$ ein abgeschlossener Unterraum von X und $A : D(A) \rightarrow Y$ stetig ist, dann ist A auch abgeschlossen.

Insbesondere ist jeder Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ abgeschlossen.

2.) Offensichtlich ist ein linearer Operator $A : D(A) \rightarrow Y$ genau dann abgeschlossen, wenn der Graph

von A , d.h. die Menge

$$G(A) := \{(x, Ax); x \in D(A)\},$$

ein abgeschlossener linearer Teilraum des Produktraums $X \times Y$ (ausgestattet mit der Norm $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$) ist.

- 3.) Vorsicht ist geboten bei der Bildung von Summen von abgeschlossenen Operatoren: Sind $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ und $B : D(B) \subset X \rightarrow Y$ abgeschlossene, lineare Operatoren, so ist die Summe der beiden Operatoren, der Operator $A+B$ definiert auf $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ durch $(A+B)(u) = Au + Bu$, im allgemeinen nicht abgeschlossen!

Ist einer der beiden Operatoren, etwa $B \in \mathcal{L}(X)$, d.h. ein auf ganz X definierter, beschränkter, linearer Operator, dann ist die Summe $A+B$ (mit Definitionsbereich $D(A+B) = D(A)$) abgeschlossen.

Betrachten wir noch einmal den eingangs erwähnten Differentialoperator $A = \frac{d}{dx}$ in $X = C([0, 1])$. Sei $(f_n)_n \subset D(A) = C^1([0, 1])$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $f_n \rightarrow f$ und $Af_n = f'_n \rightarrow g$ gleichmäßig auf $[0, 1]$. Aus der elementaren reellen Analysis ist uns bekannt, dass dann schon f stetig differenzierbar auf $[0, 1]$ ist und $f' = g$. Mit anderen Worten: $f \in D(A)$ und $Af = g$, d.h. aber gerade, dass A abgeschlossen ist.

Im Zusammenhang mit abgeschlossenen Operatoren wollen wir an den Satz vom abgeschlossenen Graphen erinnern, der uns aus der Funktionalanalysis bekannt ist:

Satz vom abgeschlossenen Graphen

Es seien X, Y Banachräume, $A : X \rightarrow Y$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann gilt: A ist stetig.

Wir werden sehen, dass Erzeuger von \mathcal{C}_0 -Halbgruppen stets abgeschlossene, lineare Operatoren sind. Allerdings wird sich zeigen, dass umgekehrt nicht jeder abgeschlossene, lineare Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ auch schon Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe ist.

Nach dieser Vorbereitung wollen wir uns nun wieder dem Studium der Halbgruppen zuwenden. Im folgenden Lemma sind einige wichtige Eigenschaften von \mathcal{C}_0 -Halbgruppen zusammengefasst.

Lemma 1.10. Sei $S(t)_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X und A ihr Erzeuger. Dann gilt:

(i) $\forall x \in X, t \geq 0 :$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma)x \, d\sigma = S(t)x$$

(ii) $\forall x \in X, t \geq 0$ ist $\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \in D(A)$ und

$$A \left(\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) = S(t)x - x$$

(iii) $\forall x \in D(A), t \geq 0$ ist $S(t)x \in D(A)$, $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ ist stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \quad \forall t \geq 0$$

(in der 0 ist dabei natürlich nur die rechtsseitige Ableitung gemeint).

(iv) $\forall x \in D(A), t \geq 0 :$

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\sigma)Ax \, d\sigma = \int_0^t AS(\sigma)x \, d\sigma$$

Beweis:

(i) folgt sofort aus der Stetigkeit der Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$.

(ii) Sei $x \in X, t > 0$. Für $h > 0$ folgt, unter Ausnutzung der Halbgruppeneigenschaft und da stetige lineare Operatoren in das Bochner-Integral hineingezogen werden können,

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} \left(\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) &= \frac{1}{h} \left(\int_0^t S(\sigma + h)x \, d\sigma - \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{t+h} S(\sigma)x \, d\sigma - \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma)x \, d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma)x \, d\sigma. \end{aligned}$$

Nach (i) konvergiert die rechte Seite für $h \rightarrow 0^+$ gegen $S(t)x - x$. Aus der damit gezeigten Existenz des Limes der linken Seite folgt nun zunächst, dass $\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \in D(A)$. Gleichzeitig ist dann aber auch der gefundene Grenzwert der Wert des Erzeugers A in $\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma$, d.h.

$$A \left(\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) = S(t)x - x.$$

(iii) Sei nun $x \in D(A), t \geq 0, h > 0$. Aus der Halbgruppeneigenschaft folgt sofort

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} S(t)x &= \frac{S(t+h) - S(t)}{h} x \\ &= S(t) \frac{S(h) - I}{h} x \\ &\rightarrow S(t)Ax \quad \text{für } h \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

da $x \in D(A)$.

Es folgt, dass $S(t)x \in D(A)$ und $AS(t)x = S(t)Ax$.

Gleichzeitig folgt aus $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} x = S(t)x$ die rechtsseitige Differenzierbarkeit der Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ und dass

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Weiter erhalten wir für $0 < h < t$

$$\begin{aligned} \frac{S(t) - S(t-h)}{h} x &= S(t-h) \left(\frac{S(h) - I}{h} x \right) \\ &= S(t-h) \left(\frac{S(h) - I}{h} x - Ax \right) + S(t-h)Ax. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Den ersten Term auf der linken Seite schätzen wir, dank Satz 1.2 auf Seite 7, mit Hilfe von geeigneten Konstanten $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$ ab und erhalten

$$\begin{aligned} &\left\| S(t-h) \left(\frac{S(h) - I}{h} x - Ax \right) \right\|_X \\ &\leq \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| \frac{S(h) - I}{h} x - Ax \right\|_X \\ &\leq M e^{\omega(t-h)} \left\| \frac{S(h) - I}{h} x - Ax \right\|_X \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

da $x \in D(A)$.

Da $S(t-h)Ax \rightarrow S(t)Ax$ für $h \rightarrow 0^+$ in X , folgt aus (1.7) nun sofort die linksseitige Differenzierbarkeit der Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ sowie die Identität

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = S(t)Ax.$$

Somit ist also $t \mapsto S(t)x$ differenzierbar, und da $t \mapsto S(t)Ax$ stetig ist, sogar stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

(iv) folgt sofort aus (iii) mittels Integration. \square

Aus Lemma 1.10 auf Seite 15 ergeben sich nun leicht zwei Eigenschaften, die der Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe notwendigerweise erfüllt.

Korollar 1.11. Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X und A ihr Erzeuger. Dann gilt:

$$\overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X} = X \text{ und } A \text{ ist abgeschlossen.}$$

Beweis:

Sei $x \in X$. Nach Lemma 1.10 auf Seite 15 (ii) ist dann, für jedes $h > 0$, $\frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma)x d\sigma \in D(A)$. Zudem konvergiert $\frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma)x d\sigma \rightarrow x$ für $h \rightarrow 0^+$ nach Punkt (i) des gleichen Lemmas, und somit folgt, dass $D(A)$ dicht in X .

Wir müssen noch zeigen, dass der Erzeuger A abgeschlossen ist. Betrachte dazu eine beliebige Folge $(x_n)_n \subset D(A)$ mit der Eigenschaft, dass $x_n \rightarrow x$ und $Ax_n \rightarrow y$ in X . Aus Lemma 1.10 auf Seite 15 folgt dann

$$S(t)x_n - x_n = \int_0^t S(\sigma)Ax_n d\sigma.$$

Da $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, konvergiert die linke Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen $S(t)x - x$ in X . Da

$$\sup_{\sigma \in [0, t]} \|S(\sigma)Ax_n - S(\sigma)y\|_X \leq Me^{|\omega|t} \|Ax_n - y\|_X,$$

konvergiert die Folge der stetigen Funktionen $S(\cdot)Ax_n$ gleichmäßig auf $[0, t]$ gegen die Funktion $S(\cdot)y$ und somit

$$\int_0^t S(\sigma)x_n d\sigma \rightarrow \int_0^t S(\sigma)y d\sigma.$$

Es folgt, dass

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\sigma)y d\sigma.$$

Division durch $t > 0$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{S(t) - I}{t}x &= \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)y d\sigma \\ &\rightarrow S(0)y = y. \end{aligned}$$

Wir schliessen somit, dass $x \in D(A)$ und $Ax = y$. \square

Aus Lemma 1.1 (iii) folgt ebenso leicht das folgende Resultat für das abstrakte Cauchy-Problem

$$(ACP) \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au & , t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

wenn der Operator A Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ ist:

Satz 1.12. Für alle $u_0 \in D(A)$ ist die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto u(t) = S(t)u_0$ die eindeutige klassische Lösung von (ACP), d.h. $u \in C^1([0, \infty[; X)$, $u(0) = u_0$ und $u'(t) = Au(t)$ für alle $t \geq 0$.
 Falls $u_0 \in D(A^n)$ für ein $n \geq 1$, dann ist $u \in C^n([0, \infty[; X)$.
 Falls $u_0 \in \cap_n D(A^n)$, dann gilt sogar $u \in C^\infty([0, \infty[; X)$.

Beweis:

Lemma 1.1. (iii) besagt gerade, dass für $u_0 \in D(A)$ die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)u_0$ eine klassische Lösung von (ACP) ist.

Die Eindeutigkeit der klassischen Lösung zeigt man wie im Fall $A \in \mathcal{L}(X)$ (siehe Satz 1.8 auf Seite 13). Im Gegensatz zum Fall $A \in \mathcal{L}(X)$ ist die klassische Lösung für beliebige Anfangsdaten $u_0 \in D(A)$ nicht automatisch eine C^∞ -Funktion. Ist aber etwa $u_0 \in D(A^2)$, d.h. $u_0 \in D(A)$ mit $Au_0 \in D(A)$, dann ist die Funktion $t \mapsto \frac{d}{dt}S(t)u_0 = S(t)Au_0$ nach Lemma 1.1 (iii) (angewendet mit Au_0 anstelle von u_0) wieder stetig differenzierbar auf $[0, \infty[$ und $\frac{d^2}{dt^2}S(t)u_0 = AS(t)Au_0 = S(t)A^2u_0$ für alle $t \geq 0$. Induktiv ergibt sich die Behauptung für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. \square

Angesichts des so erfreulichen Ergebnisses der Wohlgestelltheit des abstrakten Cauchy-Problems für einen Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe, stellt sich nun in natürlicher Weise die Frage, welche Klasse von linearen Operatoren \mathcal{C}_0 -Halbgruppen generieren.

Das folgende Lemma zeigt, dass es im wesentlichen genügt, die Generatoren von Kontraktionshalbgruppen zu charakterisieren.

Lemma 1.13. (i) Sei $S(t)_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf X mit $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$.
 Dann ist $T(t) := e^{-\omega t}S(t)$, $t \geq 0$, eine beschränkte \mathcal{C}_0 -Halbgruppe auf X (die sog. „skalierte Halbgruppe“ und $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ für alle $t \geq 0$.
 Ist A der infinitesimale Generator von $S(t)_{t \geq 0}$, B der Generator von $T(t)_{t \geq 0}$, dann gilt:
 $B = A - \omega I$.

(ii) Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine beschränkte \mathcal{C}_0 -Halbgruppe auf $(X, \|\cdot\|_X)$ mit $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$. Dann existiert eine zu $\|\cdot\|_X$ äquivalente Norm auf X bzgl. der $(S(t))_{t \geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe ist.

Bemerkung: Ist $(S(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf X ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_X$, dann ist $(S(t))_{t \geq 0}$ auch eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf X , wenn X mit einer beliebigen anderen zu $\|\cdot\|_X$ äquivalenten Norm ausgestattet wird. Durch Übergang zu einer äquivalenten Norm ändert sich auch der Generator der Halbgruppe nicht.

Beweis:

(i) Die Halbgruppeneigenschaft von $(T(t))_{t \geq 0}$ rechnet man nach, die starke Stetigkeit ist klar. Wenn nun $x \in D(A)$, dann ist für $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I)x &= \frac{1}{h}(e^{-\omega h}S(h) - I)x \\ &= e^{-\omega h} \frac{1}{h}(S(h) - I)x + \frac{e^{-\omega h} - 1}{h}Ix \\ &\rightarrow Ax - \omega x \end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0^+$. Es folgt, dass $D(A) \subset D(B)$ und $Bx = (A - \omega I)x$ für alle $x \in D(A)$. Analog zeigt man, dass $D(B) \subset D(A)$, und somit $D(A) = D(B)$ und $B = A - \omega I$.

(ii) Man definiert

$$\|x\| := \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\|_X, \quad x \in X.$$

Es ist klar, dass $\|\cdot\|_X$ eine Norm auf X definiert und dass

$$\|x\|_X \leq \|x\| \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

d.h. $\|\cdot\|$ ist eine zu $\|\cdot\|_X$ äquivalente Norm. Die Kontraktionseigenschaft von $(S(t))_{t \geq 0}$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_X$ folgt sofort aus

$$\begin{aligned} \|S(t)x\| &= \sup_{s \geq 0} \|S(s)(S(t)x)\|_X \\ &= \sup_{s \geq 0} \|S(s+t)x\|_X \\ &= \sup_{s \geq t} \|S(s)x\|_X \\ &\leq \|x\| \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. □

Bevor wir nun den zentralen Satz von Hille-Yosida über die Charakterisierung von Generatoren von Kontraktionshalbgruppen angeben können, benötigen wir noch einen neuen Begriff.

Betrachten wir nämlich den Fall, dass $X = \mathbb{R}^n$ und $A \in M_n(\mathbb{R})$, dann wissen wir ja bereits aus der VL DGL1, dass die von A erzeugte Halbgruppe, die Matrixexponentialfunktion $(e^{tA})_{t \geq 0}$, nur dann eine Kontraktionshalbgruppe sein kann, wenn die Realteile sämtlicher Eigenwerte von $A \leq 0$ sind (genauer: $(e^{tA})_{t \geq 0}$ ist beschränkt, d.h. $\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ für alle $t \geq 0$ und ein $M \geq 1$, genau dann wenn die Realteile aller Eigenwerte von $A \leq 0$ sind und zusätzlich diejenigen Eigenwerte mit Realteil = 0 halbeinfach sind). Es ist somit nicht verwunderlich, dass wir auch im unendlich-dimensionalen so etwas wie die „Eigenwerte“ eines linearen unbeschränkten Operators A betrachten und Bedingungen an diese stellen müssen, um zu garantieren, dass A eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt.

Definition 1.14. Sei $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ein abgeschlossener linearer Operator in X . Dann ist $\varrho(A)$ definiert durch

$$\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A) \text{ ist invertierbar in } \mathcal{L}(X)\}$$

die **Resolventenmenge** von A .

Das Komplement, d.h. die Menge

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$$

bezeichnet man als das **Spektrum** von A .

Für $\lambda \in \varrho(A)$ ist

$$R_A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

die sog. **Resolvente** von A im Punkt λ . Die Familie der Operatoren $(R_A(\lambda))_{\lambda \in \varrho(A)}$ bezeichnet man als **Resolventenfamilie** (oder kurz: **Resolvente**) von A .

Bemerkungen:

1.) Mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen sieht man leicht, dass $\lambda \in \mathbb{C}$ Element der Resolventenmenge ist, genau dann wenn $(\lambda I - A) : D(A) \subset X \rightarrow X$ bijektiv ist. In der Tat ist nämlich $\lambda I - A$ abgeschlossen („stetige Störungen von abgeschlossenen Operatoren sind abgeschlossen“). Ist nun $(\lambda I - A) : D(A) \rightarrow X$ abgeschlossen und bijektiv, so ist auch der inverse Operator $(\lambda I - A)^{-1} : X \rightarrow X$ abgeschlossen und somit nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen automatisch stetig.

2.) Die Resolventenmenge ist eine offene Teilmenge von \mathbb{C} . Dies sieht man leicht wie folgt:

Wenn $\lambda \in \varrho(A)$ und $\mu \in \mathbb{C}$, dann ergibt sich aus der Darstellung

$$\mu I - A = \lambda I - A + (\mu - \lambda)I = (I - (\lambda - \mu)R_A(\lambda))(\lambda I - A)$$

dass $(\mu I - A) : D(A) \rightarrow X$ bijektiv ist genau dann, wenn $I - (\lambda - \mu)R_A(\lambda)$ invertierbar ist. Dies ist aber, wie wir bereits wissen, der Fall, wenn $|\lambda - \mu| \|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, d.h. wenn $|\lambda - \mu| < 1/\|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)}$. In diesem Fall ist dann (Neumann'sche Reihe!)

$$\begin{aligned} R_A(\mu) &= R_A(\lambda)(I - (\lambda - \mu)R_A(\lambda))^{-1} \\ &= R_A(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_A(\lambda)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_A(\lambda)^{n+1}. \end{aligned}$$

3.) Das Spektrum eines linearen abgeschlossenen Operators ist somit abgeschlossen. Das ist aber auch so ziemlich alles, was man allgemein über das Spektrum eines linearen abgeschlossenen Operators aussagen kann. Insbesondere kann das Spektrum eines solchen Operators leer sein oder aber, das ist der andere Extremfall, die gesamte komplexe Ebene umfassen.

Beispiele:

Betrachte auf $X = C([0, 1])$ die Differential-Operatoren

$$A_i f = f' \quad \text{für } i = 1, 2$$

mit jeweiligem Definitionsbereich

$$D(A_1) = C^1([0, 1])$$

bzw.

$$D(A_2) = \{f \in C^1([0, 1]); f(1) = 0\}.$$

Es ist klar, dass es sich hier um lineare abgeschlossene Operatoren handelt. Zudem ist für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion $f_\lambda(t) := e^{\lambda t}$, $t \in [0, 1]$, eine nicht-triviale Lösung der Gleichung

$$(\lambda I - A_1)f_\lambda = 0.$$

Folglich ist $(\lambda I - A_1) : D(A_1) \rightarrow X$ für kein $\lambda \in \mathbb{C}$ bijektiv und somit $\sigma(A_1) = \mathbb{C}$.

Auf der anderen Seite ist die Operator-Gleichung

$$\lambda f - A_2 f = g$$

äquivalent zum AWP

$$\begin{aligned} \lambda f - f' &= g \quad \text{auf } [0, 1] \\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses besitzt aber (vgl. VL DGL1) für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ und $g \in C([0, 1])$ die eindeutige Lösung

$$f(t) = \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} g(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

in X . Somit ist $(\lambda I - A_2) : D(A_2) \rightarrow X$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ bijektiv mit Umkehrabbildung

$$R_{A_2}(\lambda)g(t) = \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} g(s) ds, \quad t \in [0, 1], g \in X.$$

Insbesondere ist $\sigma(A_2) = \emptyset$.

Nun also der fundamentale

Satz 1.15 (Hille-Yosida, 1948). *Ein linearer Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ist genau dann der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ wenn gilt:*

- 1.) $D(A)$ ist dicht in X und A ist abgeschlossen
- 2.) $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ und $\|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.

Beweis:

(Notwendigkeit der Bedingungen 1.) und 2.): Wegen Korollar 1.1 ist nur noch 2.) zu zeigen. Wir definieren dazu für $\lambda > 0$ und $x \in X$

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt$$

(dies ist die „Laplace-Transformierte“ der Funktion $S(\cdot)x$).

Das uneigentliche Integral ist hierbei wohldefiniert¹, da $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ stetig, beschränkt ($\|S(t)x\|_X \leq \|x\|_X$ für alle $t \geq 0$) und $\lambda > 0$. Es folgt nun leicht, dass $R(\lambda)$ ein beschränkter linearer Operator auf X mit

$$\|R(\lambda)x\|_X \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|S(t)x\|_X \, dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\|_X \, dt = \frac{1}{\lambda} \|x\|_X.$$

Zwischenbemerkung: Die Notation $R(\lambda)$ ist nicht zufällig gewählt. Es wird sich herausstellen, dass es sich bei den Operatoren $R(\lambda)$ tatsächlich um die Resolventen $R_A(\lambda)$ des Operators A handelt.

Man sieht übrigens leicht, dass für positive $\lambda \in \varrho(A)$ tatsächlich die Gleichheit $R(\lambda) = R_A(\lambda)$ gilt. In der Tat besitzt die Halbgruppe $(e^{-\lambda t} S(t))_{t \geq 0}$ nach Lemma 1.13 auf Seite 18 (i) den Generator $A - \lambda I$. Zudem ist für $x \in D(A)$ nach Lemma 1.10 auf Seite 15 (iii) die Funktion $t \mapsto e^{-\lambda t} S(t)x$ stetig differenzierbar mit $\frac{d}{dt} e^{-\lambda t} S(t)x = (A - \lambda I)S(t)x$. Somit ist

$$\begin{aligned} R(\lambda)x &= (\lambda I - A)^{-1} \int_0^\infty (\lambda I - A) e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \\ &= (\lambda I - A)^{-1} \int_0^\infty -\frac{d}{dt} (e^{-\lambda t} S(t)x) \, dt \\ &= (\lambda I - A)^{-1} x, \end{aligned}$$

da $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} S(t)x = 0$ in X .

Diese Beobachtung motiviert die Definition von $R(\lambda)$ oben. Leider hilft uns die Beobachtung nicht weiter, da wir an dieser Stelle im Beweis ja noch gar nicht gezeigt haben, dass $]0, \infty[\subset \varrho(A)$.

Zurück zum Beweis: Für $h > 0$, $x \in X$ folgt mit der Halbgruppeneigenschaft, dass

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t+h)x \, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda(t+h)} S(t+h)x \, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt - e^{\lambda h} \left(\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right) \\ &\rightarrow \lambda R(\lambda)x - x \end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0^+$ (die Konvergenz des zweiten Terms folgt einfach mit der Stetigkeit des Integranden). Es folgt, dass für alle $x \in X$, $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ und

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Dies ist aber äquivalent zur Operatorgleichung

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I,$$

d.h. der Operator $R(\lambda)$ ist die Rechtsinverse des Operators $\lambda I - A$. Wir werden nun zeigen, dass

$$AR(\lambda) = R(\lambda)A \quad \text{auf } D(A). \quad (1.8)$$

¹im Sinne von: $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda t} S(t)x \, dt$ existiert in X

Dann folgt sofort, dass auch $R(\lambda)(\lambda I - A) = I$ auf $D(A)$. Somit ist dann aber $(\lambda I - A) : D(A) \rightarrow X$ bijektiv und $R_A(\lambda) = R(\lambda)$.

Sei also $x \in D(A)$, $\lambda > 0$. Wir wissen bereits, dass $R(\lambda)x \in D(A)$. Die gewünschte Identität $R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x$, d.h. die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax \, dt = A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right),$$

bedeutet, dass wir zeigen müssen, dass der abgeschlossene Operator A „aus dem Integral herausgezogen“ werden kann. Ein Resultat dieser Art haben wir bislang nur für stetige, auf ganz X definierte lineare Operatoren kennengelernt.

Der Beweis erfolgt in 2 Schritten. Zunächst erinnern wir daran, dass

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)x \, dt.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $t \mapsto e^{-\lambda t} S(t)x$, ist das (Bochner-)Integral $w_n := \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)x \, dt$ ein klassisches (vektorwertiges) Riemann-Integral, d.h. $w_n = \lim_{k \rightarrow \infty} w_{n,k}$ mit

$$w_{n,k} = \frac{n}{k} \sum_{j=1}^k e^{-\lambda \xi_j} S(\xi_j)x \quad \text{mit} \quad \frac{(j-1)n}{k} \leq \xi_j \leq \frac{jn}{k}$$

mit beliebigen Zwischenstellen ξ_j .

Da $S(\xi_j)x \in D(A)$ für alle j nach Lemma 1.10 auf Seite 15 (iii) und $D(A)$ ein linearer Teilraum, ist $w_{n,k} \in D(A)$ für alle k . Desweiteren ist

$$\begin{aligned} Aw_{n,k} &= \frac{n}{k} \sum_{j=1}^k e^{-\lambda \xi_j} AS(\xi_j)x \\ &= \frac{n}{k} \sum_{j=1}^k e^{-\lambda \xi_j} S(\xi_j)Ax, \end{aligned}$$

(hier wurde noch einmal Lemma 1.10 auf Seite 15 (iii) benutzt). Da die Funktion $t \in [0, n] \mapsto e^{-\lambda t} S(t)Ax$ stetig ist, konvergiert die rechte Seite, für $k \rightarrow \infty$, gegen das Riemann-Integral $z_n := \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)Ax \, dt$. Da A abgeschlossen ist, folgt

$$w_n \in D(A) \text{ und } Aw_n = z_n,$$

d.h. aber gerade

$$A \left(\int_0^n e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right) = \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)Ax \, dt.$$

Da nun aber

$$w_n \in D(A), \quad w_n \rightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \text{ in } X \text{ für } n \rightarrow \infty$$

und

$$\begin{aligned} Aw_n &= \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)Ax \, dt \\ &\rightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax \, dt \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(die Konvergenz des uneigentlichen Integrals folgt mit den selben Argumenten wie oben mit Ax anstelle von x), folgt ein weiteres Mal durch die Abgeschlossenheit von A

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \in D(A) \text{ und} \\ A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax \, dt. \end{aligned}$$

Es folgt nun sofort mit der Definition von $R(\lambda)$, dass

$$R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x,$$

was zu zeigen war.

Hinlänglichlichkeit der Bedingungen 1.) und 2.): Die Idee ist, den unbeschränkten Operator A durch eine geeignete Folge von stetigen Operatoren A_λ zu approximieren und zu zeigen, dass die von den Operatoren A_λ erzeugten gleichmäßig stetigen Halbgruppen $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ in geeigneter Weise gegen eine Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ konvergieren, deren Erzeuger A ist.

Wir benötigen dazu einige Lemmata:

Lemma 1.16 (Resolventengleichung). Sei $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt:

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda)R_A(\lambda)R_A(\mu).$$

Beweis:

durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} (R_A(\lambda) - R_A(\mu))x &= R_A(\lambda)((\mu I - A)R_A(\mu)x - (\lambda I - A)R_A(\mu)x) \\ &= R_A(\lambda)((\mu I - A - \lambda I + A)R_A(\mu)x) \\ &= (\mu - \lambda)R_A(\lambda)R_A(\mu)x \end{aligned}$$

für alle $x \in X$. □

Bemerkung: Aus der Resolventengleichung folgt sofort, dass die Operatoren $R_A(\lambda)$ und $R_A(\mu)$ für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ miteinander kommutieren.

Lemma 1.17. Der Operator A erfülle die Bedingungen 1.) und 2.) aus Satz 1.15 auf Seite 20. Dann gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_A(\lambda)x = x \quad \text{für alle } x \in X.$$

Beweis:

Nach Definition der Resolvente ist $\lambda R_A(\lambda)x - AR_A(\lambda)x = x$ für alle $x \in X$, und somit

$$(\lambda R_A(\lambda) - I)x = AR_A(\lambda)x \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sei nun zunächst $x \in D(A)$. Dann gilt $R_A(\lambda)Ax = R_A(\lambda)(A - \lambda I)x + \lambda R_A(\lambda)x = (\lambda R_A(\lambda) - I)x$, d.h.

$$(\lambda R_A(\lambda) - I)x = R_A(\lambda)Ax \quad \text{für alle } x \in D(A).$$

Mit Voraussetzung 2.) folgt somit

$$\|\lambda R_A(\lambda)x - x\|_X \leq \frac{\|Ax\|_X}{\lambda} \rightarrow 0$$

für $\lambda \rightarrow \infty$.

Aus der Dichtheit von $D(A)$ in X und da $\|\lambda R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ folgt sofort, dass dann auch $\lambda R_A(\lambda)(x) \rightarrow x$ für $\lambda \rightarrow \infty$ für alle $x \in X$. □

Bemerkung: Für lineare Operatoren A in einem Hilbertraum $X = H$, für die gilt, dass $\tilde{A} = -A$ maximal monoton ist, ist es das Ergebnis aus Lemma 1.17 bereits aus der VL DGL II bekannt.

Wir definieren nun für $\lambda > 0$ die sog. **Yosida-Approximation von A**

$$A_\lambda := \lambda A R_A(\lambda) = \lambda^2 R_A(\lambda) - \lambda I.$$

Wir benötigen im folgenden

Lemma 1.18. *Der Operator A erfülle wieder die Bedingungen 1.) und 2.) aus Satz 1.15 auf Seite 20. Dann gilt:*

- (i) $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ für alle $\lambda > 0$
- (ii) A_λ und A_μ kommutieren für alle $\lambda, \mu > 0$
- (iii) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$ für alle $x \in D(A)$

Beweis:

(i) ist klar nach der Definition, da $R_A(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$.

(ii) folgt mit Hilfe der Definition und der Tatsache, dass die Resolventen miteinander kommutieren.

(iii) Da für $\lambda > 0$ und $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \lambda R_A(\lambda)Ax &= -\lambda R_A(\lambda)(\lambda I - A)x + \lambda^2 R_A(\lambda)x \\ &= \lambda^2 R_A(\lambda)x - \lambda x \\ &= \lambda A R_A(\lambda)x \\ &= A_\lambda x, \end{aligned}$$

folgt mit Hilfe von Lemma 1.17 auf der vorherigen Seite, dass

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$$

für alle $x \in D(A)$. □

Wir haben nun die notwendigen Hilfsmittel, um zeigen zu können, dass die Bedingungen 1.) und 2.) hinreichend dafür sind, dass der Operator A eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe generiert.

Nach Lemma 1.18 und den Ergebnissen des ersten Abschnitts erzeugt die Yosida-Approximation A_λ von A für jedes $\lambda > 0$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$. Mit Hilfe der Definition von A_λ und der Tatsache, dass für kommutierende Operatoren $B_1, B_2 \in \mathcal{L}(X)$ gilt, dass

$$e^{t(B_1+B_2)} = e^{tB_1}e^{tB_2} \quad \forall t \geq 0,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{tA_\lambda} &= e^{t(\lambda^2 R_A(\lambda) - \lambda I)} \\ &= e^{t\lambda^2 R_A(\lambda)} e^{-t\lambda I} \\ &= e^{t\lambda^2 R_A(\lambda)} e^{-t\lambda I} \\ &= e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 R_A(\lambda)} \end{aligned}$$

und somit ist, dank Voraussetzung 2.),

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|e^{t\lambda^2 R_A(\lambda)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|e^{-t\lambda I}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)}} \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \cdot 1/\lambda} \\ &= 1, \end{aligned}$$

d.h. $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ ist eine Kontraktionshalbgruppe, für jedes $\lambda > 0$.

Um die Konvergenz der Funktionen $t \in [0, \infty[\mapsto e^{tA_\lambda}x$ für $\lambda \rightarrow 0$ nachzuweisen, zeigen wir zunächst, dass für alle $\lambda, \mu > 0$, $x \in X$ und $t \geq 0$, folgende Abschätzung gilt:

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_X.$$

Mit analogen Argumenten wie im Beweis von Satz 1.6 zeigt man

$$\begin{aligned} e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tA_\mu} e^{ts(A_\lambda - A_\mu)} x \right) ds, \end{aligned}$$

weil mit A_λ und A_μ auch die Operatoren e^{tA_λ} und e^{sA_μ} für alle $t, s \geq 0$ miteinander kommutieren. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(e^{tA_\mu} e^{ts(A_\lambda - A_\mu)} x \right) &= e^{tA_\mu} e^{ts(A_\lambda - A_\mu)} t(A_\lambda - A_\mu)x \\ &= t e^{t(1-s)A_\mu} e^{tsA_\lambda} (A_\lambda - A_\mu)x. \end{aligned}$$

Da die von der Yosida-Approximation erzeugten Halbgruppen Kontraktionshalbgruppen sind, folgt nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &\leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{ds} \left(e^{tA_\mu} e^{ts(A_\lambda - A_\mu)} x \right) \right\|_X ds \\ &\leq \int_0^1 \|t e^{t(1-s)A_\mu} e^{tsA_\lambda} (A_\lambda - A_\mu)x\|_X ds \\ &\leq t\|(A_\lambda - A_\mu)x\|_X. \end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 1.18 auf der vorherigen Seite folgt somit, dass, für jedes $x \in D(A)$ und $T > 0$ beliebig, die Funktionen $t \in [0, T] \mapsto e^{tA_\lambda}x$ eine Cauchy-Folge in $C([0, T]; X)$ (ausgestattet mit der üblichen Supremumsnorm) bilden. Da $C([0, T]; X)$ vollständig ist, konvergiert die Folge für $\lambda \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf jedem Intervall $[0, T]$, $T > 0$, gegen eine stetige Funktion. Wir können so auf $D(A)$ für jedes $t \geq 0$ einen Operator $S(t)$ definieren durch

$$S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \quad \forall x \in D(A).$$

Es ist klar, dass der so definierte Operator $S(t) : D(A) \subset X \rightarrow X$ linear ist. Ausserdem ist

$$\|S(t)x\|_X = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|e^{tA_\lambda}x\|_X \leq \|x\|_X$$

für alle $x \in D(A)$, d.h. $S(t)$ ist stetig auf $D(A)$. Da $D(A)$ dicht in X nach Voraussetzung 1.), lässt sich $S(t)$ stetig zu einer Kontraktion auf X fortsetzen. Wir bezeichnen diese Fortsetzung wieder mit $S(t)$. Wegen der Kontraktionseigenschaft von e^{tA_λ} und $S(t)$ folgt nun sogar die gleichmäßige Konvergenz von $e^{tA_\lambda}x \rightarrow S(\cdot)x$ auf $[0, T]$, für alle $x \in X$. Sei dazu $x \in X$ beliebig, $\epsilon > 0$ und $\hat{x} \in D(A)$ mit $\|x - \hat{x}\|_X < \epsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|S(t)x - e^{tA_\lambda}x\|_X &\leq \|S(t)x - S(t)\hat{x}\|_X + \|S(t)\hat{x} - e^{tA_\lambda}\hat{x}\|_X + \|e^{tA_\lambda}\hat{x} - e^{tA_\lambda}x\|_X \\ &\leq \|x - \hat{x}\|_X + \|S(t)\hat{x} - e^{tA_\lambda}\hat{x}\|_X + \|x - \hat{x}\|_X \\ &\leq 2\epsilon + \|S(t)\hat{x} - e^{tA_\lambda}\hat{x}\|_X. \end{aligned}$$

Wegen der bereits gezeigten gleichmäßigen Konvergenz der approximativen Lösungen für Anfangswerte in $D(A)$, folgt somit

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|S(t)x - e^{tA_\lambda}x\|_X \leq 2\epsilon$$

und damit die Behauptung.

Die so erhaltene Familie $(S(t))_{t \geq 0}$ ist eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von Kontraktionen auf X : Die starke Stetigkeit

$$\|S(t)x - x\|_X \rightarrow 0^+ \quad \text{für } t \rightarrow 0, \forall x \in X,$$

folgt sofort aus der starken Stetigkeit der Halbgruppen $(e^{tA})_{t \geq 0}$ und der Tatsache, dass die Funktionen $t \mapsto e^{tA}x$ gleichmäßig auf $[0, T]$, $T > 0$, gegen die Funktion $t \mapsto S(t)x$ konvergieren.

Die Halbgruppeneigenschaft $S(t+s)x = S(t)S(s)x$ und $S(0)x = x$ erhält man ebenfalls leicht durch Übergang zum Limes mit Hilfe der Halbgruppeneigenschaft der Familie $(e^{tA})_{t \geq 0}$.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass A der infinitesimale Erzeuger der Kontraktionshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ ist. Sei B der Erzeuger von $(S(t))_{t \geq 0}$. Wir müssen zeigen, dass $B = A$. Sei zunächst $x \in D(A)$. Dann ist

$$\begin{aligned} S(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x - x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d}{ds} e^{sA_\lambda}x \, ds \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds. \end{aligned}$$

Da dank der Kontraktionseigenschaft

$$\begin{aligned} \|e^{sA_\lambda} A_\lambda x - S(s)Ax\|_X &\leq \|e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\|_X + \|e^{sA_\lambda} Ax - S(s)Ax\|_X \\ &\leq \|A_\lambda x - Ax\|_X + \|e^{sA_\lambda} Ax - S(s)Ax\|_X \end{aligned}$$

und die Funktion $s \mapsto e^{sA_\lambda} Ax$ gleichmäßig auf $[0, T]$, $T > 0$, gegen $s \mapsto S(s)Ax$ konvergiert, konvergiert der Integrand $e^{sA_\lambda} A_\lambda x$ gleichmäßig auf $[0, t]$ gegen $s \mapsto S(s)Ax$ und wir dürfen Limes und Integration vertauschen. Somit erhalten wir

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Ax \, ds$$

für alle $t > 0$, $x \in D(A)$. Aus der Stetigkeit von $s \mapsto S(s)x$ folgt sofort die Existenz des Limes

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = S(0)Ax = Ax$$

und somit ist gezeigt, dass $D(A) \subset D(B)$ und $Bx = Ax$ für alle $x \in D(A)$.

Nach Voraussetzung 2.) ist $1 \in \rho(A)$, d.h. $(I - A) : D(A) \rightarrow X$ bijektiv. Als Erzeuger der Kontraktionshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ erfüllt aber nach dem ersten Teil des Beweises (Notwendigkeit) auch der Operator B die Bedingung 2.), d.h. auch $(I - B) : D(B) \rightarrow X$ ist bijektiv. Hieraus folgt nun leicht, dass $D(B) = D(A)$ (und somit $A = B$). Ist nämlich $x \in D(B)$, $f := x - Bx$, so ist auf der einen Seite $x = (I - B)^{-1}f$ die eindeutige Lösung der Gleichung $x - Bx = f$. Auf der anderen Seite ist $\tilde{x} = (I - A)^{-1}f$ die eindeutige Lösung der Gleichung $\tilde{x} - A\tilde{x} = f$. Da $D(A) \subset D(B)$ und $A = B$ auf $D(A)$, folgt, dass \tilde{x} dann auch Lösung der Gleichung $x - Bx = f$ ist. Die Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichung impliziert $\tilde{x} = x$ und somit $\tilde{x} \in D(A)$. Folglich ist $D(B) \subset D(A)$, was zu zeigen war. □

Bemerkungen:

1.) Man zeigt leicht, dass die Bedingungen 1.) und 2.) im Satz von Hille-Yosida äquivalent sind zu den Bedingungen 1.) und 2.)*:

$$\begin{aligned} \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} &\subset \rho(A) \quad \text{und} \\ \|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) > 0. \end{aligned}$$

2.) Ist $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ein linearer abgeschlossener Operator, der nicht dicht definiert ist, aber die Bedingung 2.) des Satzes von Hille-Yosida erfüllt, dann erfüllt die Einschränkung von A auf den

Banachraum $X_0 := \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$ (ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_X$), d.h. der Operator $A_0 = A|_{X_0}$ definiert durch

$$\begin{aligned} D(A_0) &= \{x \in D(A); Ax \in X_0\} \\ A_0x &= Ax \quad \text{für alle } x \in D(A_0), \end{aligned}$$

die Bedingungen 1.) und 2.) und ist somit Generator einer Kontraktionshalbgruppe auf X_0 . Überlegen wir uns nur kurz, dass $D(A_0)$ dicht in X_0 ist. Der Nachweis der übrigen Eigenschaften ist leicht. Sei zunächst $x \in D(A)$; betrachte für $n \in \mathbb{N}$

$$x_n := nR_A(n)x.$$

Dann ist

$$x_n \in D(A) \quad \text{und} \quad Ax_n = nAR_A(n)x = n(x_n - x) \in D(A)$$

(da $x_n, x \in D(A)$ und $D(A)$ ein linearer Raum), und somit ist $x_n = nR_A(n)x \in D(A_0)$.

Ausserdem gilt

$$x_n = x + AR_A(n)x = x + R_A(n)Ax \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty),$$

da $\|R_A(n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/n$.

Da $D(A)$ dicht in X_0 und, wie eben gezeigt, jedes Element in $D(A)$ durch eine Folge von Elementen $(x_n)_n \in D(A_0)$ approximiert werden kann, folgt, dass $D(A_0)$ dicht in X_0 ist.

Beispiel:

Sei $X = C([0, 1])$ ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, $D(A) = \{f \in C^1([0, 1]); f(1) = 0\}$, $Af = f'$ für $f \in D(A)$.

Wir haben bereits gesehen, dass das Spektrum des linearen abgeschlossenen Operators A leer ist und die Resolvente von A in $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$R_A(\lambda)f(t) = \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s) ds, \quad t \in [0, 1], f \in X.$$

Folglich erhalten wir als Abschätzung für die Resolvente

$$\begin{aligned} \|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \right| \\ &\leq \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} ds \\ &= e^{\lambda t} \frac{e^{\lambda t} - e^\lambda}{\lambda} \\ &\leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Allerdings ist A nicht dicht definiert: $X_0 := \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_\infty} = \{f \in X; f(1) = 0\}$. Der eingeschränkte Operator $A_0 := A|_{X_0}$ erzeugt somit eine Kontraktionshalbgruppe $(S_0(t))_{t \geq 0}$ auf X_0 .

Mit Hilfe des Satzes von Hille-Yosida und entsprechender Umnormierung des Raumes (vgl. Lemma 1.13 auf Seite 18 (ii)) können wir nun die Erzeuger von beschränkten \mathcal{C}_0 -Halbgruppen charakterisieren.

Satz 1.19. *Ein linearer Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ist genau dann der Erzeuger einer beschränkten \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $S(t)_{t \geq 0}$ mit $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ für alle $t \geq 0$, wenn gilt:*

- 1.) $D(A)$ ist dicht in X und A ist abgeschlossen
- 2.) $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ und $\|R_A(\lambda)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda^n}$ für alle $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Im Gegensatz zum Satz von Hille-Yosida ist hier eine unendliche Familie von Abschätzungen für die Resolvente von A zu zeigen. Ein Operator A , der die Bedingung 1.) erfüllt, für den gilt $]0, \infty[\subset \rho(A)$ und ein $M > 0$ existiert, so dass $\|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M/\lambda$ für alle $\lambda > 0$ ist **nicht notwendig** der Erzeuger einer beschränkten \mathcal{C}_0 -Halbgruppe.

Beweis:

Die Notwendigkeit der Bedingungen 1.) und 2.) ergibt sich leicht aus dem Satz von Hille-Yosida bei Übergang zur Norm

$$\|x\| := \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\|_X$$

in X . Wie bereits im Beweis des Lemma 1.13 auf Seite 18 (ii) gesehen, ist $(S(t))_{t \geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe in $(X, \|\cdot\|)$. Nach dem Satz von Hille-Yosida erfüllt der Generator A von $(S(t))_{t \geq 0}$ (der sich bei Übergang zu einer äquivalenten Norm in X ja bekanntlich nicht ändert) die Bedingung 1.), $]0, \infty[\subset \rho(A)$ und

$$\|R_A(\lambda)x\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0, x \in X.$$

Damit ist aber auch

$$\|R_A(\lambda)^n x\| \leq \frac{\|x\|}{\lambda^n} \quad \forall \lambda > 0, x \in X \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da

$$\|x\|_X \leq \|x\| \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

folgen daraus sofort die gesuchten Abschätzungen für die Resolvente in der $\|\cdot\|_X$ -Norm.

Zeigen wir nun, dass ein Operator, der die Bedingungen 1.) und 2.) erfüllt, eine beschränkte \mathcal{C}_0 -Halbgruppe erzeugt. Um sich wieder auf den Satz von Hille-Yosida beziehen zu können, müssen wir versuchen, eine weitere zu $\|\cdot\|_X$ äquivalente Norm auf X zu definieren bzgl. der die Resolventen $R_A(\lambda)$ ($\lambda > 0$) von A kontraktiv sind. Aus naheliegenden Gründen können wir nicht die oben verwendete Norm $\|\cdot\|$ verwenden...

Konstruktion der Norm:

Wir definieren zunächst für $\mu > 0$:

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R_A(\mu)^n x\|_X, \quad x \in X.$$

Offensichtlich gilt

$$\|x\|_X \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

(mit Voraussetzung 2.)) und $\|\cdot\|_\mu$ ist eine zu $\|\cdot\|_X$ äquivalente Norm auf X .

Weiter gilt

$$\|\mu R_A(\mu)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \quad \forall x \in X.$$

Für $0 < \lambda \leq \mu$ erhalten wir mit Hilfe der Identität für beliebiges $y \in X$

$$\begin{aligned} x &= R_A(\lambda)y \\ &= R_A(\mu)(y + (\mu - \lambda)x) \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|R_A(\lambda)y\|_\mu &= \frac{1}{\mu} \|\mu R_A(\mu)(y + (\mu - \lambda)x)\|_\mu \\ &\leq \frac{1}{\mu} \|y\|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \|x\|_\mu, \end{aligned}$$

woraus sofort

$$\|R_A(\lambda)y\|_\mu \leq \frac{\|y\|_\mu}{\lambda} \quad \forall y \in X$$

folgt. Somit $R_A(\lambda)$ eine Kontraktion bzgl. der $\|\cdot\|_\mu$ -Norm auf X (für $0 < \lambda \leq \mu$) und gleiches gilt dann natürlich auch für alle Iterierten von $R_A(\lambda)$. Es folgt

$$\|\lambda^n R_A(\lambda)^n x\|_X \leq \|\lambda^n R_A(\lambda)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \quad \forall 0 < \lambda \leq \mu, x \in X, n \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Wir können nun auf der linken Seite das Supremum über $n \in \mathbb{N}$ bilden und erhalten so

$$\underbrace{\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\lambda^n R_A(\lambda)^n x\|_X}_{\|x\|_\lambda} \leq \|x\|_\mu \quad \forall 0 < \lambda \leq \mu, x \in X.$$

Wir haben somit gezeigt, dass

$$\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu \quad \forall x \in X, 0 < \lambda \leq \mu.$$

aufgrund dieser Monotonie und der Beschränktheit (Erinnerung: $\|x\|_\mu \leq M\|x\|_X$) existiert

$$|x| := \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|x\|_\mu$$

für alle $x \in X$ und definiert eine Norm auf X , die der Abschätzung

$$\|x\|_X \leq |x| \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X \quad (1.10)$$

genügt und somit zu $\|\cdot\|_X$ äquivalent ist.

Aus der zweiten Ungleichung in (1.9) folgt sofort, dass $R_A(\lambda)$ für alle $\lambda > 0$ eine Kontraktion in der $|\cdot|$ -Norm ist. Mit dem Satz von Hille-Yosida folgt nun, dass A eine Kontraktionshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf $(X, |\cdot|)$ erzeugt. Bzgl. der ursprünglichen Norm ist $(S(t))_{t \geq 0}$ wegen (1.10) eine durch die Konstante M beschränkte Halbgruppe mit Erzeuger A . \square

Aus dem letzten Satz folgt nun mit einfacher Skalierung (vgl. Lemma 1.13 auf Seite 18 (i))

Satz 1.20. *Ein linearer Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ist genau dann der Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ mit $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$, wenn gilt:*

- 1.) $D(A)$ ist dicht in X und A ist abgeschlossen
- 2.) $]\omega, +\infty[\subset \varrho(A)$ und $\|R_A(\lambda)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$ für alle $\lambda > \omega$ und $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

\Rightarrow : Ist A der Erzeuger der \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$, so ist $A - \omega I$ der Generator der skalierten Halbgruppe $(e^{-\omega t} S(t))_{t \geq 0}$. Nach Lemma 1.13 auf Seite 18 ist die skalierte Halbgruppe beschränkt:

$$\|e^{-\omega t} S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \quad \forall t \geq 0.$$

Nach Satz 1.19 auf Seite 27 gilt somit

$$\underbrace{D(A - \omega I)}_{= \overline{D(A)}} = X,$$

$A - \omega I$ ist abgeschlossen,

woraus sofort die Abgeschlossenheit von A folgt. Desweiteren gilt

$$]0, \infty[\subset \varrho(A - \omega I),$$

d.h. $\lambda I - (A - \omega I) = (\lambda - \omega)I - A : D(A) \rightarrow X$ ist bijektiv für alle $\lambda > 0$. Somit folgt sofort

$$]\omega, \infty[\subset \varrho(A).$$

Aus der Abschätzung

$$\|R_{A-\omega I}(\lambda)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \lambda \in \varrho(A - \omega I)$$

schliesslich folgt mit der Identität

$$R_{A-\omega I}(\lambda) = R_A(\lambda + \omega) \quad \forall \lambda > 0$$

die gesuchte Abschätzung

$$\|R_A(\mu)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\mu^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mu > \omega.$$

Die umgekehrte Implikation \Leftarrow zeigt man analog. □

Bemerkungen:

1.) Wie im Falle des Satzes von Hille-Yosida kann gezeigt werden, dass die Bedingung 2.) im Satz 1.19 auf Seite 27 durch folgende äquivalente Bedingung 2.)*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \subset \varrho(A) \text{ und} \\ \|\lambda^n R_A(\lambda)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda)^n} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

bzw. die entsprechende Bedingung im Satz 1.9 durch die Bedingungen 2.)*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > \omega\} \subset \varrho(A) \text{ und} \\ \|\lambda^n R_A(\lambda)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^n} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) > \omega \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

ersetzt werden kann.

2.) Erfüllt ein Operator A die Bedingungen des Satzes 1.19 auf Seite 27 bzw. 1.9 mit Ausnahme der Dichtheitseigenschaft des Definitionsbereiches, gilt analog zum Kontraktionsfall, dass der auf $X_0 = \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$ eingeschränkte Operator eine beschränkte bzw. \mathcal{C}_0 -Halbgruppe auf X_0 erzeugt.

3.) Aus der obigen Charakterisierung der Erzeuger von \mathcal{C}_0 -Halbgruppen folgt nun leicht die Charakterisierung der Erzeuger von C_0 -Gruppen. Dabei bezeichnet man als Erzeuger einer C_0 -Gruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ den Operator A definiert durch

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ für alle } x \in D(A) = \{x \in X; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existiert in } X\}.$$

Ist A der Generator einer C_0 -Gruppe, ergibt sich unmittelbar, dass A Generator der \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S_+(t))_{t \geq 0} := (S(t))_{t \geq 0}$ ist und $-A$ die \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $S_-(t)_{t \geq 0} := (S(-t))_{t \geq 0}$ erzeugt. Die Implikationen (a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c) des nachstehenden Satzes sind somit, unter Berücksichtigung von Satz 1.20 auf der vorherigen Seite, klar.

Satz 1.21. Für einen linearen Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ sind äquivalent:

- (a) A ist Erzeuger einer C_0 -Gruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ mit $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega|t|}$ für alle $t \in \mathbb{R}$
- (b) A , bzw. $-A$, ist Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S_+(t))_{t \geq 0}$, bzw. $(S_-(t))_{t \geq 0}$, mit $\|S_{\pm}(t)\| \leq M^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$
- (c) (i) $D(A)$ ist dicht in X und A ist abgeschlossen
 (ii) $\varrho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R}; |\lambda| > \omega\}$ und $\|R_A(\lambda)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| > \omega$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Es verbleibt nur noch zu zeigen, dass (c) \Rightarrow (a) gilt. Unter der Voraussetzung (c) folgt, wie bereits erwähnt, nach Satz 1.9 unmittelbar, dass A bzw. $-A$ \mathcal{C}_0 -Halbgruppen $(S_+(t))_{t \geq 0}$ bzw. $(S_-(t))_{t \geq 0}$ mit der entsprechenden Wachstumsbeschränkung erzeugen. Definieren wir nun die Familie $(S(t))_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(X)$ durch

$$S(t) := \begin{cases} S_+(t) & , t \geq 0 \\ S_-(-t) & , t < 0 \end{cases} ,$$

so ist klar, dass die Familie $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ stark stetig in 0 ist und zudem gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existiert genau dann, wenn } x \in D(A),$$

und für $x \in D(A)$ ist $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = Ax$.

Es verbleibt die Gruppeneigenschaft der Familie $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ zu zeigen.

Mittels des mittlerweile bekannten Tricks des Umnormierens und entsprechender Skalierung dürfen wir zudem annehmen, dass $M = 1$ und $\omega = 0$ und somit $(S_+(t))_{t \geq 0}$ und $(S_-(t))_{t \geq 0}$ Kontraktionshalbgruppen sind. Da A und $-A$ miteinander kommutieren, kommutieren auch die Resolventen $R_A(\lambda)$ und $R_{-A}(\lambda) = -R_A(-\lambda)$ sowie die Yosida-Approximationen $A_\lambda, (-A)_\lambda$ miteinander. Somit kommutieren auch die Operatoren der erzeugten gleichmäßig stetigen Halbgruppen e^{tA_λ} und $e^{s(-A)_\lambda}$, für alle $s, t \geq 0, \lambda > 0$, miteinander. Da diese bekanntlich gegen die Halbgruppen $(S_+(t))_{t \geq 0}$ bzw. $(S_-(t))_{t \geq 0}$ konvergieren, kommutieren so schliesslich auch die Operatoren $S_+(t)$ und $S_-(s)$ miteinander, für alle $s, t \geq 0$. Aufgrund dieser Eigenschaft rechnet man nun leicht nach, dass die Familie von Operatoren $(T(t))_{t \geq 0}$ definiert durch $T(t) = S_+(t)S_-(t)$, $t \geq 0$, eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von Operatoren (die Vertauschbarkeit der Operatoren sichert hierbei die Halbgruppeneigenschaft). Sei C der Generator der Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$. Für $x \in D(A) \cap D(-A) = D(A)$ gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{h \downarrow 0} \frac{S_+(h)S_-(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{S_+(h)(S_-(h)x - x)}{h} + \lim_{h \downarrow 0} \frac{S_+(h)x - x}{h} \\ &= -Ax + Ax \\ &= 0, \end{aligned}$$

und somit folgt, dass $D(A) \subset D(C)$ und $Cx = 0$ für alle $x \in D(A)$.

Nach Lemma 1.1 (iv) gilt zudem für alle $t \geq 0$, für alle $x \in D(C)$,

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Cx \, ds.$$

Hieraus folgt nun sofort, dass $T(t)x = x$ für alle $t \geq 0$, für alle $x \in D(A)$. Da $D(A)$ dicht in X ist und $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, folgt $T(t) = S_+(t)S_-(t) = I_X$ für alle $t \geq 0$. Somit ist jeder der Operatoren $S_+(t)$, $S_-(t)$ invertierbar und

$$S_+(t)^{-1} = S_-(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Nun lässt sich leicht nachrechnen, dass $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Gruppeneigenschaft genügt. Ist etwas $t < 0, s > 0$ mit $t + s > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} S_+(-t)S(t+s) &= S_+(-t)S_+(t+s) \\ &= S_+(s) \\ &= S(s). \end{aligned}$$

Durch Anwenden des inversen Operators $(S_+(-t))^{-1} = S_-(-t)$ ergibt sich so

$$S(t+s) = S_-(-t)S(s) = S(t)S(s)$$

nach Definition der Familie $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

□

Wenden wir uns nun wieder dem abstrakten homogenen Cauchy-Problem für einen linearen Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ zu:

$$(ACP)_h \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Dieses, bzw. das allgemeinere nicht-homogene abstrakte Cauchy-Problem

$$(ACP) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f, & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

mit $f : [0, \infty[\rightarrow X$, hatte unser Studium der \mathcal{C}_0 -Halbgruppen ja motiviert. Aus den bislang gewonnenen Erkenntnissen gelangen wir nun leicht zu folgendem

Satz 1.22. *Der lineare Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ sei Generator einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf X .*

Dann besitzt das abstrakte homogene Cauchy-Problem für alle $x \in D(A)$ eine eindeutige globale klassische Lösung $u : [0, \infty[\rightarrow X$. Diese ist gegeben durch $u(t) = S(t)x$ für alle $t \geq 0$.

Beweis:

Wir haben bereits gesehen, dass für $x \in D(A)$ die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto u(t) := S(t)x$ eine klassische Lösung von $(ACP)_h$ ist. Es ist also nur noch die Eindeutigkeit der klassischen Lösung zu zeigen. Sei dazu v eine weitere klassische Lösung von (ACP) auf $[0, \infty[$. Aufgrund der Linearität von A ist dann die Funktion $w := u - v$ offensichtlich klassische Lösung von $(ACP)_h$ zum Anfangswert $w(0) = 0$. Sei nun $T > 0$ und definiere

$$\Phi(t) := S(t)w(T - t), \quad t \in [0, T].$$

Offensichtlich ist dann

$$\Phi(T) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi(0) = w(T).$$

Ausserdem ist Φ stetig differenzierbar auf $[0, T]$ mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t) &= AS(t)w(T - t) - S(t)Aw(T - t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

auf $[0, T]$. Folglich ist Φ konstant auf $[0, T]$ und somit $w(T) = 0$. Da $T > 0$ beliebig, folgt $w \equiv 0$, d.h. aber $u \equiv v$. □

In Anbetracht von Satz 1.22 erscheint nun folgende Definition einer verallgemeinerten Lösung von $(ACP)_h$ natürlich:

Definition 1.23. *Der lineare Operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ sei Generator einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf X .*

*Für $x \in X$ heisst die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ **milde Lösung** des abstrakten Cauchy-Problems $(ACP)_h$.*

Bemerkungen:

1.) Wir haben bereits bei dem Beweis des Satzes von Hille-Yosida bemerkt, dass die klassische Lösung $t \in [0, \infty[\mapsto e^{tA_\lambda x}$ des approximierenden Cauchy-Problems für die Yosida-Approximation A_λ auch für $x \in X \setminus D(A)$ gleichmässig auf kompakten Intervallen gegen die stetige Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ konvergiert. Es ist daher in der Tat natürlich, diese (i.a. nicht differenzierbare) Funktion als eine „verallgemeinerte Lösung“ aufzufassen.

2.) Für $x \in X \setminus D(A)$ ist die Funktion $t \mapsto S(t)x$ niemals in 0 rechtsseitig differenzierbar und somit auf $[0, +\infty[$ grundsätzlich keine klassische Lösung.

Beispiel: $X = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $(S(t))_{t \geq 0}$ die (Links-)Translationshalbgruppe auf X gegeben durch $S(t)f = f(\cdot + t)$, $t \geq 0$, $f \in X$. Der Generator von $(S(t))_{t \geq 0}$ ist bekanntlich der Differentiationsoperator $A: Af = f'$ definiert auf $D(A) = \{f \in X; f \text{ differenzierbar mit } f' \in X\}$. Offensichtlich ist dann für eine nur stetige Funktion $f \in X \setminus D(A)$ die Funktion $t \mapsto f(\cdot + t)$ für kein $t \geq 0$ differenzierbar!

Dennoch ist es grundsätzlich möglich, dass auch für $x \in X \setminus D(A)$ die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ zumindestens für $t > 0$ (oder auch nur $t > t_0$ für ein festes $t_0 > 0$) differenzierbar ist und für $t > 0$ (bzw. $t > t_0$) die DGL im klassischen Sinne löst. Ist dies der Fall, sprechen wir von einem **Regularisierungseffekt** der Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$. Diese und andere Fragen untersuchen wir im Anschluss an das nun folgende Studium des nicht-homogenen ACPs. Ein triviales Beispiel einer regularisierend wirkenden Halbgruppe ist die folgende:

Beispiel: $X = C([0, 1])$, $D(A) = \{f \in X; f(1) = 0\}$, $Af = f'$ für $f \in D(A)$. Wie bereits gesehen erzeugt A eingeschränkt auf $X_0 := \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$ eine Kontraktionshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$. $S(t)$ ist, wie man sich leicht überzeugt, wieder eine Linkstranslation. Genauer: für $s \in [0, 1]$ ist

$$S(t)f(s) = \begin{cases} f(t+s), & \text{falls } t+s < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist natürlich für alle $t \geq 1$ $S(t)f = 0$ für jedes $f \in X_0$, und somit ist, für alle $f \in X_0$, die milde Lösung $t \mapsto S(t)f$ trivialerweise differenzierbar...

Glücklicherweise gibt es aber auch interessantere „echte“ Regularisierungseffekte.

Kapitel 2

Beispiele zum Satz von Hille Yosida

2.1 Lineare Boltzmann-Gleichung

Dieses Beispiel beschäftigt sich mit dem Neutronenfluss in einem Kernreaktor. Wir treffen folgende Annahmen:

- $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sei kompakt und konvex, mit nicht-leerem Inneren. Das Gebiet S stelle den Reaktor dar.
- $V = \{v \in \mathbb{R} : 0 < v_{\min} \leq v \leq v_{\max}\}$. V ist der Raum der möglichen Geschwindigkeiten v , die die Neutronen haben können.
- $n(s, v, t) :=$ Verteilungsdichte der Neutronen im Ort s mit der Geschwindigkeit v zur Zeit t .

Desweiteren treffen wir folgende Modellannahmen:

- die Neutronen bewegen sich mit ihrer jeweiligen Geschwindigkeit v
- die Neutronen werden mit einer Wahrscheinlichkeit σ , die von dem Ort und der Geschwindigkeit abhängt, absorbiert
- durch Kollisionen miteinander werden die Neutronen im Reaktor zerstreut („scattered“); der Beitrag dieses Effekts wird durch einen Kollisionskern („scattering kernel“) beschrieben, der von der Eingangsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit des Teilchen vor der Kollision), dem Ort und der Ausgangsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit nach der Kollision) abhängt.

Die Modellannahmen führen zu folgender partieller Differentialgleichung für die Verteilungsdichte:

$$\partial_t n(s, v, t) = \underbrace{-\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_s n(s, v, t)}_{=: A_0 \text{ Transport-Op.}} - \underbrace{\sigma(s, v) n(s, v, t)}_{=: B_\sigma \text{ Absorptions Op.}} + \underbrace{\int_V K(s, v, v') \eta(s, v', t) dv'}_{=: K \text{ scattering Op.}^1}$$

Im weiteren soll gelten:

- $\sigma : S \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine L^∞ -Funktion, $\sigma \geq 0$ fast überall auf $S \times V$
- $K : S \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch eine L^∞ -Funktion, $K \geq 0$ fast überall auf $S \times V \times V$.

Wir geben uns weiterhin noch eine Anfangsbedingung und eine Randbedingung vor:

$$\text{Anfangsbedingung: } n(s, v, 0) = n_0(s, v), \quad \text{für } (s, v) \in S \times V$$

$$\text{Randbedingung: } \vec{\nabla} n(s, v, t) = 0 \quad \text{wenn } (s, v) \in \partial S \times V \text{ und } s + tv \in S \text{ für } t > 0 \text{ klein}$$

¹Das ist der Kollisionsterm

Die obige Randbedingung soll ausdrücken, dass kein Neutronenfluss von außen in den Reaktor hinein stattfindet. Ein Neutronenfluss aus dem Reaktor heraus wird dagegen zugelassen.

Wir wollen nun mit obigem Rand-Anfangswertproblem ein abstraktes Cauchy-Problem assoziieren. Wir wählen dazu als Banachraum $X = L^1(S \times V)$. Wir werden sehen, dass der Transport-Operator A_0 , bei geeigneter Wahl des Definitionsbereiches, eine \mathcal{C}_0 -Kontraktions-Halbgruppe erzeugt. Der Absorptions-Operator ist ein einfacher Multiplikationsoperator und somit stetig, d.h. $B_\sigma \in \mathcal{L}(X)$. Auch der scattering-Operator K ist als Integraloperator

$$u \in X \mapsto \left\{ (s, v) \mapsto \int_V K(s, v, v') u(s, v') dv' \right\}$$

stetig, d.h. auch $K \in \mathcal{L}(X)$.

Der Definitionsbereich des Operators $A_0 + B_\sigma + K$ ist demnach derselbe wie der von A_0 . Wie dieser zu wählen ist, ist nicht auf den ersten Blick klar. In natürlicher Weise würde man $D(A_0) \subseteq \{n \in L^1(S \times V); \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_s n \in L^1(S \times V)\}$ wählen, wobei in die Definition von $D(A_0)$ auch noch die Randbedingung geeignet integriert werden muss. Für Funktionen $n \in L^1(S \times V)$ mit $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_s n \in L^1(S \times V)$ ist aber $\vec{\nabla}_s n$ nur f.ü. auf $S \times V$ definiert. Die Bedingung $\vec{\nabla}_s n = 0$ für $(s, v) \in \partial S \times V$ mit $s + tv \in S$ für $t > 0$ klein macht somit keinen Sinn, da letztere Menge eine Nullmenge ist.

Wir gehen deshalb den umgekehrten Weg und assoziieren zunächst einmal eine C_0 -Kontraktionshalbgruppe mit der ungestörten Transport-Gleichung. Hierzu benutzen wir die Charakteristikenmethode, die uns aus der VL DGL I bekannt ist. Der Definitionsbereich des Generators A_0 kann dann über die Halbgruppe bestimmt werden.

Die reine (ungestörte) Transport-Gleichung hat die Form:

$$\begin{cases} \partial_t n = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_s n & \text{in } S \times V \times \mathbb{R}^+ \\ \vec{\nabla}_s v = 0 & \text{für } s \in \partial S \text{ mit } s + tv \in S, \quad (t > 0 \text{ klein}) \\ n(s, v, 0) = n_0 & \text{in } X = S \times V \end{cases}$$

Erinnerung an die Methode der Charakteristiken:

In DGL I haben wir DGLen der Form

$$\begin{cases} y_t + c \cdot y_x = g(x)y & , t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (\text{wobei } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } c \in \mathbb{R}) \\ y(0, x) = y_0(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

gelöst. Dazu haben wir die charakteristischen Kurven bestimmt:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = c \\ X(0) = x_0 \end{cases} \implies X(t) = tc + x_0$$

Angenommen, y ist klassische Lösung von (2.1), dann gilt für $C(t) := y(t, X(t))$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}C(t) &= y_t(t, X(t)) + y_X(t, X(t)) \cdot \underbrace{\dot{X}(t)}_{=c} \\ &= g(X(t))y(t, X(t)) \\ &= g(tc + x_0) \cdot C(t) \\ C(0) &= y(0, x_0) = y_0(x_0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \implies C(t) &= y_0(x_0) \cdot \exp\left(\int_0^t g(sc + x_0) ds\right) \\ &= y(t, tc + x_0), \quad (\text{wobei } tc + x_0 = x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies y(t, x) &= y_0(x - ct) \cdot \exp\left(\int_0^t g(x + c \underbrace{(s-t)}_{=\sigma}) ds\right) \\ &= y_0(x - ct) \exp\left(\int_0^t g(x + c\sigma) d\sigma\right) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt für die Lösung der reinen Transportgleichung (i.e., im Fall $g = 0$): $y(t, x) = y_0(x - ct)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Das Anfangsdatum y_0 wird also mit Geschwindigkeit c nach rechts verschoben („transportiert“). Betrachtet man nun eine solche Transportgleichung nicht auf \mathbb{R} , sondern auf einem beschränkten Intervall (a, b) , erkennen wir, dass an dem linken Randpunkt offenbar eine Randbedingung vorgeschrieben werden muss, da die Lösung durch den Transportterm von „links nach rechts“ verschoben wird. Will man in dem Randpunkt a die Randbedingung: „es erfolgt durch diesen Randpunkt kein Fluss von außen nach innen“ modellieren, so ergibt sich in natürlicher Weise die Bedingung, dass $y(t, a) = 0$ für $t > 0$ gelten muss. Denken wir uns y für $x < a$ durch Null fortgesetzt, ergibt sich in natürlicher Weise die Lösungsformel der Transportgleichung auf dem Intervall (a, b) :
 $y(t, x) = \chi_{(a,b)}(x - ct)y_0(x - ct)$, $t \geq 0, x \in (a, b)$.

Ein analoges Verfahren funktioniert im Mehrdimensionalen. Die Lösungen der reinen Transport- sowie der Transport-Absorptionsgleichung lässt sich somit mit Hilfe der Charakteristikenmethode bestimmen:

- im Fall der reinen Transportgleichung:

$$\partial_t n = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_s n$$

ist die Lösung gegeben durch:

$$n(s, v, t) = (S_0(t)n_0)(s, v) := \chi_S(s - tv)n_0(s - tv, v) \quad (\text{für } (s, v, t) \in S \times V \times \mathbb{R}^+)$$

- im Fall der Transport-Absorptionsgleichung $\partial_t n = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_s n - \sigma n$ erhalten wir als Lösungsoperator für $t \geq 0$:

$$n(s, v, t) = (S(t)n_0)(s, v) := \chi_S(s - tv)n_0(s - tv, v) \cdot \exp\left(-\int_0^t \sigma(s - \tau v, v) d\tau\right)$$

Man kann nun leicht nachrechnen:

- $S_0(t), S(t) \in \mathcal{L}(x)$ (es gilt sogar $\|S_0(t)\| \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(x)} \leq 1$)
- $S_0(t + s) = S_0(t)S_0(s) \quad \forall t, s \geq 0$; analog für $(S(t))_{t \geq 0}$ (Halbgruppeneigenschaft)
- $(S_0(t))_{t \geq 0}$ ist eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe. Analoges gilt für $(S(t))_{t \geq 0}$.

²also folgt: $x = x_0 + ct \Rightarrow x_0 = x - ct$

Beweis: Sei zunächst $n \in \mathcal{C}_c(S \times V)$. Dann gilt:

$$S(t)n(s, v) = \chi_S(s - tv)n(s - tv, v) \rightarrow n(s, v) \quad \text{punktweise } \forall (s, v) \in S \times V$$

Außerdem gilt: $\|S(t)n\|_\infty \leq \|n\|_{L^\infty(S \times V)} < \infty$. Da $S \times V$ von endlichem Maß ist, sind konstante Funktionen integrierbar, deswegen gilt: $\|S(t)n - n\|_{L^1(S \times V)} \xrightarrow{t \downarrow 0} 0$.

Im Allgemeinen Fall sei $n \in L^1(S \times V)$ beliebig. Da $\mathcal{C}_c(S \times V)$ dicht in $L^1(S \times V)$, existiert zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(S \times V)$, mit $\|n - n_\varepsilon\|_{L^1(S \times V)} < \varepsilon$. Dann folgt:

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)n - n\| \leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)n - S(t)n_\varepsilon\| + \|S(t)n_\varepsilon - n_\varepsilon\| + \|n_\varepsilon - n\| \leq 2\varepsilon$$

(Hier ist die verwendete Norm die $\|\cdot\|_{L^1(S \times V)}$ -Norm.) q.e.d.

Nun zurück zum Problem der korrekten Bestimmung des Definitionsbereiches des Generators A_0 der Halbgruppe $(S_0(t))_{t \geq 0}$. Es ist klar, dass

$$n \in D(A_0) = \{n \in L^1(S \times V); \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_0(t)n - n}{t} \text{ existiert in } L^1(S \times V)\}.$$

und man rechnet nach, dass

$$A_0 n = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_s n \quad \text{für } n \in D(A_0).$$

Desweiteren kann man zeigen, dass die Menge

$$\{n \in W^{1,1}(S \times V); n(s, v) = 0 \text{ falls } s \in \partial S \text{ und } s - tv \notin S\}$$

dicht in $D(A_0)$ bezüglich der Graphennorm von A_0 : $\|n\|_{A_0} = \|n\|_{L^1(S \times V)} + \|A_0 n\|_{L^1(S \times V)}$.

Zurück zur Boltzmann-Gleichung mit Kollisionsterm. Da wir nun bereits wissen, dass A_0 resp. $A_0 + B_\sigma$ Generator einer C_0 -Kontraktionshalbgruppe auf X sind, und der Kollisionsoperator $K \in \mathcal{L}(X)$ ist, stellt sich nun die Frage, ob auch die Störung eines C_0 -Halbgruppengenerators durch einen beschränkten linearen Operator noch der Generator einer C_0 -Halbgruppe ist.

Allgemein: Falls A Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ ist, was kann man dann über $A + B$ sagen, falls $B \in \mathcal{L}(X)$ ist?

klar: Der Definitionsbereich von A wird nicht gestört, da B auf dem ganzen Raum definiert ist, es gilt also: $\mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$, mit $C = A + B$, d.h. C ist ein dicht definierter Operator. Außerdem gilt: A ist abgeschlossen $\Rightarrow C = A + B$ ist abgeschlossen.

Beweis das C wie oben definiert abgeschlossen ist:

Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(A)$ eine konvergente Folge mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ in X . Es gelte weiterhin das die Bildfolge konvergiert, d.h. $Cx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in X$.

$$\Rightarrow Bx_n \rightarrow Bx \xrightarrow{B \text{ stet.}} Ax_n = \underbrace{Cx_n}_{\rightarrow y} - \underbrace{Bx_n}_{\rightarrow Bx}, \text{ d.h. } Ax_n \rightarrow y - Bx. \text{ Also folgt wegen der Abge-}$$

schlossenheit von A : $x \in \mathcal{D}(A) (= \mathcal{D}(C))$, also gilt $y = Cx$. \square

SATZ 2.1 BOUNDED PERTUBATION RESULT

Sei A der Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ mit $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$, $B \in \mathcal{L}(X)$.

Dann ist $C := A + B$ Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ mit $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \cdot \exp\left((\omega + M \cdot \|B\|_{\mathcal{L}(X)})t\right)$, $t \geq 0$.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass $(S(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Kontraktions-Halbgruppe (d.h. $M = 1, \omega = 0$) ist. Wir bemerken, dass für $\lambda > 0$ (somit $\lambda \in \rho(A)$) gilt:

$$(\lambda I - C) = \lambda(I - A - B) = (I - BR_A(\lambda))(\lambda I - A).$$

D.h. $(\lambda I - C) : \mathcal{D}(C) \rightarrow X$ ist bijektiv genau dann, wenn $I - BR_A(\lambda) : X \rightarrow X$ bijektiv ist. Mit der Neumann'schen Reihe ist $I - BR_A(\lambda)$ invertierbar, falls $\|BR_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, d.h. wenn $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(X)}}{\lambda} < 1$.

Wenn also $\lambda > \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$, dann ist gewiss $\|BR_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ und $\lambda \in \rho(C)$ und es ist

$$\begin{aligned} R_C(\lambda) &= R_A(\lambda)(I - BR_A(\lambda))^{-1} \\ &= R_A(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (BR_A(\lambda))^n \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|R_C(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \underbrace{\|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq \frac{1}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n \cdot \|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|B\|_{\mathcal{L}(X)}}{\lambda}\right)^n \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|B\|_{\mathcal{L}(X)}}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda - \|B\|_{\mathcal{L}(X)}} \end{aligned}$$

Damit gilt $\rho(C) \supseteq]\|B\|_{\mathcal{L}(X)}, \infty[$ und $\|R_C(\lambda)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{(\lambda - \|B\|_{\mathcal{L}(X)})^n} \quad \forall \lambda > \|B\|_{\mathcal{L}(X)}, \forall n \in \mathbb{N}$

Also erfüllt C die Voraussetzung des verallgemeinerten Hille-Yosida Satzes. Folglich ist C Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ mit $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\|B\|_{\mathcal{L}(X)} t}, \quad t \geq 0$.

Allgemeiner Fall: Sei A der Erzeuger der \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ mit $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0$. Dann erzeugt $(A - \omega I)$ die \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(e^{-\omega t} S(t))_{t \geq 0}$ und es existiert eine äquivalente Norm $\|\cdot\|$ mit $\|\underbrace{e^{-\omega t} S(t)x}_{{\tilde{S}(t)}}\|_X \leq \|x\|_X \quad \forall x \in X, t \geq 0$. Also ist $(\tilde{S}(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe mit Generator

$$\tilde{A} = A - \omega I.$$

$\xrightarrow{1. \text{ Fall}} \tilde{A} + B$ ist der Erzeuger der \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ mit $\|T(t)\| \leq e^{\|B\| t} \quad t \geq 0$. Also erzeugt der Operator $A + B$ die Halbgruppe $(e^{\omega t} T(t))_{t \geq 0}$, und da $\|x\|_X \leq \|x\| \leq M \|x\|_X$, folgt

$$\begin{aligned} \|e^{\omega t} T(t)x\|_X &\leq \exp((\omega + \|B\|)t) \cdot \|x\|_X \\ &\leq M \exp((\omega + \|B\|)t) \cdot \|x\|_X. \end{aligned}$$

Da zudem $\|B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\|$ und somit

$$\|B\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} M \|Bx\|_X \leq \sup_{\|x\| \leq 1} M \|Bx\|_X \leq M \|B\|,$$

folgt

$$\|e^{\omega t} T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \exp((\omega + M \|B\|_{\mathcal{L}(X)})t)$$

2.2 Altersstrukturierte Populationsmodelle

In der VL DGL I haben wir bereits einfache Populationsmodelle kennengelernt. Beschreibt etwa $u(t)$ die Anzahl der Individuen einer Population zur Zeit $t > 0$ und nimmt man an, dass der Populationszuwachs (bzw. die Populationsabnahme) in einem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ in etwa proportional zur Länge des Zeitintervalls und der initialen Populationsgröße ist, so gilt die Beziehung $u(t + \Delta t) - u(t) \approx \mu u(t) \Delta t$ (μ der Proportionalitätsfaktor). Nimmt man dann an, dass u in t glatt (differenzierbar) ist (dies ist bei großen Populationen eine zulässige Annahme), so gelangen wir (nach Teilen durch Δt und Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$) zu dem einfachen exponentiellen Populationsmodell (nach Malthus):

$$\begin{cases} u'(t) = \mu u(t) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Hierbei ist μ die Differenz aus der (konstant angenommenen) Geburten- und Sterberate; u_0 ist die (als bekannt vorausgesetzte) Populationsgröße zum Zeitpunkt $t = 0$. Das obige AWP hat bekanntlich die Lösung: $u(t) = u_0 e^{\mu t}$, $t \geq 0$.

Dies ist ein recht grobes Modell; das Alter wird beispielsweise nicht berücksichtigt (ebenso wird auch Ressourcenknappheit im exponentiellen Modell nicht berücksichtigt - das entsprechend verfeinerte logistische Modell (von Verhulst) haben wir bereits in der VL DGL I kennengelernt). Wir wollen im weiteren Verlauf ein verfeinertes (altersstrukturiertes Populations-)Modell erarbeiten, welches die offensichtliche Abhängigkeit der Geburten- und Sterberate vom Alter mit berücksichtigt (nach M. E. Gurtin, „A system for equations for age dependent population diffusion“, J. Theor. Biol. 40, 1973, pp. 389-392). Wir führen dazu folgende Größe ein: $u(t, a)$: beschreibe die Anzahl der Individuen zur Zeit t vom Alter a ($t, a \geq 0$). Weiter nehmen wir an, dass die Populationsentwicklung in einem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ beschrieben werden kann durch

$$u(t + h, a + h) - u(t, a) \approx -\beta(a)u(t, a) \cdot h$$

Hierbei stellt β die (altersabhängige) Sterberate da. Die Geburtenrate bleibt hier noch unberücksichtigt. Ist nun u genügend glatt bzgl. a und t , so folgt aus obiger Beziehung, nach Division durch h und Grenzübergang mit $h \rightarrow 0$:

$$\boxed{u_t(t, a) + u_a(t, a) + \beta(a)u(t, a) = 0} \quad t, a \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung $u(0, a) = \varphi(a)$. Hierbei beschreibt $\varphi = \varphi(a)$ die Altersverteilung in der Population zum Zeitpunkt $t = 0$. Die (altersabhängige) Geburtenrate $\gamma(a)$ fließt in unserem Modell nun über eine Randbedingung ein:

$$u(t, 0) = \int_0^\infty \gamma(a)u(t, a)da.$$

Wir werden im weiteren Verlauf folgende Modellannahmen benutzen:

- $\beta, \gamma \in L^\infty(0, \infty) \cap L^2(0, \infty)$;
- $\beta, \gamma \geq 0$ fast überall;
- $\varphi \in L^2(0, \infty)$.

Nun können wir das Ganze als abstraktes Cauchy-Problem formulieren:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases}, \text{ mit } \begin{cases} \mathcal{D}(A) = \{v \in L^2(0, \infty); v \text{ lokal absolut stetig, } v' \in L^2(0, \infty)\} \\ Av = -v' - \beta(a)v, \quad v \in \mathcal{D}(A). \end{cases}$$

Behauptung:

- (i) $\overline{\mathcal{D}(A)} = L^2(0, \infty)$, A ist abgeschlossen.
 (ii) $\rho(A) \supseteq]\omega, \infty[$ und $\|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \quad \forall \lambda > \omega$, wobei $\omega = \frac{1}{2} \|\gamma\|_{L^2}^2$

Beweis:

zu (ii): Sei $\lambda > \omega := \frac{1}{2} \|\gamma\|_{L^2}^2$ und $g \in L^2(0, \infty)$. $\mathfrak{Z}: \exists! u \in \mathcal{D}(A) : \lambda v - Av = g$.
 Gesucht ist also eine lokal absolut stetige Funktion $v \in L^2(0, \infty)$ mit

$$\lambda v(a) + v'(a) + \beta(a)v(a) = g(a) \iff v'(a) = -(\lambda + \beta(a))v(a) + g(a), \quad \text{für fast alle } a > 0,$$

die der Randbedingung: $v(0) = \int_0^\infty \gamma(a)v(a)da$ genügt. Ohne diese Randbedingung ist es leicht eine Lösung der DGL zu bestimmen: Jede Lösung ist von der Form $v(t) = v(0) \cdot \exp\left(-\lambda t - \int_0^t \beta(a)da\right) +$ eine partikuläre Lösung, die in $t = 0$ den Wert Null besitzt.

Problem: Die Randbedingung muss auch erfüllt werden, aber die Randbedingung hängt von der Lösung selbst ab!

Lösung: Fixpunktformulierung! Betrachte dazu die Abbildung $\psi : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$, $w \mapsto$ eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} v'(a) = -(\lambda + \beta(a))v(a) + g(a), & a > 0 \\ v(0) = \int_0^\infty \gamma(a)w(a)da \end{cases}$$

Dann gilt für $w, \tilde{w} \in L^2(0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \|\psi(w) - \psi(\tilde{w})\|_{L^2} &= \left\| \left(\int_0^\infty \gamma(a)w(a)da - \int_0^\infty \gamma(a)\tilde{w}(a)da \right) \exp\left(-\lambda t - \int_0^t \beta(a)da\right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \int_0^\infty \gamma(a)|w(a) - \tilde{w}(a)|da \cdot \|\exp(-\lambda t)\|_{L^2} \\ &\stackrel{\text{c.-s.u.}}{\leq} \|\gamma(\cdot)\|_{L^2} \cdot \|w - \tilde{w}\|_{L^2} \cdot \left(\int_0^\infty e^{-2\lambda t} dt \right)^{1/2} \\ &= \frac{\|\gamma(\cdot)\|_{L^2}}{\sqrt{2\lambda}} \cdot \|w - \tilde{w}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Da $\frac{\|\gamma(\cdot)\|_{L^2}}{\sqrt{2\lambda}} < 1$ nach Voraussetzung, folgt mit dem Banach'schen Fixpunktsatz: Es existiert genau ein Fixpunkt $u \in L^2(0, \infty)$. Dieser Fixpunkt ist die gesuchte Lösung.

Man rechnet nun ohne Mühen nach, dass die Resolventenabschätzung gilt und dass A abgeschlossen ist.

Dichtheit von $\mathcal{D}(A)$: Sei $g \in L^2(0, \infty)$; betrachte für $\lambda > \omega = \frac{\|\gamma\|_{L^2}^2}{2}$ v_λ , die Lösung von $\lambda v_\lambda - Av_\lambda = g$, d.h. $v_\lambda \in L^2(0, \infty)$, v_λ ist absolut stetig mit $v'_\lambda \in L^2$ und

$$\begin{cases} \lambda v_\lambda + v'_\lambda + \beta(a)v_\lambda = g & \text{f.ü. } a > 0 \\ v_\lambda(0) = \int_0^\infty \gamma(a)v_\lambda(a)da \end{cases} \quad \mathfrak{Z}: \mathcal{D}(A) \ni \lambda v_\lambda \xrightarrow{L^2} g \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty$$

Teste dazu die DGL mit v_λ , d.h. multipliziere mit v_λ und integriere über $(0, A)$:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^A v_\lambda^2(a)da + \underbrace{\int_0^A v'_\lambda(a)v_\lambda(a)da}_{\stackrel{(*)}{\rightarrow} -\frac{v_\lambda^2(0)}{2}} + \underbrace{\int_0^A \beta(a)v_\lambda^2(a)da}_{\geq 0} &= \int_0^A g(a)v_\lambda(a)da \\ \implies \lambda \int_0^\infty v_\lambda^2(a)da &\leq \int_0^\infty g(a)v_\lambda(a)da + \frac{v_\lambda^2(0)}{2} \\ &= \int_0^\infty g(a)v_\lambda(a)da + \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \gamma(a)v_\lambda(a)da \right]^2 \end{aligned}$$

Wir müssen noch (*) zeigen, d.h. $\int_0^A v'_\lambda(a)v_\lambda(a)da \xrightarrow{A \rightarrow \infty} -\frac{v_\lambda^2(0)}{2}$: es ist

$$\begin{aligned} \int_0^A v'_\lambda(a)v_\lambda(a)da &= \int_0^A \frac{d}{da} \left(\frac{v_\lambda^2(a)}{2} \right) da \\ &= \frac{v_\lambda^2(A)}{2} - \frac{v_\lambda^2(0)}{2} \end{aligned}$$

Wir bilden nun den Limes von A gegen Unendlich (dieser existiert nach obiger Gleichung, und es ist):

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{v_\lambda^2(A)}{2} = \int_0^\infty g(a)v_\lambda(a)da - \lambda \int_0^\infty v_\lambda(a)^2 da + \frac{v_\lambda(0)^2}{2} - \int_0^\infty \beta(a)v_\lambda^2(a)da.$$

Da $v_\lambda \in L^2(0, \infty)$, muss aber v_λ im Unendlichen verschwinden, d.h. $\lim_{A \rightarrow \infty} v_\lambda(A) = 0$.

Es folgt nun dass:

$$\begin{aligned} \lambda \|v_\lambda\|_{L^2}^2 &\leq \|g\|_{L^2} \cdot \|v_\lambda\|_{L^2} + \frac{1}{2} \|\gamma\|_{L^2}^2 \cdot \|v_\lambda\|_{L^2}^2 \\ \implies \left(\lambda - \frac{\|\gamma\|_{L^2}^2}{2} \right) \|v_\lambda\|_{L^2}^2 &\leq \|g\|_{L^2} \cdot \|v_\lambda\|_{L^2} \\ \implies \left(\left(\lambda - \frac{\|\gamma\|_{L^2}^2}{2} \right) v_\lambda \right)_{\lambda > w} &\text{ beschränkt in } L^2(0, \infty) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt: $v_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$ in $L^2(0, \infty)$, und für eine Teilfolge konvergiert $\lambda v_\lambda \rightharpoonup w$ für $\lambda \rightarrow \infty$ schwach in $L^2(0, \infty)$.

Zurück zur Gleichung: $\lambda v_\lambda + v'_\lambda + \beta(a)v_\lambda = g$ und $v_\lambda(0) = \int_0^\infty \gamma(a)v_\lambda(a)da$:

$$\implies \lambda \int_0^\infty v_\lambda(a)\varphi(a)da + \int_0^\infty v'_\lambda(a)\varphi(a) + \beta(a)v_\lambda(a)\varphi(a)da = \int_0^\infty g(a)\varphi(a)da$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, \infty[)$, d.h.

$$\underbrace{\lambda \int_0^\infty v_\lambda \varphi da}_{\rightarrow \int_0^\infty w \varphi da} - \int_0^\infty \underbrace{v_\lambda \varphi'}_{\rightarrow 0} - \int_0^\infty \underbrace{\beta v_\lambda \varphi}_{\rightarrow 0} da = \int_0^\infty g \varphi da + \int_0^\infty \underbrace{\gamma v_\lambda}_{\rightarrow 0} da \varphi(0)$$

Es folgt für $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\infty w \varphi = \int_0^\infty g \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, \infty[)$$

Also gilt $w = g$ und somit $\mathcal{D}(A) \ni \lambda v_\lambda \rightharpoonup g$ schwach in $L^2(0, \infty)$ für $\lambda \rightarrow \infty$. Da $v_\lambda \rightarrow 0$ in $L^2(0, \infty)$ (stark), folgt somit, dass $\left(\lambda - \frac{\|\gamma\|_{L^2}^2}{2} \right) v_\lambda \rightharpoonup g$ schwach in $L^2(0, \infty)$. Nun ist aber auch

$$\left\| \left(\lambda - \frac{\|\gamma\|_{L^2}^2}{2} \right) v_\lambda \right\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} \stackrel{\text{FunkAna}}{\implies} \left(\lambda - \frac{\|\gamma\|_{L^2}^2}{2} \right) v_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} g \text{ in } L^2(0, \infty)$$

und somit auch

$$\lambda v_\lambda \rightarrow g \text{ in } L^2(0, \infty).$$

Hierbei haben wir folgendes Ergebnis aus der FunkAna benutzt:

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ reflexiv, } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X, x_n \rightharpoonup x \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\| \end{array} \right\} \implies x_n \rightarrow x \text{ in } X \text{ stark}$$

q.e.d.

Kapitel 3

Das inhomogene Cauchy-Problem

Im Folgenden betrachten wir das inhomogene abstrakte Cauchy-Problem $ACP(u_0, f)$:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f, & t \in [0, T[\quad (T = \infty \text{ möglich}) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad ACP(u_0, f)$$

wobei

- A Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe auf dem Banachraum X ist
- $u_0 \in X$
- $f \in L^1(0, T; X)$ (wenn man klassische Lösungen will, muss man $f \in \mathcal{C}^1$ fordern. Dazu später mehr.)

Wir wissen: Falls $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ ist, so besitzt das ACP

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

eine eindeutige klassische Lösung, d.h. $u(t) = S(t)u_0 \in \mathcal{C}^1([0, \infty[; X)$. Für $u_0 \in X$ beliebig (d.h. u_0 ist nicht unbedingt aus $\mathcal{D}(A)$) führen wir einen allgemeineren Lösungsbegriff ein:

Definition 3.1. Für alle $u_0 \in X$ bezeichnet man die Funktion

$$[0, T[\ni t \mapsto S(t)u_0$$

als milde Lösung vom $ACP(u_0, 0)$

Bemerkung:

1. Für $u_0 \in X \setminus \mathcal{D}(A)$ ist $S(\cdot)u_0$ niemals rechtsseitig differenzierbar in 0, denn

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{S(0+h)u_0 - \overbrace{S(0)}^{=I} u_0}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \underbrace{\frac{S(h)u_0 - u_0}{h}}_{\rightarrow Au_0 \Leftrightarrow u_0 \in \mathcal{D}(A)}$$

2. Eventuell ist $S(t)u_0$ für $u_0 \in X \setminus \mathcal{D}(A)$ differenzierbar in $t > 0$, falls die Halbgruppe einen regularisierenden Effekt hat (vgl. holomorphe Halbgruppen im Kapitel 4)

Beispiel:

Sei $(X, \|\cdot\|) = (\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, $\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1]; f(1) = 0)\}$, $Af = f'$.

Es gilt:

- A ist abgeschlossen, dicht definiert in $\overline{\mathcal{D}(A)}^{\|\cdot\|_\infty} = \{f \in X; f(1) = 0\} =: X_0$
- Die Gleichung $\lambda f - Af = g$ besitzt für jedes $g \in \mathcal{C}([0, 1])$, $\lambda > 0$ eine eindeutige Lösung.
- $\|R_A(\lambda)g\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.

Somit ist A Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Kontraktions-Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf X_0 , und es ist

$$(S(t)f(\cdot))(s) = \begin{cases} f(t+s), & t+s \leq 1 \\ 0, & t+s > 1 \end{cases}$$

Problem: $f(x)$ ist nur für $x \in [0, 1]$ definiert. Durch die Translation, laufen wir aus dem Definitionsbereich heraus.

Lösung: Wir setzen f mit 0 fort, d.h.

$$\tilde{f}(r) := \begin{cases} f(r), & \text{falls } r \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad f \in \mathcal{C}^1([0, 1]) \quad \text{mit } f(1) = 0$$

Wir wollen zeigen, dass A die Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ erzeugt. Zeige dass:

$$\left\| \frac{S(t)f(\cdot) - f(\cdot)}{t} - f'(\cdot) \right\|_\infty \xrightarrow{t \downarrow 0} 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

Wir betrachten den Ausdruck punktweise für \tilde{f} :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\tilde{f}(t+s) - \tilde{f}(s)}{t} - \tilde{f}'(s) \right| \quad \forall s \in [0, 1] \\ &= \left| \frac{1}{t} \int_0^{t+s} \tilde{f}'(\sigma) d\sigma - \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{f}'(s) d\sigma \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} \int_0^t \underbrace{\tilde{f}'(\sigma+s) - \tilde{f}'(s)}_{\leq \varepsilon, \text{ falls } t \text{ genügend klein}} d\sigma \right| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Natürlich ist $S(t)f(\cdot) = 0$ für alle $f \in X_0$ und alle $t \geq 1$. Somit ist die milde Lösung $t \mapsto S(t)f \equiv 0$ für $t \geq 1$ und somit trivialerweise differenzierbar. Dies ist ein „triviales“ Beispiel eines Regularisierungseffektes.

Beispiel:

Im Allgemeinen ist es möglich, dass $t \mapsto S(t)u_0 \in X \setminus \mathcal{D}(A)$ in keinem Punkt $t \geq 0$ differenzierbar ist. Sei z.B. $X = (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $\mathcal{D}(A) = \{f \in X : f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f' \in X\}$, $Af = f'$.

Wie vorher ist A Erzeuger einer Linkstranslationshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$, d.h. $S(t)f(\cdot) = f(\cdot + t)$.

Aber: $S(t)u_0(\cdot)$ ist nicht differenzierbar in t für $u_0 \in X \setminus \mathcal{D}(A)$, denn diesmal sind die Funktionen auf ganz \mathbb{R} definiert. Aus diesem Grunde ist die Regularität von $S(t)u_0$ die gleiche wie die von u_0 .

Definition 3.2. Eine Funktion u heißt klassische Lösung des $ACP(f, u_0)$, falls

$$u \in \mathcal{C}([0, T[; X) \cap \mathcal{C}^1(]0, T[; X)$$

und

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & \forall t \in]0, T[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

erfüllt.

Annahme: u ist klassische Lösung von $ACP(f, u_0)$. Betrachte für festes $t \in [0, T[$:

$$\phi(s) = S(t-s)u(s), \quad s \in [0, t].$$

Dann: $s \mapsto \phi(s)$ ist stetig auf $[0, t]$ und differenzierbar $\forall s \in]0, t[$ mit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\phi(s) &= \frac{d}{ds}S(t-s)u(s) + S(t-s)\frac{d}{ds}u(s) \\ &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= S(t-s)f(s) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Falls $f \in (\mathcal{C}([0, T], X))$, dann ist $\frac{d}{ds}\phi(s)$ sogar stetig. Wenn wir nun über (3.1) integrieren, erhalten wir:

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t S(t-s)f(s)ds = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \tag{3.2}$$

Das ist die Duhamel-Formel (oder auch Variation-der-Konstanten-Formel), die wir bereits aus DGL I kennen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass unsere Halbgruppe die Funktion des Fundamentalsystems übernommen hat.

Da (3.2) auch für $f \in L^1(0, T; X)$ wohldefiniert ist, definieren wir:

Definition 3.3. Für alle $u_0 \in X$, $f \in L^1(0, T; X)$ bezeichnet man

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

als milde Lösung vom $ACP(f, u_0)$.

Frage: Wann ist die milde Lösung eine klassische Lösung?

Wir haben gesehen, dass $f \in \mathcal{C}([0, T], X)$ eine notwendige Bedingung ist. Diese ist aber leider nicht hinreichend.

(Gegen)Beispiel: $X = (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $\mathcal{D}(A) = \{f \in X; f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f' \in X\}$, $Af = f'$. A ist wieder Erzeuger der \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$, $S(t)f(\cdot) = f(\cdot + t)$. Betrachte

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u &= Au + f \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \quad \text{mit } f(t) = S(t)g, t \geq 0 \quad \text{wobei } g \in X \setminus \mathcal{D}(A). \tag{ACP(f, 0)}$$

Es gilt $[0, \infty[\ni t \mapsto f(t) = S(t)g$ ist stetig. Die milde Lösung von $ACP(f, 0)$ ist gegeben durch:

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t S(t-s)S(s)g = t \cdot S(t)g$$

Aber: $t \cdot S(t)g(\cdot)(s) = t \cdot g(t+s) \quad \forall s \in \mathbb{R}, t \geq 0$ ist nicht in $\mathcal{D}(A)$ und damit keine klassische Lösung.

Satz 3.4. Sei A Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf einem Banachraum X . Ist $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ und $f \in \mathcal{C}^1([0, T[; X])$, dann ist die milde Lösung u von $ACP(f, u_0)$ eine klassische Lösung.

Beweis: Es gilt:

$$u(t) = S(t)u_0 + \underbrace{\int_0^t S(t-s)f(s)ds}_{=:v(t)}$$

\underline{Z} : v ist \mathcal{C}^1 Lösung von $v' = Av + f$. Falls dies gilt, dann folgt:

$$\begin{aligned} u'(t) &= A(S(t)u_0 + v(t)) + f(t) \\ &= Au(t) + f(t). \end{aligned}$$

Zeigen wir also, dass $v \in \mathcal{C}^1$ ist. Mit Hilfe der Variablensubstitution: $\sigma := t - s$ können wir v wie folgt schreiben:

$$v(t) = \int_0^t S(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma \quad (3.3)$$

1. Schritt: Zeige, dass

$$\frac{d}{dt}v(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(\sigma)f'(t-\sigma) \quad \forall t \in [0, T[,$$

d.h.

$$\left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - S(t)f(0) - \int_0^t S(\sigma)f'(t-\sigma)d\sigma \right\|_X \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

für $t \geq 0$. Sei nun $t \in [0, T[$. Dann erhalten wir durch Addition von $\pm \int_0^t S(\sigma)f(t+h-\sigma) - S(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma$:

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma)f(t+h-\sigma)d\sigma + \int_0^t S(\sigma) \frac{f(t+h-\sigma) - f(t-\sigma)}{h} d\sigma.$$

Daher gilt:

$$\left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - S(t)f(0) - \int_0^t S(\sigma)f'(t-\sigma)d\sigma \right\|_X \leq \|I_1\|_X + \|I_2\|_X,$$

wobei

$$\begin{aligned} \|I_1\|_X &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma)f(t+h-\sigma)d\sigma - S(t)f(0) \right\|_X \\ \|I_2\|_X &= \left\| \int_0^t S(\sigma) \left(\frac{f(t+h-\sigma) - f(t-\sigma)}{h} - f'(t-\sigma) \right) d\sigma \right\|_X \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $\|I_1\|_X, \|I_2\|_X$ gegen Null gehen.

Zu I_1 : Substituiere $r = \sigma - t$, dann gilt:

$$\|I_1\|_X \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S(r+t)f(h-r) - S(t)f(0)\|_X dr$$

Es gilt: $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \cdot e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$ für ein $M > 0$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$. Somit folgt

$$\|I_1\|_X \leq \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{\|S(t+r)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq M e^{\omega(t+r)} \leq M e^{|\omega|T}} \cdot \|f(h-r) - f(0)\|_X dr + \frac{1}{h} \int_0^h \|S(t+r)f(0) - S(t)f(0)\|_X dr$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. f ist stetig auf $[0, T[$ daher existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass $\|f(s) - f(0)\|_X < \frac{\varepsilon}{2Me^{\omega t}}$ für alle $s \in [0, T[$ mit $|s| < \delta_1$.

Für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \frac{\delta_1}{2}$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r < |h|$ gilt: $|h - r| < \delta_1$ und somit:

$$\|f(h - r) - f(0)\|_X < \frac{\varepsilon}{2Me^{|\omega|T}} \quad (3.4)$$

Die Abbildung $t \mapsto S(t)f(0)$ ist ebenfalls stetig auf $t \in [0, T[$; daher existiert ein $\delta_2 > 0$, so dass

$$\|S(t - r)f(0) - S(t)f(0)\|_X < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall h, r \in \mathbb{R} \text{ für die gilt: } r < |h| < \delta_2. \quad (3.5)$$

Wir wenden nun (3.4) und (3.5) auf $\|I_1\|_X$ an:

$$\begin{aligned} \|I_1\|_X &\leq \frac{1}{h} \int_0^h Me^{\omega t} \cdot \frac{\varepsilon}{2Me^{|\omega|T}} dt + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad |h| \text{ genügend klein} \end{aligned}$$

Wenden wir uns nun I_2 zu:

$$\|I_2\|_X \leq \int_0^t Me^{\omega \sigma} \cdot \left\| \frac{f(t - \sigma + h) - f(t - \sigma)}{h} - f'(t - \sigma) \right\|_X d\sigma$$

Wir wollen nun den Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz anwenden, also benötigen wir eine Majorante. Sei dazu $L > 0$ die Lipschitzkonstante von f auf $[0, \hat{t}]$, ($\hat{t} > t$). Dann gilt:

$$Me^{\omega t} \cdot \left\| \frac{f(t - \sigma + h) - f(t - \sigma)}{h} - f'(t - \sigma) \right\| \leq Me^{\omega t} \underbrace{\left(L + \max_{s \in [0, \hat{t}]} \|f'(s)\|_X \right)}_{=const \Rightarrow \in L^1(0, t)}$$

Diese Abschätzung gilt punktweise für alle $\sigma \in [0, t]$. Wegen

$$\left\| \frac{f(t - \sigma + h) - f(t - \sigma)}{h} - f'(t - \sigma) \right\|_X \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \forall \sigma \in (0, t)$$

folgt mit Lebesgues Satz über majorisierte Konvergenz: $\|I_2\|_X \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ und somit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - S(t)f(0) - \int_0^t S(\sigma)f'(t - \sigma)d\sigma \right\|_X \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|I_1\|_X + \lim_{h \rightarrow 0} \|I_2\|_X = 0,$$

da $\limsup_{h \rightarrow 0} \|I_1\|_X < \varepsilon$ (für $\varepsilon > 0$ beliebig) $\lim_{h \rightarrow 0} \|I_1\|_X = 0$ impliziert.

2. **Schritt**: Zeige $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ und $Av(t) = v'(t) + f(t) \quad \forall t \in [0, T[$.

Sei $h > 0$:

$$\frac{S(h) - I}{h}v(t) = \frac{1}{h} \left(S(h) \int_0^t S(t-s)f(s)ds - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right)$$

Mit Halbgruppeneigenschaft und Addition einer geschickten 1 erhalten wir:

$$= \frac{1}{h} \left(\underbrace{\int_0^t S(h+t-s)f(s)ds}_{(*)} - \int_t^{t+h} S(h+t-s)f(s)ds + \underbrace{\int_t^{t+h} S(h+t-s)f(s)ds}_{(**)} - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right)$$

Nun fassen wir (*) und (**) zusammen und erhalten somit:

$$= \frac{1}{h} \left(\underbrace{\int_0^{t+h} S(h+t-s)f(s)ds}_{=v(t+h)} - \underbrace{\int_0^t S(t-s)f(s)ds}_{v(t)} \right) - \frac{1}{h} \underbrace{\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds}_{\text{ähnlich wie bei } I_1}$$

Für diesen Ausdruck gilt: $\xrightarrow{h \rightarrow 0} v'(t) - f(t)$. Es folgt, dass $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)-I}{h} v(t) = v'(t) - f(t) = Av(t)$, was zu zeigen war.

q.e.d.

Definition 3.5. Eine Funktion $u \in \mathcal{C}([0, T[, X)$ heißt starke Lösung von $ACP(f, u_0)$, wenn u lokal absolut stetig auf $[0, T[$, f.ü. differenzierbar mit $u' \in L^1(0, T, X)$, $u(0) = u_0$ und $u'(t) = Au(t) + f(t)$ f.ü. auf $(0, T)$

Bemerkung: Es gilt: klassische Lösung \implies starke Lösung \implies milde Lösung

Satz 3.6. Sei A Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf einem Banachraum X , $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $f \in L^1(0, T, X)$ lokal absolut stetig, f.ü. differenzierbar mit $f' \in L^1(0, T, X)$. Dann ist die milde Lösung von $ACP(f, u_0)$ eine starke Lösung.

Beweis: Analog zum Beweis vom letzten Satz. Man muss nur „ $\forall t \in [0, T[$ “ durch „für fast alle $t \in [0, T[$ “ ersetzen.

Bemerkung: Ist X reflexiv, $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $f \in L^1(0, T, X)$ lokal absolut stetig, dann ist die milde Lösung von $ACP(f, u_0)$ eine starke Lösung, denn im reflexiven Banachräumen folgt aus der absoluten Stetigkeit die Differenzierbarkeit fast überall. Diese Aussage folgt aus dem

Satz 3.7 (von Komura). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reflexiver Banachraum, $T > 0$ und $f : [0, T] \rightarrow X$ absolut stetig. Dann ist f f.ü. differenzierbar in $(0, T)$, f' ist Bochner-integrierbar und $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$.

Kapitel 4

Approximation von Halbgruppen

Wir haben gesehen, wie man von einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ zum entsprechenden Erzeuger gelangt. In diesem Abschnitt wollen wir uns damit befassen, ob man von der Resolvente $R_A(\lambda)$ auch zur Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ gelangen kann.

SATZ 4.2 (EXPONENTIALFORMEL)

Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Erzeuger A . Dann gilt:

$$S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{t} R_A \left(\frac{n}{t} \right) \right)^{n+1} x \quad \forall x \in X$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig in $t \in]0, T]$

Bemerkung: Approximieren wir die Lösung

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

durch das implizite Verfahren:

$$Au_n \left(j \frac{t}{n} \right) = \frac{u_n \left(j \frac{t}{n} \right) - u_n \left((j-1) \frac{t}{n} \right)}{\frac{t}{n}} \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_n(0) = u_0$$

$$\begin{aligned} u_n \left((j-1) \frac{t}{n} \right) &= -\frac{t}{n} Au_n \left(j \frac{t}{n} \right) + u_n \left(j \frac{t}{n} \right) \\ &= \left(I - \frac{t}{n} A \right) u_n \left(j \frac{t}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-1} u_n \left((j-1) \frac{t}{n} \right) = u_n \left(j \frac{t}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-j} u_0 = u_n \left(j \frac{t}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} u_0 = u_n(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Exponentialformel}} S(t)u_0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Beweis: Wir wissen: $\exists M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0$$

und mit der Verallgemeinerung vom Satz von Hille-Yosida:

$$\forall \lambda > \omega: \lambda \in \rho(A), \quad \|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda - \omega} \quad (4.1)$$

Weiter gilt:

$$R_A(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \quad \forall \lambda > \omega, \quad \forall x \in X \quad (4.2)$$

Aus der Resolventenidentität

$$R_A(\mu) - R_A(\lambda) = (\lambda - \mu)R_A(\mu)R_A(\lambda) \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A)$$

folgt zunächst einmal $]\omega, \infty[\ni \lambda \mapsto R_A(\lambda)$ stetig, denn:

$$\begin{aligned} \|R_A(\lambda + h) - R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq |h| \cdot \|R_A(\lambda + h)\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\stackrel{(4.1)}{\leq} |h| \cdot \frac{M}{\lambda + h - \omega} \cdot \frac{M}{\lambda - \omega} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \forall \lambda, \lambda + h > \omega \end{aligned}$$

Tatsächlich folgt aus der Resolventenidentität sogar, dass $]\omega, \infty[\ni \lambda \mapsto R_A(\lambda)$ ∞ -oft differenzierbar ist mit

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R_A(\lambda) = (-1)^n n! \cdot R_A(\lambda)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis: induktiv:

$n = 1$: Aus der Resolventenidentität folgt: $\frac{R_A(\lambda+h) - R_A(\lambda)}{h} = -R_A(\lambda+h)R_A(\lambda)$ $\forall \lambda, \lambda+h > \omega, h \neq 0$.

Jetzt: $h \rightarrow 0$. Da $\lambda \mapsto R_A(\lambda)$ stetig ist, folgt das $R_A(\cdot)$ differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{d\lambda} R_A(\lambda) = -R_A(\lambda)^2$$

$(n-1) \rightarrow n$:

$$\frac{\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R_A(\lambda+h) - \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R_A(\lambda)}{h} = (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot \underbrace{\left[\frac{R_A(\lambda+h)^n - R_A(\lambda)^n}{h} \right]}_{(*)}$$

wobei (*) als Komposition differenzierbarer Abbildungen differenzierbar ist.

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot n R_A(\lambda)^{n-1} (-R_A(\lambda)^2) \\ &= (-1)^n n! \cdot R_A(\lambda)^{n+1} \end{aligned}$$

Mit (4.2) folgt dann:

$$(-1)^n n! R_A(\lambda)^{n+1} x = \int_0^\infty (-1)^n \sigma^n e^{-\lambda \sigma} S(\sigma)x d\sigma, \quad \forall x \in X$$

d.h.

$$R_A(\lambda)^{n+1} x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \sigma^n e^{-\lambda \sigma} S(\sigma)x d\sigma \quad \forall x \in X, \forall \lambda > \omega$$

Sei $t > 0$ im Folgenden fest. Wir substituieren $\sigma = tv$, $d\sigma = t dv$. Dann:

$$R_A(\lambda)^{n+1}x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^{n+1} v^n e^{-\lambda tv} S(tv)x dv$$

Für n genügend groß ist $\frac{n}{t} > \omega$, also folgt mit $\lambda = \frac{n}{t}$:

$$\frac{1}{t^{n+1}} R_A\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty v^n e^{-nv} S(tv)x dv$$

$$\iff \boxed{\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} R_A\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} x = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty v^n e^{-nv} S(tv)x dv} \quad \forall n \text{ genügend groß, } \forall x \in X$$

Jetzt beachte dass

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty v^n e^{-nv} dv = 1,$$

denn:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^n e^{-nv} dv &= \frac{v^n e^{-nv}}{-n} + \int_0^\infty v^{n-1} e^{-nv} dv \\ &= \int_0^\infty v^{n-1} e^{-nv} dv \\ &= \frac{v^{n-1} e^{-nv}}{-n} \Big|_0^\infty + \frac{n-1}{n} \int_0^\infty v^{n-2} e^{-nv} dv \\ &= \dots \\ &= \frac{(n-1)!}{n^n} = \frac{n!}{n^{n+1}} \end{aligned}$$

Da:

$$\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} R_A\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} x = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty v^n e^{-nv} S(tv)x dv$$

folgt (da $S(t)x$ nicht von v abhängt)

$$\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} R_A\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} x - S(t)x = \underbrace{\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty v^n e^{-nv} S(tv)x - S(t)x dv}_{(*)}$$

Die Behauptung folgt, falls $\|(\cdot)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Beachte nur, dass die Funktion $[0, \infty[\ni t \mapsto S(t)x$ stetig ist, d.h. gleichmäßig stetig auf kompakten Mengen.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $0 < a < 1 < b < \infty$ so, dass

$$\|S(tv)x - S(t)x\|_X < \varepsilon \quad \forall v \in [a, b] \quad (\text{sogar gleichmäßig in } t \in [0, T] \text{ für } T > 0 \text{ fest})$$

Einschub:

$t \mapsto S(t)x$ ist gleichmäßig stetig auf $[0, T]$ $\Rightarrow \exists \delta > 0$:

$$\|S(t)x - S(s)x\|_X < \varepsilon \quad \forall |t - s| < \delta \quad t, s \in [0, T]; \quad \text{also folgt } \forall v \in \left] 1 - \frac{\delta}{T}, 1 + \frac{\delta}{T} \right[,$$

da $|tv - t| = |t| \cdot \underbrace{|1 - v|}_{< \frac{\delta}{T}} \leq T \frac{\delta}{T} = \delta$, dass

$$\|S(tv)x - S(t)x\|_X < \varepsilon \quad \forall t \in [0, T]$$

Folglich ist:

$$\left\| \underbrace{\frac{n^{n+1}}{n!} \int_a^b v^n e^{-nv}}_{=1} \underbrace{S(tv)x - S(t)x}_{\|\cdot\| \leq \varepsilon} dv \right\|_X \leq \frac{n^{n+1}}{n!} \int_a^b |v^n e^{-nv}| dv \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

Betrachte nun $\int_0^a \dots$ Es ist:

$$\left\| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^a v^n e^{-nv} S(tv)x - S(t)x dv \right\|_X \leq \left\| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^a (ve^{-v})^n (\underbrace{\|S(tv)\|_X + \|S(t)\|_X}_{\stackrel{(4.1)}{\leq} M e^{\omega(tv)} + M e^{\omega t} \cdot \|x\|_X}) dv \right\|_X$$

Für $t \in [0, T]$, da $0 < a < 1$,

$$\leq \underbrace{M(e^{|\omega|T} + e^{|\omega|T}) \cdot \|x\|_X}_{=konst.} \cdot \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^a (ve^{-v})^n dv$$

Es ist zu zeigen: $\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^a \underbrace{(ve^{-v})^n}_{(*)} dv \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Für die Funktion (*) gilt:

$$\frac{d}{dv}(ve^{-v}) = e^{-v} - ve^{-v} = (1-v)e^{-v} \begin{cases} > 0, & v \in [0, 1[\\ = 0, & v = 1 \\ < 0, & v > 1 \end{cases} \quad 1$$

Da $[0, 1[\ni v \mapsto ve^{-v}$ streng monoton wachsend ist, folgt: e^{-1}

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^a (ve^{-v})^n dv \leq \frac{n^{n+1}}{n!} a^{n+1} a^{-an} =: c_n$$

-1 a 1 2 3 4 5

und

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(n+1)^{n+2} a^{n+2} e^{-a(n+1)} n!}{n^{n+1} a^{n+1} e^{-an} (n+1)!} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} a e^{-a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e} a e^{-a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^1 \underbrace{a e^{-a}}_{\substack{3 \\ < 1e^{-1}}} \\ &\implies c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Es bleibt noch das letzte Integral $I_3 := \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty v^n e^{-nv} [S(tv)x - S(t)x] dv$ abzuschätzen. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \|I_3\|_X &= \left\| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty v^n e^{-nv} [S(tv)x - S(t)x] dv \right\|_X \leq \dots \leq \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty v^n e^{-nv} [\|S(tv)x\|_X + \|S(t)x\|_X] dv \\ &\leq \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty v^n e^{-nv} dv \cdot M(e^{|\omega|Tv} + e^{|\omega|Tb}) \|x\|_X \end{aligned}$$

³Da die Funktion ve^{-v} auf dem Intervall $[0, -1[$ streng monoton wachsend ist.

⁴Aus der Analysis I wissen wir: Falls $\frac{c_{n+1}}{c_n} < q \quad \forall n \geq n_0$ für ein $0 < q < 1 \implies c_{n+1} \leq q^{n-n_0} c_{n_0} \implies c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Da $v \mapsto ve^{-v}$ für $v > 1$ streng monoton fallend ist und $b > 1$ ist, gilt: $\underbrace{be^{-b}}_{=:a} < e^{-1}$. Dann existiert ein

$\delta \in]0, 1[$ mit $(be^{-b})^\delta < e^{-1}$, da für $a > 0$ $x \in]0, 1[\mapsto a^x$ stetig ist.

Folgt für $n > \frac{1+|\omega|T}{1-\delta}$ ($\Leftrightarrow n - \delta n > 1 + |\omega|T \Leftrightarrow n > \delta n + 1 + |\omega|T$), dass

$$\begin{aligned} \|I_3\|_X &\leq 2M\|x\|_X \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty \underbrace{(ve^{-v})^n}_{< e^{-1} < 1} e^{Tv|\omega|} dv \\ &\leq 2M\|x\|_X \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty \underbrace{(ve^{-v})^{\delta n}}_{< be^{-b}} v^{1+|\omega|T} e^{-v} (e^{-v})^{|\omega|T} e^{v|\omega|T} dv \\ &\leq 2M\|x\|_X \underbrace{\frac{n^{n+1}}{n!} (be^{-b})^{\delta n}}_{=:c_n} \underbrace{\int_b^\infty v^{1+|\omega|T} e^{-v} dv}_{< \infty} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(n+1)^{n+2} (be^{-b})^{\delta(n+1)} n!}{n^{n+1} (be^{-b})^{\delta n} (n+1)!} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e} \cdot (be^{-b})^\delta \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \cdot \underbrace{(be^{-b})^\delta}_{< e^{-1}} < 1 \end{aligned}$$

und wie schon beim Studium von $\int_0^a \dots$ folgt, dass auch $I_3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. □

Kapitel 5

Holomorphe/Analytische Halbgruppen

Wir haben bereits gesehen, dass für den Erzeuger A einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für alle u_0 aus dem Definitionsbereich von A eine eindeutige klassische Lösung $\mathcal{D}(A) \ni u_0 \mapsto S(t)u_0$ besitzt, und dass für alle $u_0 \in X \setminus \mathcal{D}(A)$ die Funktion $X \setminus \mathcal{D}(A) \ni u_0 \mapsto S(t)u_0$ eine milde Lösung ist.

Außerdem haben wir gesehen, dass in einigen Fällen die milde Lösung für $t > 0$ zu einer klassischen Lösung werden kann. Wir wollen nun untersuchen, wann dies der Fall ist.

Motivation: Untersuche \mathcal{C}_0 -Halbgruppen $(S(t))_{t \geq 0}$ auf Regularisierungseffekt, d.h. die Frage, ob $\forall x \in X : S(t)x \in \mathcal{D}(A) \quad \forall t > 0$. In diesem Fall ist dann $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ stetig differenzierbar auf $]0, \infty[$ und erfüllt

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x.$$

Somit ist $u = S(\cdot)x$ eine „klassische Lösung“ des Cauchy-Problems $\forall t > 0$ in $\mathcal{C}^1(]0, \infty[; X) \cap \mathcal{C}(]0, \infty[; X)$.

Vorbereitung: Vektorwertige holomorphe Funktionen. Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$, Ω offen, X ein \mathbb{C} -Banachraum, $f : \Omega \rightarrow X$, $z_0 \in \Omega$, dann heißt f komplex differenzierbar in z_0 , falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0) \quad \text{existiert und } h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad h + z_0 \in \Omega.$$

f heißt holomorph auf Ω , wenn f in jedem Punkt $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist.

Bemerkung:

1. Falls f komplex differenzierbar in z_0 ist, dann ist f auch stetig in z_0
 2. Falls f komplex differenzierbar in z_0 ist und $x^* \in X^*$, dann ist $x^* \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 .
-

Mittels der letzten Bemerkung und dem Satz von Hahn-Banach können die zentralen Ergebnisse der klassischen Funktionen-Theorie auf vektorwertige Funktionen übertragen werden. Hier die wichtigsten Ergebnisse:

Satz 5.1 (Cauchy-Integralformel). Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow X$ holomorph, $z_0 \in \Omega$, $\overline{B(z_0, r)} \subseteq \Omega$ für ein $r > 0$, dann gilt $\forall w \in B(z_0, r)$ (offen):

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

Es sei hier daran erinnert, dass das Wegintegral einer stetigen Funktion g entlang einer glatten Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ wie folgt definiert ist:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_a^b g(\gamma(\theta)) \cdot \dot{\gamma}(\theta) d\theta$$

Das Wegintegral $\int_{\gamma} \dots$ ist zu verstehen als das Wegintegral über den positiv orientierten Kreisrand $\partial B(z_0, r)$, der mittels des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto z_0 + re^{i\theta}$ parametrisiert werden kann.

Beweis: Sei f holomorph auf Ω , dann folgt für alle $x^* \in X^*$: $x^* \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph. Nach der Cauchy-Integralformel für komplexwertige Funktionen gilt somit:

$$\begin{aligned} \forall w \in \Omega : \quad & (x^* \circ f)(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{(x^* \circ f)(z)}{z - w} dz \\ \implies \quad & x^* \left(\underbrace{f(w)}_{\in X} \right) \stackrel{1}{=} x^* \left(\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - w} dz \right)}_{\in X} \right) \quad \forall x^* \in X^* \\ \stackrel{2}{\implies} \quad & f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - w} dz \end{aligned}$$

□

Satz 5.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : \Omega \rightarrow X$ holomorph und sei weiterhin $\overline{B(z_0, r)} \subseteq \Omega$. Für $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, setze für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt, \quad (\text{d.h. nach der Cauchy-Integralformel: } a_0 = f(z_0))$$

dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, r),$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig auf $\overline{B(z_0, \rho)}$, $\forall 0 \leq \rho < r$. Insbesondere ist f unendlich oft differenzierbar und $f^{(n)}(z_0) = n! a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

¹stetige lineare Operatoren dürfen aus dem Integral herausgezogen werden

²Da, nach dem Satz von Hahn-Banach X^* punktstetig ist.

Beweis: Sei $z \in B(z_0, r)$ fest. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} &= \frac{1}{(t-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{z-z_0}{t-z_0}}_{|\cdot| < 1}} \cdot \frac{1}{t-z_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0} \right)^n \cdot \frac{1}{t-z_0} && \forall t \in \partial B(z_0, r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} && (\text{glm. konv. in } t \text{ auf } B(z_0, r)) \\ \stackrel{3}{\implies} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(t)}{t-z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(t)(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} dt \end{aligned}$$

Die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} \dots$ ist gleichmäßig konvergent auf dem Rand von $B(z_0, r)$, da f stetig auf $\partial B(z_0, r)$ und somit beschränkt. Also können wir Integration und Summation vertauschen und erhalten somit:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt}_{=a_n} (z-z_0)^n$$

Die weiteren Behauptungen des Satzes folgen nun leicht aus der Potenzreihendarstellung von f . □

Satz 5.3 (Identitätssatz). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, Ω offen und zusammenhängend, $f, g : \Omega \rightarrow X$ holomorph und es gebe eine nicht-diskrete⁴ Menge $\emptyset \neq N \subset \Omega$, so, dass $f = g \quad \forall x \in N$. Dann folgt schon $f \equiv g$ auf ganz Ω .

Bemerkung: Diese Version des Satzes entspricht dem klassischen Fall $X = \mathbb{C}$.

Beweis: Es genügt den Fall $g \equiv 0$ zu betrachten. (Ansonsten setze $\tilde{f} = f - g$)

Aus den Voraussetzungen folgt: $\exists (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset N$ so dass $z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_0 \in \Omega$ und $f(z_k) = 0 \quad \forall k$. Hieraus folgt wegen der Stetigkeit von f , dass $f(z) = 0$. Da f nach dem Vorhergehenden Satz in z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist, können wir schreiben:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r) \quad \text{für ein } r > 0.$$

Wir gehen nun induktiv vor und zeigen, dass $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ ist $a_0 = 0$, denn nach Voraussetzung gilt: $f(z_0) = 0$.

$(n-1) \rightarrow n$: $f(z) = a_n (z-z_0)^n + a_{n+1} (z-z_0)^{n+1} + \dots \quad z \in B(z_0, r)$. Insbesondere für $k \geq k_0$ genügend groß ($\Rightarrow z_k \in B(z_0, r)$):

$$\begin{aligned} 0 &= f(z_k) = a_n (z_k - z_0)^n + a_{n+1} (z_k - z_0)^{n+1} + \dots && \forall k \geq k_0 \\ \implies 0 &= a_n + a_{n+1} (z_k - z_0) + a_{n+2} (z_k - z_0)^2 + \dots && \forall k \geq k_0 \quad (z_k - z_0 \neq 0) \end{aligned}$$

Da die Potenzreihe $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z-z_0)^k$ gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Kugel $\subseteq B(z_0, r)$ konvergiert, und somit insbesondere stetig in z_0 ist, folgt: $0 = g(z_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a_n$. Also folgt $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ und somit $f \equiv 0$ in $B(z_0, r)$.

³Cauchy-Integralformel

⁴d.h. N hat mindestens einen Häufungspunkt in Ω

Betrachte nun die Menge:

$$G := \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dann gilt:

* $G \neq \emptyset$, da $z_0 \in G$

* G ist relativ abgeschlossen, da

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \underbrace{(f^{(n)})^{-1}(\{0\})}_{\text{abgeschlossen}^5}$$

* G ist relativ offen. (folgt leicht aus der lokalen Potenzreihendarstellung von f)

Da Ω zusammenhängend ist, folgt die Behauptung

□

Satz 5.4 (Satz von Liouville). *Ist $f : \mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \rightarrow X$ holomorph (f heißt dann auch ganze Funktion) und zugleich beschränkt, dann ist f konstant.*

Beweis: Betrachte die Potenzreihenentwicklung von f in $z_0 = 0$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

Dann ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

somit:

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|^{\leq M = \sup_{\mathbb{C}} |f|}}{|(re^{i\theta})|^{n+1}} \cdot \underbrace{|ire^{i\theta}|}_{=r} d\theta \\ &\leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \neq 0) \end{aligned}$$

d.h.

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \neq 0)$$

Somit ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

□

Satz 5.5 (Satz von Vitali). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend), $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf Ω mit Werten im Banach-Raum X so, dass $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergent auf einer nicht-diskreten Teilmenge $N \subseteq \Omega$ ist, d.h. $\exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq N$ mit $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in \Omega$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k)$ existiert in X , $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Dann existiert eine holomorphe Funktion $f : \Omega \rightarrow X$ so, dass $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

⁵als Urbild einer abgeschlossen Menge unter einer stetigen Funktion.

Bemerkung:

In der Cauchy-Integralformel

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\lambda)}{\lambda - w} d\lambda$$

kann anstatt über dem Kreisrand $\partial B(z_0, r)$ auch über einen beliebigen anderen geschlossenen Weg, der positiv orientiert ist, und der w einmal umläuft, integriert werden. Das kann man sich an nebenstehender Skizze veranschaulichen:

γ bezeichnet die gestrichelte (zweifarbige) geschlossene Kurve. Dies teilen wir in Γ_2 (rot) und Γ_1 (blaue) auf. Γ_1 und Γ_2 sind beides geschlossene Kurven. Da wir in beiden Fällen nicht um die Singularität von f in w integrieren, sind diese Integrale insgesamt Null. Wir wollen uns nun klarmachen, dass das Integral über die große Kurve gleich dem Integral über den Kreis ist. Die Anteile von Γ_i , die jeweils von der Kurve zum Kreis hin- und zurück führen, heben sich insgesamt gesehen auf. Den Kreis durchlaufen wir mit der roten und blauen Kurve insgesamt einmal, jedoch im Uhrzeigersinn. Deswegen bekommt dieser Anteil ein Minus. Da insgesamt Null rauskommen soll, und weil das äußere Integral entgegengesetztes Vorzeichen hat (verschiedene Umlaufrichtungen), müssen beide Integrale gleich sein.

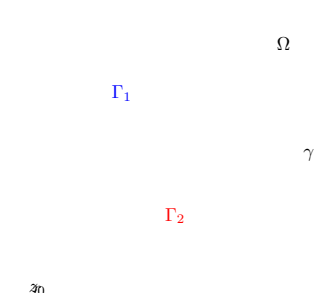


Abbildung 5.2: Äquivalenz geschlossener Wegintegrale um einen Pol

Definition 5.3: (holomorphe Halbgruppe)

Sei $\theta \in]0, \pi/2[$. Eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe heißt holomorph/analytisch mit Winkel θ , falls $(S(t))_{t \geq 0}$ eine holomorphe Fortsetzung $(S(z))_{z \in \Sigma_\theta}$, wobei

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \theta\} \setminus \{0\}.$$

Außerdem muss $(S(z))_{z \in \Sigma_\theta}$ für jedes $0 < \theta' < \theta$, auf $\Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ beschränkt sein.

Sie heißt beschränkt holomorph, falls $(S(t))_{t \geq 0}$ holomorph mit Winkel θ ist, und $(S(z))_{z \in \Sigma_\theta}$ gleichmäßig beschränkt auf $\Sigma_{\theta'}$ $\forall 0 < \theta' < \theta$ ist.

Wir wollen uns diese Definition kurz anhand einer Skizze veranschaulichen:

Im

$\operatorname{Re}(z)$
 ~~$\operatorname{arg}(z) = \varphi$~~

Re

Abbildung 5.3: Im schraffierten Bereich Σ_θ ist die Halbgruppe $S(z)$ holomorph mit Winkel θ . θ' bezeichnet einen (beliebigen) Winkel, für den die Halbgruppe beschränkt ist. Dabei muss θ' immer echt kleiner als θ sein. In rot ist die Darstellung einer komplexen Zahl mittels Argument (φ) und dem Betrag (r) veranschaulicht.

Bemerkung:

Eine beschränkte \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$, die holomorph ist, ist im Allgemeinen nicht beschränkt holomorph.

Gegenbeispiel: $X = \mathbb{C}$, $S(t)x = e^{it}x$, $x \in X$, $t \geq 0$, dann $\|S(t)\| = 1$, da $|e^{it}| = 1 \quad \forall t \leq 0$.
 Aber für $t \in \mathbb{C}$ ist der Ausdruck unbeschränkt.

Lemma 5.6. Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine holomorphe \mathcal{C}_0 -Halbgruppe mit Winkel θ , $(S(z))_{z \in \Sigma_\theta}$ die holomorphe Fortsetzung von $(S(t))_{t \geq 0}$, dann gilt:

- (i) $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \Sigma_\theta$
- (ii) $\forall 0 < \theta' < \theta \quad \exists M_{\theta'} \geq 1$ und $\omega_{\theta'} \in \mathbb{R}$, so dass: $\|S(z)\| \leq M_{\theta'} e^{\omega_{\theta'} \operatorname{Re}(z)}$
- (iii) $\forall 0 < \theta' < \theta: \quad \|S(z)x - x\| \xrightarrow[z \in \Sigma_{\theta'}]{z \rightarrow 0} 0, \quad \forall x \in X$

Beweis:

(i) Für $t > 0$ fest, betrachten wir:

$$\begin{aligned} f_1(z) &:= S(z+t), \quad z \in \Sigma_\theta \\ f_2(z) &:= S(z)S(t), \quad z \in \Sigma_\theta. \end{aligned}$$

Dann gilt: f_1, f_2 sind holomorph auf Σ_θ und $S(t+s) = f_1(s) = f_2(s) \quad \forall s \geq 0$ (da $(S(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe ist!). Also folgt mit dem Identitätssatz (5.3): $S(t+s) = f_1(s) = f_2(s) \quad \forall t \geq 0, z \in \Sigma_\theta$.
 Jetzt analog mit

$$\begin{aligned} g_1(w) &:= S(z+w), \quad z \in \Sigma_\theta \\ g_2(w) &:= S(z)S(w), \quad z \in \Sigma_\theta. \end{aligned}$$

(ii) Sei $0 < \theta' < \theta$. Nach Definition gilt: $\exists M_{\theta'} \leq 1: \quad \|S(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_{\theta'} \quad \forall z \in \Sigma_{\theta'} \cap B(0,1)$
 Für $z = te^{i\beta} \in \Sigma_{\theta'}$, d.h. $|\beta| < \theta'$, $t > 0$ beliebig, gilt dann: $\|S(z)\|_{\mathcal{L}(X)} = \underbrace{\|S(te^{i\beta})\|_{\mathcal{L}(X)}}_{=: S_\beta(t)}$, und

$(S_\beta(t))_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe

Mit $t = n + \sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sigma < 1$, folgt dann:

$$\begin{aligned} \|S(z)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|S_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S_\beta(1)^n \cdot S_\beta(\sigma)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &< \|S_\beta(1)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \cdot \|S_\beta(\sigma)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq M_{\theta'}^n \cdot M_{\theta'} \leq M_{\theta'}^{|z|} M_{\theta'} \end{aligned}$$

Nebenrechnung

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \\ \text{und } |\arg(z)| \leq \theta' < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\arg(z)) \geq \cos(\theta') \end{array} \right\} \Rightarrow |z| = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\cos(\arg(z))} \leq \frac{\operatorname{Re}(z)}{\cos(\theta')}$$

Also folgt in unserer Abschätzung weiter:

$$\begin{aligned} &\leq M_{\theta'} \cdot \exp(|z| \ln(M_{\theta'})) \\ &\leq M_{\theta'} \cdot \exp\left(\underbrace{\operatorname{Re}(z) \frac{\ln(M_{\theta'})}{\cos(\theta')}}_{=: \omega'}\right) \end{aligned}$$

(iii) Definiere für $x \in X$ fest und $k \in \mathbb{N}$: $f_k(z) = S\left(\frac{z}{k}\right)x, \quad \forall z \in \Sigma_{\theta'}$. Dann gilt: $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine holomorphe Funktionenfolge in $\Sigma_{\theta'}$.

Weiter gilt: $f_k(t) = S\left(\frac{t}{k}\right)x \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ in $X \quad \forall t > 0$, da $(S(t))_{t \geq 0}$ eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe ist. Außerdem ist $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ per Definition lokal beschränkt. Also folgt mit dem Satz von Vitali (5.5): $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig in $\Sigma_{\theta'}$ gegen eine holomorphe Funktion f .

Es folgt: $f(t) = x =: g(x) \quad \forall t > 0 \quad z \in \Sigma_{\theta'}$, und g ist holomorph. Somit stimmen die holomorphen Funktionen f und g auf \mathbb{R}^+ überein $\xrightarrow{(5.3)} f \equiv x$ auf $\Sigma_{\theta'}$ $\xrightarrow{(5.3)} S(z) \rightarrow x$ für $z \rightarrow 0, \quad z \in \Sigma_{\theta'}$.

Definition 5.4: sektorielle Operatoren

Ein linearer Operator $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ heißt sektoriell, falls A dicht definiert und abgeschlossen ist und falls es ein $\delta \in]0, \pi]$ gibt, mit $\Sigma_\delta \subseteq \rho(A)$ und für jedes $0 < \delta' < \delta$ existiert eine Konstante $C_{\delta'} \geq 1$, so dass

$$\|\lambda R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_{\delta'} \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\delta'}.$$

Man nennt

$$\delta_A := \sup \{ \delta \in]0, \pi]; \quad \delta \text{ so wie oben} \}$$

Spektralwinkel von A .

Satz 5.7. Sei A ein sektorieller Operator mit Spektralwinkel $\delta_A > \frac{\pi}{2}$. Dann ist die von A erzeugte \mathcal{C}_0 -Kontraktions-Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ eine beschränkte holomorphe Halbgruppe.

Frage: Wie kommen wir von A zur Halbgruppe?

Idee:

Für $a \in \mathbb{R}$ ist für $t \geq 0$ $e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} \xrightarrow{A \in \mathcal{L}(X)} e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{tA}}{n!}$ (für beschränkte Operatoren A)

Für unbeschränkte Operatoren:

$$e^{at} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{at}{n}\right)^n = \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{at}{n}\right)^{-n}} \xrightarrow{A \text{ Hille-Yosida-Op.}} e^{tA} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A\right)^{-n} x$$

Für $z \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C} \ni a \mapsto e^{az}$ holomorph, also können wir mit der Cauchy-Integralformel (5.1) e^{az} darstellen als:

$$e^{za} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{e^{z\lambda}}{\lambda - a} d\lambda,$$

falls Γ eine geschlossen, positiv orientierte Kurve ist, die a einmal umläuft. Es ist somit

$$e^{za} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} e^{a\lambda} (\lambda - a)^{-1} d\lambda.$$

Wir versuchen nun, wie in den beiden vorhergehenden „Exponentialformeln“, a durch den Operator A ersetzen.

Also: Definiere eine Halbgruppe über die Formel:

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R_A(\lambda) d\lambda.$$

Wir bemerken dazu, dass $\lambda \mapsto R_A(\lambda)$ eine holomorphe Abbildung in Σ_{δ} ist, mit der Eigenschaft $\frac{d^n}{d\lambda^n} R_A(\lambda) = (-1)^n n! R_A(\lambda)^{n+1} \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\delta}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (die komplexe Differenzierbarkeit folgt genau wie im Reellen aus der Resolventengleichung).

Beweis:

Sei $0 < \tilde{\delta} < \delta_A - \frac{\pi}{2}$. Definiere nun für $z \in \Sigma_{\tilde{\delta}}$:

$$S(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda z} R_A(\lambda) d\lambda$$

wobei $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_r \cup \Gamma_+$, wie in Abb. 5.4. Also Γ_+ parametrisiert durch:

$$\begin{aligned} \gamma_+(t) &= te^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)}, & t &\in [r, \infty[\\ \gamma_r(\sigma) &= re^{i\sigma}, & \sigma &\in \left[-\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2} + \theta\right] [r, \infty[\\ \gamma_-(t) &= -te^{i(-\frac{\pi}{2} - \theta)}, & t &\in [r, \infty[\end{aligned}$$

Γ_+

$\delta \tilde{\delta} \frac{\pi}{2} \quad \Gamma_r$

Γ_-

Abbildung 5.4: Integration um den Pol

Wohldefiniertheit und Beschränktheit unter $\delta(z)$: Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $\tilde{\delta} + \varepsilon < \theta < \delta_A - \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Für $z \in \Sigma_{\tilde{\delta}}$, $\lambda \in \Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\tilde{\delta} + \frac{\pi}{2} + \varepsilon}$ ist dann $\underbrace{\frac{\pi}{2} + \tilde{\delta} + \varepsilon - \tilde{\delta}}_{= \frac{\pi}{2} + \varepsilon} \leq \arg(\lambda) + \arg(z) \leq \frac{3}{2}\pi - \varepsilon - \tilde{\delta} + \tilde{\delta}$

und somit:

$$\begin{array}{lcl}
 \frac{\pi}{2} + \varepsilon & \frac{3}{2}\pi - \varepsilon & \operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda z \cos(\arg(\lambda) + \arg(z)) \\
 & & = |\lambda z| \cos(\arg(\lambda) + \arg(z)) \\
 & & \leq |\lambda z| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \\
 & & = -|\lambda z| \sin(\varepsilon) \\
 \frac{\pi}{2} & \frac{3}{2}\pi & \\
 \cos(x) < 0 & &
 \end{array}$$

Abbildung 5.5: Kosinus im negativen Bereich

Und dann:

$$\|e^{\lambda z} R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-|\lambda z| \sin(\varepsilon)} \cdot \frac{C}{|\lambda|} \delta_{A-\varepsilon}$$

Es folgt:

$$\|S(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_+} \underbrace{\|e^{\lambda z} R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq e^{-|\lambda z| \sin(\varepsilon)} \cdot \frac{C}{|\lambda|} \delta_{A-\varepsilon}} d\lambda + \int_{\Gamma_r} \|e^{\lambda z} R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} d\lambda + \int_{\Gamma_-} \|e^{\lambda z} R_A(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} d\lambda \right]$$

mit den Parametrisierungen für Γ von oben erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & \leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_r^\infty e^{-t|z| \sin(\varepsilon)} C_{\delta_{A-\varepsilon}} dt + \int_{-\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} e^{-\sin(\varepsilon)} C_{\delta_{A-\varepsilon}} |z| \frac{1}{|z|} d\sigma + \int_{-r}^{-\infty} e^{-t|z| \sin(\varepsilon)} C_{\delta_{A-\varepsilon}} dt \right] \\
 & \leq \operatorname{Const.}(\varepsilon) = \operatorname{Const.}(\tilde{\delta})
 \end{aligned}$$

Also ist $(S(z))_{z \in \Sigma_{\tilde{\delta}}}$ wohldefiniert und beschränkt $\forall 0 < \tilde{\delta} < \delta_A - \frac{\pi}{2}$.

Die Holomorphie der Abbildung $\Sigma_{\tilde{\delta}} \ni z \mapsto S(z) \in \mathcal{L}(X)$ folgt aus entsprechenden Sätzen der klassischen Funktionentheorie über parameterabhängige Integrale.

Halbgruppeneigenschaft: Sei $0 < \tilde{\delta} < \delta_A - \frac{\pi}{2}$ beliebig. Seien $z_1, z_2 > 0$, (d.h. insbesondere reell). Dann:

$$\begin{aligned}
 S(z_1)S(z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{\mu z_1} R_A(\mu) d\mu \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} e^{\lambda z_2} R_A(\lambda) d\lambda \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2} \underbrace{R_A(\mu) R_A(\lambda)}_{\in \mathbb{C}} d\lambda d\mu
 \end{aligned}$$

Mit der Resolventengleichung $R_A(\mu) - R_A(\lambda) = (\lambda - \mu)R_A(\mu)R_A(\lambda)$ folgt:

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1} e^{\mu z_1} R_A(\mu) \underbrace{\int_{\Gamma_2} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda}_{\in \mathbb{C}} d\mu + \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_2} e^{\lambda z_2} R_A(\lambda) \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{e^{\mu z_1}}{\mu - \lambda} d\mu}_{\in \mathbb{C}} d\lambda$$

Es ist aber $\int_{\Gamma_2} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda = 2\pi i e^{\mu z_2}$. Um dies zu sehen, „schlieÙe“ man Γ_2 linksseitig wie in Abb. 5.4 auf der vorherigen Seite mit dem Kreisrand (der gepunktete Teil). Dann folgt mit der Cauchy-Integralformel (5.1):

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_{2,R}} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda = 2\pi i, \quad \Gamma_{2,R} = \Gamma_{2R}^l \cup \Gamma_{2R}^r \\
 & \text{wobei } \Gamma_{2R}^l \text{ durch } \gamma(\sigma) = Re^{i\sigma}, \quad \sigma \in \left[\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{3}{2}\pi - \theta\right] \\
 & \text{parametrisiert ist. F\u00fcr } R \rightarrow \infty \text{ erhalten wir dann:} \\
 & \int_{\Gamma_{2,R}^l} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda + \int_{\Gamma_{2,R}^r} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda \\
 & \text{da linksstehendes Integral} \\
 & = \int_{\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{3}{2}\pi - \theta} \frac{e^{-R|z_2| \sin(\varepsilon)}}{|Re^{i\sigma} - \mu|} \cdot R d\sigma \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Abbildung 5.6: Die zwei Wege Γ_1 und Γ_2

F\u00fcr das Integral \u00fcber Γ_1 verfahren wir genauso und erhalten analog:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{e^{\mu z_1}}{\mu - \lambda} d\mu = 0.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 S(z_1)S(z_2) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1} e^{\mu z_1} R_A(\mu) 2\pi i e^{\mu z_2} d\mu \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{\mu(z_1+z_2)} R_A(\mu) d\mu = S(z_1 + z_2)
 \end{aligned}$$

Starke Stetigkeit in 0: $\mathfrak{Z}: (S(z)x - x) \rightarrow 0$ in $x \quad \forall z \in X$. Mit Hilfe des Lemmas zu Beginn des Kapitels und dank der Beschr\u00e4nktheit der Halbgruppe $(S(z))_{z \in \Sigma_{\mathfrak{S}}}$ und da $\mathcal{D}(A) = X$, reicht es zu zeigen, dass

$$(S(t)x - x) \xrightarrow{t \downarrow 0} 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

F\u00fcr $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & \lambda R_A(\lambda)x - \underbrace{A R_A(\lambda)}_{=R_A(\lambda)A} x = x \\
 \implies & \boxed{x = \lambda R_A(\lambda)x - R_A(\lambda)Ax} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - 0} d\lambda \stackrel{(5.1)}{=} e^{0t} = 1$$

Somit ist:

$$S(t)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \underbrace{\left(R_A(\lambda)x - \frac{1}{\lambda}x\right)}_{\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\lambda}R_A(\lambda)Ax} d\lambda$$

Klar: $\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} R_A(\lambda)Ax \xrightarrow{t \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}R_A(\lambda)Ax$ lokal gleichm\u00e4\u00dfig auf Γ . Weiter ist:

$$\left\| \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} R_A(\lambda)Ax \right\|_X \leq \frac{e^{-|\lambda|t \sin(\varepsilon)}}{|\lambda|} \frac{C_{\delta_{A-\varepsilon}}}{|\lambda|} \|Ax\|_X \approx \frac{const}{|\lambda|^2} \quad \text{integrierbar \u00fcber } \Gamma.$$

Mit der majorisierten Konvergenz von Lebesgue folgt:

$$S(t)x - x \xrightarrow{t \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \underbrace{\frac{1}{\lambda} R_A(\lambda) A x d\lambda}_{\|\cdot\| \leq \frac{const.}{|\lambda|^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

Sei B der Generator der beschränkten \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$. $\mathfrak{Z}: \boxed{B = A}$.

„ $A \subseteq B$ “ :

Sei $x \in \mathcal{D}(A)$, dann gilt für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 R \quad \Gamma_R \quad \frac{d}{dz} S(z)x \Big|_{z=t} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R_A(\lambda) x d\lambda \\
 &\stackrel{(*)}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} x d\lambda}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R_A(\lambda) A x d\lambda}_{=S(t)Ax}
 \end{aligned}$$

wobei $\int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} x d\lambda = 0$, da $e^{\lambda t}$ holomorph in λ ist und somit das Integral über den linksseitig geschlossenen Integrationsweg (s. Bild) verschwindet:

Abbildung 5.7: Gesamtweg Γ_R^l um den Pol in 0

$$\int_{\Gamma_R} e^{\lambda t} x dt = 0 \quad \forall t > 0$$

und $\int_{\Gamma_R^l} e^{\lambda t} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$. Also erhalten wir:

$$\frac{d}{dz} S(z)x \Big|_{z=t} = S(t)Ax \xrightarrow{t \downarrow 0} Ax.$$

Es folgt:

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{\frac{d}{dt} S(t)x dt}_{=S(t)Ax} \xrightarrow{h \downarrow 0} Ax,$$

Also ist $x \in \mathcal{D}(B)$ und $Bx = Ax$, d.h. $A \subseteq B$.

„ $B \subseteq A$ “ : Wir wissen: $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, d.h. für $x \in \mathcal{D}(B)$ besitzt für $y := x - Bx$ die Gleichung $\tilde{x} - A\tilde{x} = y$ eine eindeutige Lösung $\tilde{x} \in \mathcal{D}(A)$. Aber es ist $A \subseteq B$, also ist auch $\tilde{x} - B\tilde{x} = y$. Da $I - B : \mathcal{D}(B) \rightarrow X$ bijektiv ist (da $1 \in \rho(B)$), folgt $x = \tilde{x} \in \mathcal{D}(A) \implies x \in \mathcal{D}(A)$ und $Ax = Bx$, d.h. $A \equiv B$.

□

Bemerkung: Im Satz 5.7 auf Seite 59 gilt auch die Umkehrung, d.h. erzeugt ein linearer Operator A eine beschränkte holomorphe Halbgruppe $(S(z))_{z \in \Sigma_\delta}$ auf einem Sektor $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, dann ist A sektoriell mit Spektralwinkel $\theta \geq \delta + \frac{\pi}{2}$

Beweisidee:

Betrachte für $|\alpha| < \delta$ die beschränkte \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(e^{i\alpha t}))_{t \geq 0}$. Diese besitzt den Generator $e^{i\alpha}A$.

Nach dem Satz von Hille-Yosida gilt dann $\rho(e^{i\alpha}A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}$ und

Abbildung 5.8: Resolventenmenge von $e^{i\alpha}A$

$$\|(e^{-i\alpha}\lambda - A)^{-1}\| = \|e^{-i\alpha}(\underbrace{e^{-i\alpha}\lambda}_{=z} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(\lambda - e^{i\alpha}A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$$

$$\leq \frac{M_\delta}{\operatorname{Re}(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \quad \text{für ein } M_\delta \geq 1$$

$\rho(A) \supseteq \Sigma_{\tilde{\delta} + \frac{\pi}{2}}$, $\forall 0 < \tilde{\delta} < \delta$. Es ist noch die Resolventenabschätzung zu zeigen.

Wähle dazu $\varepsilon > 0$ mit $\tilde{\delta} + \varepsilon < \delta$. Dann existiert ein $\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}$ und ein α mit $|\alpha| < \tilde{\delta} + \varepsilon$ so, dass

$$z = e^{-i\alpha}\lambda$$

Damit:

$$\|(\underbrace{z}_{=\lambda e^{-i\alpha}} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_{\tilde{\delta} + \varepsilon}}{\operatorname{Re}(\lambda)} = \frac{M_{\tilde{\delta} + \varepsilon}}{|\lambda| \cos(\arg(\lambda))}$$

$$\stackrel{|\lambda|=|z|}{\leq} \frac{M_{\tilde{\delta} + \varepsilon}}{|z| \cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)} = \frac{C_{\tilde{\delta} + \varepsilon}}{|z|}$$

Daraus folgt, dass A sektoriell ist.

Satz 5.8. Sei A ein Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $(S(t))_{t \geq 0}$ ist eine beschränkte holomorphe Halbgruppe
- (ii) $]0, \infty[\ni t \mapsto S(t) \in \mathcal{L}(X)$ ist differenzierbar und es existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$\left\| t \frac{d}{dt} S(t) \right\|_{\mathcal{L}(X)} = \|tAS(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{t} \quad \forall t > 0.$$

Beweisidee:

- (i) \Rightarrow (ii): Da $(S(t))_{t \geq 0}$ holomorphe Halbgruppe, ist die Differenzierbarkeit der Abbildung $t \mapsto S(t)$ klar. Weiter gilt für die Halbgruppe für alle $t > 0$ die Darstellung

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R_A(\lambda) d\lambda, \quad t > 0$$

und somit

$$\frac{d}{dt} S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R_A(\lambda) d\lambda \quad t > 0$$

Durch Abschätzung des Integrals erhält man die Aussage.

- (ii) \Rightarrow (i): Zeige induktiv, dass $t \mapsto S(t)$ n -mal differenzierbar ist, mit $\frac{d^n}{dt^n} S(t) = (AS(\frac{t}{n}))^n$. Durch Abschätzung und Entwicklung in eine Potenzreihe, erhält man die Aussage.

Wir wissen nun, dass für einen Operator A , der Erzeuger einer holomorphen Halbgruppe ist, das Cauchyproblem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases},$$

$\forall u_0 \in X$ genau eine klassische Lösung $u = S(\cdot)u_0 \in \mathcal{C}^1(]0, \infty[; X) \cap \mathcal{C}([0, \infty; X)$ besitzt.

Wir betrachten nun das inhomogene Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases} \quad (\text{CP})$$

Wir haben bereits gesehen, dass die milde Lösung des inhomogenen Cauchyproblems unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an die Daten (nämlich: $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ und $f \in C^1([0, T]; X)$) eine klassische Lösung ist. Falls A der Erzeuger einer analytischen Halbgruppe ist, ist die milde Lösung bereits klassische Lösung unter geringeren Regularitätsvoraussetzungen an f :

Satz 5.9. Sei A der Erzeuger einer holomorphen Halbgruppe $(S(z))_{z \in \Sigma_\delta}$, $u_0 \in X$ und $f : [0, \infty[\rightarrow X$ sei lokal Hölderstetig, d.h.

$$\forall T > 0 \quad \exists \alpha \in]0, 1] \text{ und } L > 0 : \quad \|f(t) - f(s)\|_X \leq L|t - s|^\alpha \quad \forall t, s \in [0, T].$$

Dann besitzt das Cauchyproblem (CP)(u_0, f) eine eindeutige klassische Lösung $u \in \mathcal{C}^1(]0, \infty[; X) \cap \mathcal{C}([0, \infty; X)$.

Im Beweis dieses Satzes werden wir uns auf folgendes Lemma stützen:

Lemma 5.10. Sei A der Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$. Weiter seien $g :]0, T[\rightarrow X$ stetig mit $\int_0^T \|g(s)\|_X ds < \infty$ (d.h. $g \in L^1(0, T; X)$) und $u_0 \in D(A)$ und $u \in C([0, T]; X)$ die eindeutige milde Lösung des Cauchyproblems (CP)(u_0, g), d.h.

$$u(t) = S(t)u_0 + \underbrace{\int_0^t S(t-s)g(s)ds}_{=:v(t)}, \quad t \in [0, T[.$$

Falls gilt, dass $v(t) \in \mathcal{D}(A) \quad \forall 0 < t < T$ und $Av \in \mathcal{C}(]0, T[; X)$, dann ist u die klassische Lösung von (CP)(u_0, g).

Falls $(S(t))_{t \geq 0}$ holomorph ist, dann gilt die obige Aussage sogar für alle $u_0 \in X$.

Beweis: Da $v(t) \in \mathcal{D}(A) \quad \forall 0 < t < T$, gilt

$$\begin{aligned} Av(t) &\stackrel{h \downarrow 0}{\leftarrow} \frac{S(h) - I}{h} \underbrace{v(t)}_{\in \mathcal{D}(A)} = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \underbrace{\frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s) ds}_{\substack{\text{stetig} \\ \xrightarrow{h \downarrow 0} f(t)}} \\ \implies \lim_{h \downarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &\text{ existiert und } = \underbrace{Av(t) + f(t)}_{\text{nach Vor. stetig in } t}, \end{aligned}$$

d.h. wir haben gezeigt, dass v rechtsseitig differenzierbar auf $]0, T[$ mit stetiger rechtsseitiger Ableitung

$\frac{d^+}{dt}v(t) = Av(t) + f(t)$ ist. Hieraus folgt nun ⁶, dass v sogar stetig differenzierbar auf $]0, T[$ ist mit

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^+}{dt}v(t) = Av(t) + f(t), \quad t \in]0, T[.$$

Nun ergibt sich die Behauptung, da die Abbildung $t \mapsto S(t)u_0$ stetig differenzierbar mit $\frac{d}{dt}S(t)u_0 = AS(t)u_0$ auf $[0, T]$, falls $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, bzw. auf $]0, T]$, falls $u_0 \in X$ und $(S(t))_{t \geq 0}$ holomorph. \square

Beweis: (von Satz 5.9)

Wir wollen zeigen, dass die milde Lösung u , d.h. die Funktion $u(t) := S(t)u_0 + \underbrace{\int_0^t S(t-s)f(s)ds}_{=:v(t)}$, $t \geq 0$

eine klassische Lösung ist.

Wir wissen, dass $S(\cdot)u_0 \in \mathcal{C}^1([0, \infty[; X) \cap \mathcal{C}([0, \infty; X)$ und $\frac{d}{dt}S(t)u_0 = AS(t)u_0$, da $(S(t))_{t \geq 0}$ eine holomorphe Halbgruppe ist, d.h. es ist \mathfrak{Z} , dass $v \in \mathcal{C}^1(]0, \infty[; X) \cap \mathcal{C}([0, \infty; X)$ und $\frac{d}{dt}v(t) = Av(t) + f(t)$, $t > 0$ ist. Nach dem obigen Lemma brauchen wir nur zu zeigen, dass $v(t) \in \mathcal{D}(A) \quad \forall 0 < t < T$ und $Av \in \mathcal{C}(]0, T[; X)$ gilt.

Zerlegen wir dazu v wie folgt:

$$v(t) = \underbrace{\int_0^t S(t-s)(f(s) - f(t))ds}_{=:v_1(t)} + \underbrace{\int_0^t S(t-s)\overbrace{f(t)}^{\in X}ds}_{=:v_2(t)}.$$

Es gilt nach Lemma 1.10 auf Seite 15, dass

$$v_2(t) = \int_0^t S(\sigma)f(t)d\sigma \in \mathcal{D}(A)$$

und

$$Av_2(t) = \underbrace{S(t)x - x}_{\text{stetig in } t} \quad t \geq 0.$$

Jetzt müssen wir ein analoges Resultat für v_1 zeigen:

$$v_1(t) \in \mathcal{D}(A) \quad \forall t \geq 0, \quad]0, \infty[\ni t \mapsto Av_1(t) \quad \text{ist stetig.}$$

Betrachten wir zunächst, für $\epsilon > 0$, die Funktion

$$v_{1,\epsilon}(t) = \begin{cases} \int_0^{t-\epsilon} S(t-s)(f(s) - f(t))ds & , t \in [\epsilon, T] \\ 0 & , t \in [0, \epsilon] \end{cases}.$$

Offensichtlich gilt

$$v_{1,\epsilon}(t) \rightarrow v_1(t) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Nun ist $S(t)X \subset D(A)$ für alle $t > 0$, da $(S(t))_{t \geq 0}$ eine analytische Halbgruppe. Folglich ist

$$S(t-s)(f(s) - f(t)) \in D(A) \quad \forall s \in [0, t - \epsilon].$$

⁶ Für reellwertige Funktionen ist dies ein elementares Resultat der reellen Analysis, siehe etwa das Buch von W. Walter, Analysis I, Satz 12.25: f rechtsseitig differenzierbar und $\frac{d^+}{dt}f$ stetig auf Intervall $I \implies f$ ist stetig differenzierbar auf I ; den vektorwertigen Fall führt man wie üblich auf den reellwertigen Fall zurück, indem man, für $x^* \in X^*$, die reellwertige Funktion $\varphi(t) := x^*(v(t))$ betrachtet. Diese ist dann rechtsseitig differenzierbar mit stetiger rechtsseitiger Ableitung $\frac{d^+}{dt}\varphi(t) = x^*\left(\frac{d^+}{dt}v(t)\right)$, also differenzierbar nach dem reellen Satz mit $\frac{d}{dt}v(t) = x^*\left(\frac{d^+}{dt}v(t)\right)$. Es folgt, dass $\varphi(t) - \varphi(s) = x^*(v(t) - v(s)) = \int_s^t x^*\left(\frac{d^+}{d\sigma}v(\sigma)\right) d\sigma = x^*\left(\int_s^t \frac{d^+}{d\sigma}v(\sigma) d\sigma\right)$ für alle $0 \leq s \leq t < T$, für **alle** $x^* \in X^*$. Somit folgt $v(t) - v(s) = \int_s^t \frac{d^+}{d\sigma}v(\sigma) d\sigma$ für alle $0 \leq s \leq t < T$. Aus der Stetigkeit des Integranden folgt nun sofort die Behauptung.

Als stetige Funktion ist die Abbildung

$$s \in [0, t - \epsilon] \mapsto S(t - s)(f(s) - f(t))$$

Riemann-integrierbar und

$$\begin{aligned} v_{1,\epsilon}(t) &= \int_0^{t-\epsilon} S(t-s)(f(s) - f(t)) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{j=1}^n S\left(t - j \frac{t}{n}\right) \left(f\left(j \frac{t}{n}\right) - f(t)\right) \frac{t}{n}}_{=: v_{1,\epsilon}^n(t) \in D(A)}. \end{aligned}$$

Da $(S(t))_{t \geq 0}$ eine analytische Halbgruppe ist, ist die Abbildung $t \in]0, T] \mapsto AS(t)x \in X$ stetig, für alle $x \in X$. Es folgt, dass auch die Abbildung

$$s \in [0, t - \epsilon] \mapsto AS(t - s)(f(s) - f(t))$$

stetig ist.

In der Tat ist für $s \in [0, t - \epsilon]$, $|h| < \epsilon$,

$$\begin{aligned} &\|AS(t - s - h)(f(s + h) - f(t)) - AS(t - s)(f(s) - f(t))\|_X \\ &\leq \| (AS(t - s - h) - AS(t - s))f(t) \|_X \\ &\quad + \| AS(t - s - h)(f(s + h) - f(s)) \|_X \\ &\quad + \| (AS(t - s - h) - AS(t - s))f(s) \|_X, \end{aligned}$$

und wegen der oben erwähnten Stetigkeit der Funktion $t \in]0, T] \mapsto AS(t)x \in X$, für alle $x \in X$, streben der erste und der letzte Term für $h \rightarrow 0$ gegen 0. Für den mittleren Term ergibt sich mit Satz 5.8 die Abschätzung

$$\|AS(t - s - h)(f(s + h) - f(s))\|_X \leq \frac{C}{t - s - h} \|f(s + h) - f(s)\|_X,$$

und der Term auf der rechten Seite strebt ebenfalls gegen 0 für $h \rightarrow 0$.

Aus der Stetigkeit der Abbildung folgt die Riemann-Integrierbarkeit auf $[0, t - \epsilon]$, und somit ist

$$\begin{aligned} &\int_0^{t-\epsilon} AS(t-s)(f(s) - f(t)) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n AS\left(t - j \frac{t}{n}\right) \left(f\left(j \frac{t}{n}\right) - f(t)\right) \frac{t}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A \sum_{j=1}^n S\left(t - j \frac{t}{n}\right) \left(f\left(j \frac{t}{n}\right) - f(t)\right) \frac{t}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} Av_{1,\epsilon}^n(t). \end{aligned}$$

Mit dem üblichen Argument der Abgeschlossenheit des Operators A folgt so, dass $v_{1,\epsilon}(t) \in D(A)$ und $Av_{1,\epsilon}(t) = \int_0^{t-\epsilon} AS(t-s)(f(s) - f(t)) ds$, für alle $t \in [\epsilon, T]$.

Nun wenden wir das Abgeschlossenheitsargument ein weiteres Mal an. Wir erinnern zunächst daran, dass

$$D(A) \ni v_{1,\epsilon}(t) \rightarrow v_1(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.1)$$

Desweiteren folgt mit Satz 5.8, dass

$$\begin{aligned} \|AS(t-s)(f(s) - f(t))\|_X &\leq \frac{C}{t-s} \|f(s) - f(t)\| \\ &\leq \frac{C \cdot L}{t-s} |t-s|^\alpha = \frac{C \cdot L}{(t-s)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

mit $(1 - \alpha) \in [0, 1[$, und da

$$\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} ds = \int_0^t \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} d\sigma < \infty$$

folgt somit die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^t AS(t-s)(f(s) - f(t)) ds.$$

Somit konvergiert, für alle $t \in]0, T]$,

$$\begin{aligned} Av_{1,\epsilon}(t) &= \int_0^{t-\epsilon} AS(t-s)(f(s) - f(t)) ds \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t AS(t-s)(f(s) - f(t)) ds, \end{aligned}$$

und mit der Abgeschlossenheit des Operators A folgt, dass $v_1(t) \in D(A)$ und $Av_1(t) = \int_0^t AS(t-s)(f(s) - f(t)) ds$, für alle $t \in [0, T]$ (der Fall $t = 0$ ist trivial).

Da zudem, für alle $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|Av_1(t) - Av_{1,\epsilon}(t)\|_X &= \left\| \int_{(t-\epsilon)^+}^t AS(t-s)(f(s) - f(t)) ds \right\|_X \\ &\leq \int_{(t-\epsilon)^+}^t \frac{C}{t-s} \|(f(s) - f(t))\|_X ds \\ &\leq CL \int_{(t-\epsilon)^+}^t |s-t|^{\alpha-1} ds \\ &\leq CL \int_0^\epsilon \sigma^{\alpha-1} d\sigma \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0 \end{aligned}$$

und somit die stetige Funktionenfolge $(Av_{1,\epsilon}(\cdot))_\epsilon$ gleichmäßig auf $[0, T]$ gegen Av_1 konvergiert, ist $Av_1 \in C([0, T]; X)$, und damit ist der Beweis vollständig. \square

Bemerkung: Ein typisches Beispiel für einen Erzeuger einer beschränkten holomorphen Halbgruppe ist ein selbstadjungierter, m -dissipativer, dicht definierter linearer Operator in einem Hilbertraum. Konkrete Vertreter dieser Klasse von Operatoren sind etwa:

$$\begin{cases} \mathcal{H} &= L^2(\mathbb{R}^N) \\ \mathcal{D}(A) &= \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^N) \\ Av &= \Delta v, \quad v \in \mathcal{D}(A) \end{cases}$$

oder auch

$$\begin{cases} \mathcal{H} &= L^2(\Omega), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \text{ ein beschränktes Gebiet} \\ \mathcal{D}(A) &= \mathcal{H}_0^1(\Omega) \cap \mathcal{H}^2(\Omega) \\ Av &= \Delta v, \quad v \in \mathcal{D}(A) \end{cases}$$

Exkurs zum Begriff „ m -dissipativ“:

Definition 5.11. Sei X ein Banachraum und A ein linearer Operator mit $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$. Dann heißt A dissipativ, falls gilt:

$$\forall \lambda > 0 : (\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \rightarrow X$$

ist wohldefiniert, einwertig⁷ und kontraktiv, d.h.

$$\|(\lambda I - A)^{-1}v\|_X \leq \|v\|_X \quad \forall v \in R(\lambda I - A).$$

A heißt m-dissipativ⁸, falls A dissipativ ist und $R(\lambda I - A) = X \quad \forall \lambda > 0$.

Wenn A m-dissipativ ist, dann ist A automatisch abgeschlossen.

Beweis: Sei $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$, $u_n \rightarrow u$ in X , $Au_n \rightarrow v$ in X . Da $I - A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ bijektiv ist, existiert ein $\tilde{u} \in \mathcal{D}(A)$ mit der Eigenschaft:

$$\tilde{u} - A\tilde{u} = u - v. \quad (5.2)$$

Da $(I - A)^{-1}$ ($=R_A(1)$) außerdem auch eine Kontraktion ist, folgt:

$$\begin{aligned} \|u_n - \tilde{u}\|_X &= \|(I - A)^{-1}(u_n - v_n) - (I - A)^{-1}(u - v)\|_X \\ &\leq \|u_n - v_n - (u - v)\|_X \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Somit folgt: $u = \tilde{u} \in \mathcal{D}(A)$ und mit (5.2) folgt $Au = v$.

Ist $X = \mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) , so gilt außerdem: A dissipativ $\iff \operatorname{Re}(Au, u) \leq 0$.

Beweis:

- „ \Leftarrow “ : $\lambda u - Au = v \in R(\lambda I - A)$, $\lambda > 0$. \mathcal{Z} : $\|\lambda u\|_X \leq \|v\|_X$.

Testen der Gleichung mit u (d.h. bilde das Skalarprodukt mit u) liefert:

$$\lambda \|u\|_X^2 - (Au, u) = (v, u)$$

Somit

$$\implies \lambda \|u\|_X^2 - \operatorname{Re}(Au, u) = \operatorname{Re}(v, u) \leq \|v\|_X \cdot \|u\|_X.$$

Mit Hilfe der Voraussetzung folgt

$$\lambda \|u\|_X \leq \|v\|_X$$

- „ \Rightarrow “ : Da A dissipativ ist, gilt: $\|\lambda u\|_X \leq \|\lambda u - Au\|_X \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)$, $\lambda > 0$, also $\|\lambda u - Au\|_X^2 - \lambda^2 \|u\|_X^2 \geq 0$.

$$\implies \underbrace{-\lambda(u, Au)}_{=+\lambda \overline{(Au, u)}} - \lambda(Au, u) + \|Au\|_X^2 \geq 0$$

$$\implies -2\lambda \operatorname{Re}(Au, u) + \|Au\|_X^2 \geq 0$$

$$\implies 2\operatorname{Re}(Au, u) - \frac{\|Au\|_X^2}{\lambda} \leq 0$$

$$\stackrel{\lambda \uparrow \infty}{\lambda > 0} \implies \operatorname{Re}(Au, u) \leq 0$$

□

Nunmehr ist also klar, dass ein linearer dicht-definierter Operator genau dann m-dissipativ in einem Banachraum X ist, wenn er die Voraussetzungen des Satzes von Hille-Yosida erfüllt.

Der nachfolgende, auf Lumer-Phillips zurückgehende Satz, ist demnach nichts weiter als eine äquivalente (aber bequeme) Formulierung des Satzes von Hille-Yosida:

⁷einwertig bedeutet, dass die Abbildung jedem x (aus dem Definitionsbereich) genau ein y zuordnet. Das bedeutet im Prinzip, dass es sich um eine Funktion handelt.

⁸Das „m“ in „m-dissipativ“ steht für maximal

Satz 5.12 (von Lumer-Phillips). *Sei A ein linearer Operator A . Dann ist A der Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Kontraktionshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X) \iff A$ m -dissipativ und dicht definiert ist.*

Die obige Bemerkung über typische Vertreter von Erzeugern von beschränkten analytischen Halbgruppen ergibt sich nun leicht aus der Tatsache, dass für einen dicht definierten selbstadjungierten Operator A in einem Hilbertraum \mathcal{H} gilt (s. etwa H. Heuser, Funktionalanalysis, Teubner, 2006, S. 566):

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$$

und

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(\lambda)}$$

für alle nicht-reellen Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ist nun A zudem m -dissipativ, so folgt, dass

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$$

und für alle $\lambda \in \Sigma_{\delta + \frac{\pi}{2}}$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, gilt

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{1}{\operatorname{Im}(\lambda)} \\ &\leq \frac{1}{\cos(\arg(\lambda) - \frac{\pi}{2})} \\ &\leq \frac{1}{\cos(\delta)} \frac{1}{|\lambda|}, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass A sektoriell mit Winkel π ist.

Kapitel 6

Semilineare Anfangswertprobleme

6.1 Existenz und Eindeutigkeit von milden Lösungen

In diesem Kapitel wollen wir semilineare Anfangswertprobleme der Form

$$(sACP) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + F(u) & , t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases}$$

betrachten, wobei

(*) A der Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf einem (reellen oder komplexen) Banachraum X ist und

(**) $F : X \rightarrow X$ eine (i.a. nichtlineare) lokal Lipschitz stetige Funktion ist, d.h. es gilt

$$\forall M > 0 \exists L(M) > 0 \text{ so dass}$$

$$\|F(x) - F(y)\|_X \leq L(M)\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq M, \|y\|_X \leq M.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $L(M)$ eine monoton wachsende Funktion von M ist.

Definition 6.1. Eine klassische Lösung von (sACP) auf $[0, T]$, $T > 0$, ist eine Funktion $u \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; X)$ mit der Eigenschaft, dass $u(0) = u_0$ und

$$u'(t) = Au(t) + F(u(t)) \quad \forall t \in [0, T]$$

(wobei $u'(t)$ in $t = 0$ bzw. $t = T$ die jeweils rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von u bezeichnet).

Ist u eine klassische Lösung von (sACP), dann ist notwendigerweise $u_0 \in D(A)$. Weiter gilt offensichtlich, dass eine klassische Lösung von (sACP) auch klassische Lösung des nicht-homogenen abstrakten Cauchyproblems

$$(ACP) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f & \text{auf } (0, T) \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases}$$

mit

$$f : \begin{array}{l} [0, T] \rightarrow X \\ t \mapsto F(u(t)) \end{array}$$

ist.

Insbesondere erfüllt u die Integralgleichung (vgl. Duhamel-Formel, Kapitel 1)

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Da diese Formel bereits für nur stetige Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$ sinnvoll ist, geben wir in Anlehnung an das nicht-homogene abstrakte Cauchyproblem folgende

Definition 6.2. Eine milde Lösung von (sACP) auf $[0, T]$, $T > 0$, ist eine Funktion $u \in C([0, T]; X)$, die der Integralgleichung

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

genügt.

Die folgenden Ergebnisse über Eindeutigkeit, lokale und globale Existenz von (milden) Lösungen des semi-linearen abstrakten Cauchyproblems erinnern sowohl in den Resultaten als auch in den Beweismethoden vielfach an die entsprechenden Ergebnisse, die wir bereits aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen kennen.

Lemma 6.3 (Eindeutigkeit von milden Lösungen). Seien $u, v \in C([0, T]; X)$ milde Lösungen des semilinearen Anfangswertproblems (sACP) zum gleichen Anfangswert $u_0 \in X$. Dann gilt $u(t) = v(t)$ für alle $t \in [0, T]$.

Beweis:

Seien $K := \sup_{t \in [0, T]} \max\{\|u(t)\|_X, \|v(t)\|_X\}$ und $M > 0, \omega \in \mathbb{R}$ mit $\|S(t)\|_{B(X)} \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$. Durch Subtraktion der beiden jeweils von u bzw. v erfüllten Integralgleichungen erhalten wir nun leicht folgende Abschätzung in der Norm:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_X &\leq \int_0^t \|S(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))\|_X ds \\ &\leq \int_0^t Me^{\omega(t-s)} L(K) \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq L(K) Me^{|\omega|T} \int_0^t e^{-\omega s} \|u(s) - v(s)\|_X ds \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$.

Mit Hilfe des Lemmas von Gronwall (vgl. VL DGL 1 oder die etwas allgemeinere Version unten) folgt

$$\|u(t) - v(t)\|_X \leq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

d.h. aber gerade, dass $u(t) = v(t)$ für alle $t \in [0, T]$. □

Lemma von Gronwall

Seien $C_1, C_2 \geq 0$, $\lambda, \varphi \in L^1(0, T)$ mit $\lambda(t), \varphi(t) \geq 0$ f.ü. $t \in (0, T)$ und so, dass $\lambda\varphi \in L^1(0, T)$ und

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s) ds \quad \text{für fast alle } t \in (0, T).$$

Dann gilt

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s) ds\right) \quad \text{für fast alle } t \in (0, T).$$

Beweis:

Setze $\psi(t) := C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s) ds$, $t \in [0, T]$. Offensichtlich ist ψ absolut stetig und f.ü. differenzierbar. Mit der Voraussetzung folgt

$$\psi'(t) = C_2 \lambda(t)\varphi(t) \leq C_2 \lambda(t)\psi(t) \quad \text{f.ü. } t \in (0, T).$$

Folglich ist

$$\frac{d}{dt} \left\{ \psi(t) \exp\left(-C_2 \int_0^t \lambda(s) ds\right) \right\} \leq 0 \quad \text{f.ü. } t \in (0, T).$$

Da $\psi(0) = C_1$, folgt

$$\psi(t) \exp\left(-C_2 \int_0^t \lambda(s) ds\right) \leq C_1 \quad \text{für alle } t \in [0, T],$$

und somit

$$\psi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s) ds\right) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Da $\varphi(t) \leq \psi(t)$ f.ü. auf $(0, T)$ nach Voraussetzung, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung: Wir werden von nun an stets voraussetzen, dass A der Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von **Kontraktionen** $(S(t))_{t \geq 0}$ auf X ist. Diese zusätzliche Annahme ist nicht wesentlich und erspart uns nur einige technische Schwierigkeiten.

Sämtliche Ergebnisse gelten jedoch auch unter der Voraussetzung, dass A der Erzeuger einer (beliebigen) \mathcal{C}_0 -Halbgruppe ist. In der Tat existiert in diesem Fall ein $\omega \in \mathbb{R}$ und eine äquivalente Norm $\|\cdot\|$ auf X so, dass $A - \omega I$ Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf $(X, \|\cdot\|)$ ist. Der (klassische und auch der milde) Lösungsbegriff ändert sich nicht bei dem Übergang zu einer äquivalenten Norm in X . Da die rechte Seite unserer Differentialgleichung $A + F$ stets als $\tilde{A} + \tilde{F}$ mit $\tilde{A} = A - \omega I$ und $\tilde{F} = F + \omega I$ geschrieben werden kann, reicht es somit, die Existenz von Lösungen nur in dem Spezialfall eines Kontraktionshalbgruppenerzeugers zu zeigen (für klassische Lösungen ist dies nun klar; für milde Lösungen weniger: eine milde Lösung $u \in C([0, T]; X)$ von (sACP) mit rechter Seite $\tilde{A} + \tilde{F}$ ist per Definition die Lösung der Integralgleichung

$$u(t) = \tilde{S}(t)u_0 + \int_0^t \tilde{S}(t-s)\tilde{F}(u(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

mit der von \tilde{A} erzeugten skalierten Halbgruppe $\tilde{S}(t)_{t \geq 0} = (e^{-\omega t} S(t))_{t \geq 0}$. Es ist nicht offensichtlich, dass u dann auch die Integralgleichung

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\tilde{F}(u(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

erfüllt, d.h. die milde Lösung von (sACP) ist; siehe dazu Übung).

Satz 6.4 (Lokale Existenz). Sei A der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf X , F wie in (**).
 Sei $M > 0$, $u_0 \in X$ mit $\|u_0\|_X \leq M$. Dann existiert $T_M > 0$, so dass (sACP) eine eindeutige milde Lösung auf $[0, T_M]$ besitzt.

Beweis:

Das Problem der Existenz einer milden Lösung lässt sich leicht als ein Fixpunktproblem formulieren. Setze dazu

$$K := 2M + \|F(0)\|_X, \quad T_M := \frac{1}{2(L(K) + 1)}$$

und definiere die Menge

$$E := \{u \in C([0, T_M]; X); \|u(t)\|_X \leq K \quad \forall t \in [0, T_M]\}.$$

E ist eine nicht-leere, abgeschlossene Teilmenge des Banachraumes $(C([0, T_M]; X), \|\cdot\|_\infty)$; $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet hier die übliche Supremumsnorm: $\|u\|_\infty = \max_{t \in [0, T_M]} \|u(t)\|_X$ für $u \in C([0, T_M]; X)$. Mit der durch die $\|\cdot\|_\infty$ -Norm induzierten Metrik $d(u, v) = \|u - v\|_\infty$ ist somit (E, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum.

Wir definieren nun eine Abbildung $\Phi : E \rightarrow C([0, T_M]; X)$ durch

$$\Phi(u)(t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, T_M].$$

Aus der Kontraktionseigenschaft der Halbgruppe und der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von F folgt leicht die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(t)\|_X &\leq \|u_0\|_X + \int_0^t \|F(u(s))\|_X ds \\ &\leq \|u_0\|_X + \int_0^t \|F(u(s)) - F(0)\|_X + \|F(0)\|_X ds \\ &\leq \|u_0\|_X + \int_0^t L(K)\|u(s)\|_X + \|F(0)\|_X ds \\ &\leq M + tK(L(K) + 1) \\ &\leq M + \frac{K}{2} \quad (\text{nach Wahl von } T_M) \\ &\leq K \end{aligned}$$

für alle $u \in E$. Folglich ist $\Phi(u) \in E$ für alle $u \in E$, d.h. $\Phi : E \rightarrow E$ ist eine Selbstabbildung. Mit ähnlichen Argumenten erhält man für alle $u, v \in E$, $t \in [0, T_M]$, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_X &\leq L(K) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq L(K)T_M \|u - v\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - v\|_\infty, \end{aligned}$$

nach Wahl von T_M und daher, für alle $u, v \in E$, die Abschätzung

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_\infty,$$

d.h. Φ ist eine strikte Kontraktion. Nach dem Fixpunktsatz von Banach besitzt $\Phi : E \rightarrow E$ daher einen eindeutigen Fixpunkt $u \in E$. Dieser ist gerade die gesuchte eindeutige milde Lösung von (sACP) auf $[0, T_M]$. \square

Aufgrund der Eindeutigkeit der milden Lösung ist klar, dass jede lokale milde Lösung des semilinearen Cauchy-Problems zu einer eindeutigen „maximalen milden“ Lösung fortgesetzt werden kann: Für jedes $u_0 \in X$ können wir die maximale „Existenzzeit“ $T(u_0)$ der milden Lösung definieren als

$$T(u_0) = \sup\{T > 0; \exists u \in C([0, T]; X) \text{ milde Lösung von (sACP)}\}.$$

Nach Satz 6.4 auf der vorherigen Seite ist klar, dass $T(u_0) > 0$. Genauso wie im Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist ebenso offensichtlich, dass das maximale Existenzintervall der milden Lösung rechts halboffen ist: $[0, T(u_0)[$. Falls $T(u_0) = +\infty$ sagen wir, dass die milde Lösung *global* existiert. Der folgende Satz fasst obige Aussagen noch einmal zusammen und gibt zusätzlich eine wichtige Information über das „Randverhalten“ von Lösungen, falls $T(u_0) < \infty$.

Satz 6.5. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 6.4 auf der vorherigen Seite existiert eine Funktion $T : X \rightarrow]0, \infty]$ so, dass gilt:*

$$\forall u_0 \in X \quad \exists u \in C([0, T(u_0)]; X) \text{ mit der Eigenschaft, dass}$$

$$\forall 0 < T < T(u_0) : \quad u \text{ ist eindeutige milde Lösung von (sACP) auf } [0, T]$$

und

$$2L(\|F(0)\|_X + 2\|u(t)\|_X) \geq \frac{1}{T(u_0) - t} - 2 \quad \forall t \in [0, T(u_0)[. \quad (6.1)$$

Insbesondere gilt: entweder ist $T(u_0) = \infty$ oder

$$T(u_0) < \infty \text{ und } \lim_{t \nearrow T(u_0)} \|u(t)\|_X = +\infty. \quad (6.2)$$

Bemerkung: Die oben beschriebene Funktion $u \in C([0, T(u_0)]; X)$ werden wir im weiteren Verlauf als die „maximale“ milde Lösung von (sACP) bezeichnen.

Beweis:

Aus (6.1) folgt unmittelbar, dass $\lim_{t \nearrow T(u_0)} \|u(t)\|_X = +\infty$, falls $T(u_0) < \infty$.

Es bleibt nur noch die Ungleichung (6.1) zu zeigen. Für $T(u_0) = \infty$ ist die Ungleichung trivial. Sei nun also $u_0 \in X$ mit $T(u_0) < \infty$. Wir wollen die Aussage durch Widerspruch beweisen und nehmen dazu an, dass ein $t \in [0, T(u_0)[$ existiert mit der Eigenschaft, dass für die milde Lösung u an der Stelle t die Ungleichung

$$2L(\|F(0)\|_X + 2\|u(t)\|_X) < \frac{1}{T(u_0) - t} - 2$$

gilt. Diese ist offensichtlich äquivalent zu

$$T(u_0) - t < \frac{1}{2(L(\|F(0)\|_X + 2\|u(t)\|_X) + 1)}. \quad (6.3)$$

Definieren wir $M := \|u(t)\|_X$, so ist die Größe auf der rechten Seite der obigen Ungleichung gerade die im Beweis des vorhergehenden lokalen Existenzsatzes garantierte lokale „Mindest-Existenzzeit“ T_M der milden Lösung v des semilinearen Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = Av + F(v), & t > 0 \\ v(0) = u(t) \end{cases},$$

und (6.3) ist äquivalent zur Ungleichung

$$T(u_0) < t + T_M.$$

Wir werden nun zeigen, dass die milde Lösung $u \in C([0, t]; X)$ von (sACP) mit Anfangswert u_0 durch die milde Lösung $v \in C([0, T_M]; X)$ des obigen (sACP)s zum Anfangswert $u(t)$ zu einer milden Lösung

auf dem Intervall $[0, t + T_M]$ fortgesetzt werden kann. Da $T(u_0) < t + T_M$, folgt dann der Widerspruch. Wir definieren dazu $w : [0, t + T_M] \rightarrow X$ durch

$$w(s) := \begin{cases} u(s) & , s \in [0, t] \\ v(s-t) & , s \in [t, t + T_M]. \end{cases}$$

Da $v(0) = u(t)$, und u, v als milde Lösungen stetige Funktionen sind, ist w offensichtlich wohl-definiert und stetig. Da $w = u$ auf $[0, t]$, ist w zudem milde Lösung von (sACP) zum Anfangswert u_0 auf $[0, t]$. Für $s \in [t, t + T_M]$ gilt

$$\begin{aligned} w(s) &= v(s-t) \\ &= S(s-t)u(t) + \int_0^{s-t} S(s-t-\sigma)F(v(\sigma)) d\sigma \quad (\text{da } v \text{ milde Lösung von } (*)) \\ &= S(s-t) \left(S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)F(u(\sigma)) d\sigma \right) \\ &\quad + \int_t^s S(s-\tilde{\sigma})F(v(\tilde{\sigma}-t)) d\tilde{\sigma} \quad (\text{Variablentransformation } \tilde{\sigma} = \sigma + t) \\ &= S(s)u_0 + \int_0^t S(s-\sigma)F(u(\sigma)) d\sigma + \int_t^s S(s-\sigma)F(v(\sigma-t)) d\sigma \\ &= S(s)u_0 + \int_0^s S(s-\sigma)w(\sigma) d\sigma \quad (\text{nach Definition von } w), \end{aligned}$$

und somit erfüllt w auch auf $[t, t + T_M]$ die erforderliche Integralgleichung, d.h. w ist milde Lösung von (sACP) zum Anfangswert u_0 auf $[0, t + T_M]$. \square

Bemerkung: Das in (6.2 auf der vorherigen Seite) beschriebene Verhalten der Lösung bezeichnet man als „Explosion“ („blow-up“). Da eine milde Lösung u entweder global existiert oder aber in endlicher Zeit explodiert, ist es möglich, die globale Existenz einer milden Lösung zu zeigen, indem man versucht *a priori*-Abschätzungen für die Norm $\|u(t)\|_X$ auf $[0, T(u_0)[$ herzuleiten. Ist die milde Lösung sogar klassische Lösung, können geeignete Abschätzungen oft leicht durch eine geschickte Wahl von Testfunktionen in der Differentialgleichung gewonnen werden (siehe Ende dieses Kapitels).

Aus der Abschätzung (6.1 auf der vorherigen Seite) in Satz 6.5 auf der vorherigen Seite ergibt sich leicht folgendes Resultat über die Existenz von globalen Lösungen:

Korollar 6.6. *Es sei A der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf dem Banachraum X und $F : X \rightarrow X$ sei global Lipschitz stetig, d.h. es existiert ein $L > 0$, so dass*

$$\|F(x) - F(y)\|_X \leq L\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X.$$

Dann besitzt das (sAWP) für jeden Anfangswert $u_0 \in X$ eine eindeutige globale milde Lösung.

Beweis:

Nach Satz 6.5 auf der vorherigen Seite erfüllt die maximale Existenzzeit $T(u_0)$ unter den globalen Lipschitzbedingung die Ungleichung

$$2L \geq \frac{1}{T(u_0) - t} - 2 \quad \forall t \in [0, T(u_0)[.$$

Angenommen für ein $u_0 \in X$ ist $T(u_0) < +\infty$. Dann wäre aber

$$\lim_{t \rightarrow T(u_0)^-} \frac{1}{T(u_0) - t} - 2 = +\infty,$$

und es ergibt sich sofort der Widerspruch. \square

Satz 6.7 (Stetige Abhängigkeit der milden Lösung vom Anfangswert). *Unter den Voraussetzungen des Satzes 6.4 auf Seite 74 gilt:*

(i) $T : X \rightarrow]0, \infty]$ ist unterhalb stetig, d.h. für alle $u_0, (u_{0n})_n \subset X$ mit $u_{0n} \rightarrow u_0$ in X für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$T(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} T(u_{0n}).$$

(ii) falls $u_{0n} \rightarrow u_0$ in X für $n \rightarrow \infty$, u_n die milde Lösung von (sACP) zum Anfangswert u_{0n} und u die milde Lösung von (sACP) zum Anfangswert u_0 , dann gilt für alle $0 < T < T(u_0)$, dass $u_n \rightarrow u$ in $C([0, T]; X)$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis:

Seien $u_0 \in X$, $(u_{0n})_n \subset X$ mit $u_{0n} \rightarrow u_0$ in X , u_n bzw. u die entsprechenden maximalen milden Lösungen von (sACP) zum Anfangswert u_{0n} bzw. u_0 .

Sei $0 < T < T(u_0)$.

Wähle nun

$$M := 2\left\{\max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X + 1\right\} \geq 2\{\|u_0\|_X + 1\}.$$

(Die „+1“ wird hinzugefügt, um auch den Fall $u_0 = 0$ mit einzuschließen.)

Da $u_{0n} \rightarrow u_0$ in X , gilt für alle genügend großen n

$$\|u_{0n}\|_X \leq M. \quad (6.4)$$

Wir definieren nun

$$\tau_n := \sup\{t \in [0, T(u_{0n})]; \|u_n(s)\|_X \leq 2M \forall s \in [0, t]\}.$$

Wegen (6.4) ist klar, dass $\tau_n > 0$.

Auf dem Intervall $[0, \min\{\tau_n, T\}]$ existieren sowohl die milde Lösung u als auch die milde Lösung u_n ; beide Funktionen sind außerdem auf diesem Intervall in der Norm durch $2M$ beschränkt. Durch Subtraktion der Integralgleichungen für u und u_n erhalten wir dann leicht die Abschätzung

$$\|u(t) - u_n(t)\|_X \leq \|u_0 - u_{0n}\|_X + L(2M) \int_0^t \|u(s) - u_n(s)\|_X ds$$

für alle $0 \leq t \leq \min\{\tau_n, T\}$.

Mit Hilfe des Lemmas von Gronwall folgt

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_n(t)\|_X &\leq \|u_0 - u_{0n}\|_X e^{L(2M)t} \\ &\leq \|u_0 - u_{0n}\|_X e^{L(2M)T} \end{aligned} \quad (6.5)$$

für alle $0 \leq t \leq \min\{\tau_n, T\}$.

Hieraus ergibt sich nun leicht die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq \min\{\tau_n, T\}} \|u_n(t)\|_X &\leq \sup_{0 \leq t \leq \min\{\tau_n, T\}} \|u(t)\|_X + \|u_0 - u_{0n}\|_X e^{L(2M)T} \\ &\leq \frac{M}{2} + \|u_0 - u_{0n}\|_X e^{L(2M)T}. \end{aligned}$$

Da $\|u_0 - u_{0n}\|_X e^{L(2M)T} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, folgt somit

$$\|u_n(t)\|_X \leq M \quad \forall 0 \leq t \leq \min\{\tau_n, T\}, \text{ für alle } n \text{ genügend groß.} \quad (6.6)$$

Aus dieser Abschätzung folgt nun sofort, dass

$$\tau_n > T \quad \text{für alle } n \text{ genügend groß.} \quad (6.7)$$

In der Tat: ist $\tau_n \leq T$, dann gilt nach Definition von τ_n und wegen der Stetigkeit von u_n , dass $\|u_n(\tau_n)\|_X = 2M$. Dies steht aber im offensichtlichen Widerspruch zu (6.6 auf der vorherigen Seite). Aus (6.7 auf der vorherigen Seite) folgt nun zunächst $T(u_{0n}) > T$, und da $0 < T < T(u_0)$ beliebig gewählt war, ergibt sich daraus

$$T(u_{0n}) > T(u_0) \quad \text{für alle } n \text{ genügend groß.}$$

Insbesondere folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T(u_{0n}) \geq T(u_0).$$

Aus (6.5 auf der vorherigen Seite) folgt nun sofort auch die gesuchte Konvergenz $u_n \rightarrow u$ in $C([0, T]; X)$ für alle $0 < T < T(u_0)$. \square

Bemerkung: Die Funktion $T : X \rightarrow]0, \infty]$ ist i.a. nicht stetig. Dies ist selbst dann nicht der Fall, wenn $A = 0$ und $X = \mathbb{R}^N$ (d.h. es sich um ein nicht-lineares AWP für eine gewöhnliche Differentialgleichung handelt).

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^2$, $A = 0$ und

$$F(u, v) = (vu^2, -2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Das zugehörige Anfangswertproblem lautet dann einfach

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vu^2 \\ -2 \end{pmatrix}, & t > 0 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Betrachte nun den Anfangswert $(u_0, v_0) = (1, 2)$. Die Differentialgleichung für v ist unabhängig von u , und wir finden sofort $v(t) = 2 - 2t$. Einsetzen von v in die Differentialgleichung für u ergibt die Differentialgleichung $u' = 2(1-t)u^2$, die wir durch Separation der Variablen leicht lösen können. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung finden wir die Lösung $u(t) = 1/(t-1)^2$. Somit ergibt sich als lokale Lösung des AWP

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2-2t}{(1-t)^2} \\ 2-2t \end{pmatrix},$$

und als maximale Existenzzeit dieser Lösung $T(u_0, v_0) = 1$.

Für den leicht modifizierten Anfangswert $(u_0^\epsilon, v_0^\epsilon) = (\frac{1}{1+\epsilon}, 2)$ mit $\epsilon > 0$ ergibt sich genauso leicht als explizite Lösung des obigen AWP

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2-2t}{(1-t)^2 + \epsilon} \\ 2-2t \end{pmatrix},$$

und diese ist offensichtlich global, d.h. $T(u_0^\epsilon, v_0^\epsilon) = +\infty$.

Somit ist

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} T(u_0^\epsilon, v_0^\epsilon) = +\infty > T(u_0, v_0) = 1.$$

6.2 Regularität von milden Lösungen; klassische Lösungen

Wir werden als nächstes die Frage untersuchen, unter welchen Voraussetzungen (an den Banachraum X , den Operator A und/oder der Störung F) die milde Lösung sogar eine klassische Lösung ist. Ein Ergebnis in dieser Richtung liefert der folgende

Satz 6.8. Seien X ein reflexiver Banachraum, A und F wie in Satz 6.4 auf Seite 74. Dann gilt: Für jeden Anfangswert $u_0 \in D(A)$ ist eine milde Lösung von (sACP) bereits eine klassische Lösung von (sACP).

Erinnerung: Ein Banachraum X ist reflexiv, wenn die kanonische isometrische Einbettung $i : X \rightarrow X^{**}$, definiert für $x \in X$ durch

$$i(x)(x^*) := x^*(x) \quad \text{für alle } x^* \in X^*,$$

surjektiv ist. Damit ist dann X isometrisch isomorph zu seinem Bidualraum X^{**} . Beispiele für reflexive Banachräume sind Hilberträume, L^p -Räume und $W^{1,p}$ -Räume für $1 < p < \infty$.

Die Lebesgue-Räume L^1 und L^∞ , die Sobolev-Räume für $p = 1$ und $p = \infty$ als auch die üblichen Räume von stetigen Funktionen ($C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, $C_b(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ lokal kompakt, $C_0(\Omega)$ etc.) sind nicht reflexiv.

Nach dem Satz von Komura (vgl. VL DGL 2) ist, wenn X reflexiv ist, eine absolutstetige vektorwertige Abbildung $v : [0, T] \rightarrow X$ fast überall differenzierbar, ihre Ableitung $\frac{d}{dt}v \in L^1(0, T; X)$ und v ist als Integral über die Ableitung darstellbar:

$$v(t) - v(s) = \int_s^t \frac{d}{d\sigma} v(\sigma) d\sigma, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Ist $v : [0, T] \rightarrow X$ Lipschitz-stetig (und damit insbesondere absolutstetig), gilt für die Ableitung sogar $\frac{d}{dt}v \in L^\infty(0, T; X)$, wie man leicht nachprüft.

Beweis:

Seien $u_0 \in D(A)$ und $u \in C([0, T]; X)$, $T > 0$, eine zugehörige milde Lösung von (sACP).

Als milde Lösung erfüllt u die Integralgleichung

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Da $u_0 \in D(A)$, ist die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)u_0$ stetig differenzierbar mit $\frac{d}{dt}S(t)u_0 = AS(t)u_0 = S(t)Au_0$ für alle $t \geq 0$.

Bezeichnen wir

$$v(t) := \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

so bleibt nun zu zeigen, dass v stetig differenzierbar ist und

$$\frac{d}{dt}v(t) = Av(t) + F(u(t)), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.8)$$

Wir werden dazu zunächst zeigen, dass die milde Lösung u Lipschitz-stetig ist.

Dazu betrachten wir für kleines $h > 0$, $t \in [0, T-h[$

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= \underbrace{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}_{=:T_1} + \\ &\quad \underbrace{\int_0^{t+h} S(t+h-s)F(u(s)) ds - \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds}_{=:T_2}. \end{aligned}$$

Der erste Term schreiben wir als Integral über die Ableitung

$$T_1 = \int_t^{t+h} S(s)Au_0 ds.$$

Unter Ausnutzung der Kontraktionseigenschaft der Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ erhalten wir daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|T_1\|_X &\leq \int_t^{t+h} \|S(s)Au_0\|_X ds \\ &\leq \int_t^{t+h} \|Au_0\|_X ds \\ &= h\|Au_0\|_X. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von einfachen Variablentransformationen ($s = t + h - \sigma$ und $s = t - \sigma$ im ersten Schritt, $\sigma = t - s$ und $\sigma = s + t$ im letzten Schritt) ergibt sich

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_0^{t+h} S(s)F(u(t+h-s)) ds - \int_0^t S(s)F(u(t-s)) ds \\ &= \int_0^t S(\sigma)(F(u(t+h-\sigma)) - F(u(t-\sigma))) d\sigma + \int_t^{t+h} S(s)F(u(t+h-s)) ds \\ &= \int_0^t S(t-s)(F(u(s+h)) - F(u(s))) ds + \int_0^h S(s+t)F(u(h-s)) ds. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Kontraktionseigenschaft der Halbgruppe und der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von F erhalten wir

$$\begin{aligned} \|T_2\|_X &\leq \int_0^t \|F(u(s+h)) - F(u(s))\|_X ds + \int_0^h \|F(u(h-s))\|_X ds \\ &\leq L(M) \int_0^t \|u(s+h) - u(s)\|_X ds + hK, \end{aligned}$$

wobei $M := \max_{s \in [0, T]} \|u(s)\|_X$ und $K := \max_{s \in [0, T]} \|F(u(s))\|_X$.

Insgesamt ergibt sich so die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\|_X &\leq \|T_1\|_X + \|T_2\|_X \\ &\leq L(M) \int_0^t \|u(s+h) - u(s)\|_X ds + h(K + \|Au_0\|_X). \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt

$$\|u(t+h) - u(t)\|_X \leq h(K + \|Au_0\|_X)e^{L(M)T}, \quad \forall h > 0, 0 \leq t \leq T - h,$$

und damit ist die Lipschitz-Stetigkeit von u gezeigt.

Da $F : X \rightarrow X$ lokal Lipschitz-stetig, folgt nun sofort, dass auch die Funktion $t \in [0, T] \mapsto F(u(t))$ Lipschitz-stetig ist.

Die Lipschitz-Stetigkeit von $t \in [0, T] \mapsto f(t) := F(u(t))$ erlaubt es nun, die stetige Differenzierbarkeit von $t \in [0, T] \mapsto v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s) ds$ zu zeigen. Betrachten wir dazu für $h > 0, t \in [0, T - h]$,

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \int_0^t S(t-s) \left(\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right) ds + \frac{1}{h} \int_0^h S(s+t)f(h-s) ds.$$

Aus der Stetigkeit des Integranden folgt sofort

$$\frac{1}{h} \int_0^h S(s+t)f(h-s) ds \rightarrow S(t)f(0) = S(t)F(u_0) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Da $t \mapsto f(t)$ Lipschitz-stetig auf $[0, T]$, ist f nach dem Satz von Komura fast überall differenzierbar mit $f' \in L^\infty(0, T; X)$. Da außerdem wegen der Lipschitz-Stetigkeit

$$\left\| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right\|_X \leq L \quad \text{für alle } h > 0, 0 \leq s \leq T - h,$$

folgt aus dem Satz der dominierten Konvergenz von Lebesgue, dass

$$\frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} \rightarrow f' \quad \text{in } L^1(0, t; X), \forall 0 \leq t < T.$$

Da $(S(t))_{t \geq 0}$ Kontraktionshalbgruppe, folgt sofort, dass dann auch

$$S(t - \cdot) \frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} \rightarrow S(t - \cdot) f'(\cdot) \quad \text{in } L^1(0, t; X), \forall 0 \leq t < T.$$

Somit ist gezeigt, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \int_0^t S(t-s) f'(s) ds + S(t) f(0) \quad \forall t \in [0, T], \quad (6.9)$$

d.h. v ist in jedem Punkt $t \in [0, T[$ rechtsseitig differenzierbar und $t \mapsto \frac{d^+ v}{dt}$ ist stetig auf $[0, T[$. Hieraus folgt wie schon im Beweis des Satzes 5.9, dass v stetig differenzierbar ist. Alternativ kann hier wie folgt argumentiert werden: v ist als Lipschitz-stetige Funktion f.ü. differenzierbar auf $]0, T[$ und als Integral der Ableitung darstellbar, somit ist

$$v(t) - v(s) = \int_s^t \frac{dv}{d\sigma}(\sigma) d\sigma = \int_s^t \frac{d^+ v}{d\sigma}(\sigma) d\sigma \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T,$$

und aus der Stetigkeit der (rechtsseitigen) Ableitung folgt nun sofort, dass v auch linksseitig differenzierbar auf $]0, T[$ ist und

$$\frac{d^- v}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t) - v(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \frac{d^+ v}{d\sigma} v(\sigma) d\sigma = \frac{d^+ v}{dt}(t) \quad \forall t \in]0, T[.$$

Folglich ist $v \in C^1([0, T[; X)$.

Die linksseitige Differenzierbarkeit in T zeigt man mit ähnlichen Argumenten:

$$\begin{aligned} \frac{v(T) - v(T-h)}{h} &= \int_0^T S(T-s) \frac{f(s) - f(s-h)}{h} ds + \frac{1}{h} \int_0^h S(T-\sigma) f(\sigma-h) d\sigma \\ &\rightarrow \int_0^T S(T-s) f'(s) ds + S(T) f(0) = \lim_{t \rightarrow T^-} v'(t), \end{aligned}$$

und es ist nun noch (6.8 auf Seite 79) zu zeigen (die in (6.9) erzielte Darstellung der Ableitung hilft uns da leider nicht weiter...).

Wir betrachten deshalb für $h > 0$, $0 \leq t \leq T-h$,

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} v(t) &= \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(t-s) f(s) ds \\ &= \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Da v differenzierbar auf $[0, T]$ und der Integrand des zweiten Integrals stetig ist, konvergiert die rechte Seite der obigen Gleichung gegen $v'(t) + f(t)$, für alle $t \in [0, T[$.

Die Existenz des Limes $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} v(t)$ impliziert, dass $v(t) \in D(A)$ und $Av(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} v(t) = v'(t) + f(t) = v'(t) + F(u(t))$ für alle $t \in [0, T[$.

Gleiches gilt auch noch für $t = T$, wie leicht aus der Abgeschlossenheit von A folgt. \square

Bemerkungen:

1.) Falls X nicht reflexiv, dann ist die milde Lösung i. a. keine klassische Lösung.

Beispiel: Sei $X = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ausgestattet mit der Norm

$$\|(f, g)\|_X := \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \quad (f, g) \in X.$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die übliche Supremumsnorm im Banachraum $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ der stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen.

Der so definierte Produktraum $(X, \|\cdot\|_X)$ ist ein nicht-reflexiver Banachraum.

Betrachte nun in X den Operator A definiert durch

$$\begin{cases} D(A) = \{(u, v) \in X \cap C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}); (u', v') \in X\} \\ A(u, v) = (u', v') \quad \text{für alle } (u, v) \in D(A) \end{cases} .$$

Man prüft leicht nach, dass A Generator der Linkstranslationshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf X ist:

$$S(t)(f, g) = (f(t + \cdot), g(t + \cdot)) \quad \forall (f, g) \in X, t \geq 0.$$

Betrachte das semilineare Anfangswertproblem für A in X :

$$(sACP) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU + F(U) & , t > 0 \\ U(0) = U_0 \in X \end{cases}$$

mit Nichtlinearität

$$F: \begin{matrix} X & \rightarrow & X \\ (u, v) & \mapsto & (v^+, 0) \end{matrix} .$$

Hierbei bezeichnet v^+ , für eine Funktion $v \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, die Funktion in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ definiert durch

$$v^+(r) = \max\{0, v(r)\}, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist F global Lipschitz stetig, und somit besitzt (sACP) für jeden Anfangswert $U_0 = (u_0, v_0) \in X$ eine eindeutige globale milde Lösung $U = (u, v) \in C([0, \infty]; X)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (t) &= S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} v^+(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} u_0(t + \cdot) \\ v_0(t + \cdot) \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} v^+(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Da die 2. Komponente des Integranden verschwindet, ergibt sich für v die Identität

$$v(t) = v_0(t + \cdot), \quad \forall t \geq 0.$$

Somit ist dann aber

$$S(t-s)v^+(s) = S(t-s)v_0^+(s + \cdot) = v_0^+(t + \cdot), \quad \forall 0 \leq s \leq t,$$

und

$$\int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} v^+(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} v_0^+(t + \cdot) \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} tv_0^+(t + \cdot) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall t \geq 0.$$

Es ergibt sich die explizite Gestalt der Lösung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} u_0(t + \cdot) + tv_0^+(t + \cdot) \\ v_0(t + \cdot) \end{pmatrix}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ist nun $(u_0, v_0) \in D(A)$, $v_0(0) = 0$, aber $v_0'(0) \neq 0$, dann ist $v_0^+(t + \cdot) \notin C^1(\mathbb{R})$ für alle $t \geq 0$, und somit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (t) \notin D(A), \quad \forall t \geq 0.$$

Insbesondere ist daher $U(\cdot) = (u, v)(\cdot)$ keine klassische Lösung.

2.) Der Beweis von Satz 6.8 auf Seite 79 zeigt insbesondere, dass die milde Lösung des inhomogenen Cauchy-Problems für einen Kontraktionshalbgruppengenerators A

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f & , t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

eine klassische Lösung ist, wenn X reflexiv, $u_0 \in D(A)$ und $f : [0, T] \rightarrow X$ Lipschitz-stetig ist (siehe Satz 3.6 und nachfolgende Bemerkung auf Seite 47).

Betrachten wir nun folgendes einfaches Anfangs-/Randwertproblem für eine semilineare partielle Differentialgleichung

$$(P1) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} - u + u^p & , t > 0, x \in]0, \pi[\\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & , t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & , x \in [0, \pi] \end{cases} .$$

wobei $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$.

Versuchen wir, dieses Problem als semilineares abstraktes Cauchy-Problem in einem geeigneten Banachraum zu formulieren, so dass unsere bisher erzielten Sätze anwendbar sind.

In Anbetracht der in der VL DGL 2 erzielten Ergebnisse für elliptische Probleme und speziell den Laplace-Operator erscheint als natürliche Wahl für die abstrakte Formulierung der Banachraum $X = L^2(\Omega)$, $\Omega =]0, \pi[$. In diesem definieren wir die Realisierung des Laplace-Operators A wie folgt:

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); u_{xx} \in L^2(\Omega)\} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ Au = u_{xx}, \quad u \in D(A). \end{cases}$$

Mit Hilfe des Satzes von Lax-Milgram folgt dann:

$$\forall \lambda > 0, f \in L^2(\Omega) \quad \text{besitzt das Problem} \begin{cases} u \in D(A) \\ \lambda u - u_{xx} = f \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

genau eine Lösung u .

Verwenden wir nun u als Testfunktion in der Differentialgleichung, so ergibt sich die Gleichung

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} u_x^2 = \int_{\Omega} u f.$$

Da das zweite Integral ≥ 0 ist, folgt somit mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\lambda \|R_A(\lambda)(f)\|_{L^2}^2 = \lambda \int_{\Omega} u^2 \leq \left(\int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} u^2 \right)^{1/2},$$

d.h. aber gerade

$$\lambda \|R_A(\lambda)(f)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}, \quad \forall f \in L^2(\Omega), \lambda > 0.$$

Nach dem Satz von Hille-Yosida (oder, alternativ, Lumer-Phillips) ist somit A der Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von Kontraktionen auf $X = L^2(\Omega)$.

Der Banachraum $X = L^2(\Omega)$ ist als Hilbertraum reflexiv.

Leider ist jedoch keiner der bislang gezeigten Sätze anwendbar, da die Nichtlinearität $u \in L^2(0, \pi) \mapsto F(u) = u^p$ nicht wieder in $L^2(0, \pi)$ abbildet, geschweige denn eine lokal Lipschitz stetige Abbildung von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ darstellt.

Da der Raum $L^2(\Omega)$ offensichtlich also für die gegebene Nichtlinearität nicht geeignet scheint, versuchen wir nun, ein besser geeignetes abstraktes setting für unser Problem zu finden.

Hier bietet sich alternativ der Banachraum $X = \{u \in C([0, \pi]); u(0) = u(\pi) = 0\}$ (ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\infty}$) an.

Wir werden zunächst zeigen, dass der Operator A in X definiert durch

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in X \cap C^2([0, \pi]); u_{xx} \in X\}, \\ Au = u_{xx}, \quad u \in D(A). \end{cases}$$

die Voraussetzungen des Satzes von Hille-Yosida erfüllt und somit eine Kontraktionshalbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ in X erzeugt. Offensichtlich ist A linear. Man rechne als Übungsaufgabe nach, dass A auch abgeschlossen ist. Es verbleibt die Resolventenbedingung zu zeigen.

Erinnern wir uns dazu an die *Fredholm-Alternative* (vgl. VL DGL 1): diese besagt, dass für $\lambda > 0$ das Problem

$$\begin{cases} \lambda u - u_{xx} = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

für jedes $f \in C([0, \pi])$ genau eine klassische Lösung $u \in C^2([0, \pi])$ besitzt, oder aber das homogene Problem

$$\begin{cases} u_{xx} = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

eine nicht-triviale klassische Lösung besitzt.

Betrachten wir daher das homogene Randwertproblem: die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$x^2 - \lambda = 0.$$

Für $\lambda > 0$ ergeben sich daraus die beiden Lösungen $x = \pm\sqrt{\lambda}$. Als Fundamentalsystem der DGL erhalten wir somit: $\{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\}$ und als allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$, $x \in \mathbb{R}$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aus den Randbedingungen folgt

$$0 = u(0) = c_1 + c_2,$$

sowie

$$0 = u(\pi) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi}.$$

Als einzige Lösung dieses Gleichungssystem ergibt sich $c_1 = c_2 = 0$, d.h. aber das homogene Problem besitzt nur die triviale Lösung.

Es folgt, dass $\rho(A) \supset]0, \infty[$.

Aus dem schwachen Maximumsprinzip folgt weiter, dass für jede klassische Lösung u von (6.10) gilt ¹

$$-\|f^-\|_\infty \leq \lambda u(x) \leq \|f^+\|_\infty \quad \forall x \in [0, \pi],$$

d.h. aber

$$\lambda \|u\|_\infty = \lambda \|R_A(\lambda)f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Damit ist gezeigt, dass A die Voraussetzungen des Satzes von Hille-Yosida erfüllt sind.

Es ist ausserdem leicht nachzurechnen, dass

$$\begin{aligned} F : X &\rightarrow X \\ u &\mapsto -u + u^p \end{aligned}$$

wohldefiniert und lokal Lipschitz-stetig ist.

Folglich besitzt das zugehörige semilineare abstrakte Cauchyproblem in X für alle $u_0 \in X$ eine eindeutige lokale milde Lösung.

Leider ist X nicht reflexiv. Somit ist der Regularitätssatz 6.8 auf Seite 79 nicht anwendbar, und es bleibt zunächst offen, ob die milde Lösung bereits eine klassische Lösung ist.

Der folgende Satz bietet einen Ausweg aus dem ersten oben beschriebenen Dilemma: eine Nichtlinearität F ist nicht auf dem ganzen Banachraum X , der angesichts des Operators A eine natürliche Wahl darstellt, definiert oder zwar definiert, aber nicht lokal Lipschitz-stetig auf X . Wenn es in dieser Situation möglich ist, zu zeigen, dass die Nichtlinearität F eingeschränkt auf dem Banachraum $(D(A), \|\cdot\|)$ ausgestattet mit der Graphennorm wohldefiniert und lokal Lipschitz-stetig ist, dann kommt folgender Satz zur Anwendung:

¹Zur Erinnerung die Argumentation für die 2. Ungleichung: wenn $u \leq 0$ auf $[0, \pi]$, dann ist die Ungleichung trivial. Ansonsten existiert $x_0 \in]0, \pi[$ so, dass $u(x_0) = \max_{[0, \pi]} u$. Dann gilt aber $u'(x_0) = 0$ und $u''(x_0) \leq 0$, und es folgt mit Hilfe der DGL

$$\lambda u(x) \leq \lambda u(x_0) \leq \lambda u(x_0) - u_{xx}(x_0) = f(x_0) \leq f^+(x_0) \leq \|f^+\|_\infty \quad \text{für alle } x \in [0, \pi].$$

Satz 6.9. Sei A der Erzeuger einer \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von Kontraktionen auf X , X_1 der Banachraum $(D(A), \|\cdot\|)$ ausgestattet mit der Graphennorm

$$\|u\| = \|u\|_X + \|Au\|_X, \quad u \in D(A).$$

Weiter seien $F : X_1 \rightarrow X_1$ lokal Lipschitz stetig, $u_0 \in D(A)$.

Dann besitzt das (sACP) eine eindeutige klassische Lösung $u \in C^1([0, T(u_0)[; X) \cap C([0, T(u_0)]; D(A))$, d.h. jede milde Lösung von (sACP) ist bereits klassische Lösung.

Beweis:

1. Schritt: Wir versuchen zunächst, das semilineare abstrakte Anfangswertproblem vollständig in dem Banachraum X_1 zu formulieren. Dazu definieren wir

$$\begin{cases} D(A_1) = D(A^2) (= \{x \in D(A); Ax \in D(A)\}) \\ A_1 u = Au, \quad u \in D(A_1). \end{cases}$$

Wir werden zeigen, dass A_1 eine Kontraktionshalbgruppe in X_1 erzeugt. Dazu sind gemäß dem Satz von Hille-Yosida verschiedene Eigenschaften von A_1 zu zeigen:

- $D(A_1)$ ist dicht in X_1 :

Sei dazu $u \in X_1 = D(A)$. Nach Lemma 1.17 auf Seite 23 gilt:

$$u_\lambda := \lambda R_A(\lambda)u \rightarrow u \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty.$$

Da die Resolvente in $D(A)$ abbildet, ist u_λ offensichtlich Element von $D(A)$. Es gilt aber sogar, dass $u_\lambda \in D(A_1) = D(A^2)$. In der Tat ist u_λ Lösung der Gleichung

$$\lambda u_\lambda - Au_\lambda = u,$$

d.h. aber es ist

$$Au_\lambda = \lambda u_\lambda - u \in D(A),$$

und somit $u_\lambda \in D(A^2)$.

Wir haben somit eine Folge $(u_\lambda)_\lambda$ in $D(A_1)$ gefunden, die in der Norm $\|\cdot\|_X$ des Banachraumes X gegen u konvergiert.

Es bleibt zu zeigen, dass u_λ auch in der Graphennorm gegen u konvergiert.

Dazu bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} Au_\lambda &= \lambda A R_A(\lambda)u \\ &= A_\lambda u, \end{aligned}$$

die Yosida-Approximation von u , und erinnern daran (siehe Lemma 1.18 auf Seite 24), dass für $u \in D(A)$ gilt

$$A_\lambda u \rightarrow Au \quad \text{in } X, \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty.$$

Es folgt, dass

$$\|u_\lambda - u\| = \|u_\lambda - u\|_X + \|Au_\lambda - Au\|_X \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty),$$

und somit ist $D(A_1)$ dicht in $D(A)$ bezüglich der Graphennorm.

- A_1 ist abgeschlossen in X_1 :

Es sei $(x_n)_n \subset D(A_1)$, und es gelte

$$x_n \rightarrow x \quad \text{in } X_1, \quad A_1 x_n \rightarrow y \quad \text{in } X_1.$$

Wir müssen zeigen, dass dann schon $x \in D(A_1)$ und $y = A_1 x$. Nach Voraussetzung und der Definition der Norm in X_1 gilt

$$\|x_n - x\|_X + \|A x_n - A x\|_X \rightarrow 0$$

sowie

$$\|A_1x_n - y\|_X + \|A(A_1x_n) - Ay\|_X \rightarrow 0.$$

Aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts der Folge $Ax_n = A_1x_n$ folgt dann sofort, dass $y = Ax$. Da nach Voraussetzung $y \in X_1 = D(A)$, folgt, dass $x \in D(A^2) = D(A_1)$ und somit $A_1x = Ax = y$.

- $]0, \infty[\subset \varrho(A_1)$:

Da A der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe in X ist, folgt aus dem Satz von Hille-Yosida:

$$\forall \lambda > 0, \forall f \in X \exists! u \in D(A) \text{ so, dass } \lambda u - Au = f.$$

Da $X_1 \subset X$, besitzt somit die Gleichung $\lambda u - Au = f$ für alle $\lambda > 0$ eine eindeutige Lösung $u \in D(A)$ insbesondere für alle $f \in X_1$. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$Au = \lambda u - f,$$

sehen wir sofort, dass für $f \in X_1$ gilt:

$$Au \in D(A) \quad \text{und somit } u \in D(A^2) = D(A_1).$$

Daher ist dann auch $A_1u = Au$ und damit ist gezeigt, dass die Gleichung

$$\lambda u - A_1u = f.$$

für alle $f \in X_1$ eine eindeutige Lösung $u \in D(A_1)$ besitzt. Somit ist

$$]0, \infty[\subset \varrho(A_1).$$

- $R_{A_1}(\lambda) : X_1 \rightarrow X_1$ ist kontraktiv, für alle $\lambda > 0$:

Sei $f \in X_1, \lambda > 0$. Da $R_{A_1}(\lambda)f = R_A(\lambda)f$ für $f \in X_1, \lambda R_A(\lambda)$ eine Kontraktion in X ist und $AR_A(\lambda) = R_A(\lambda)A$ auf $D(A)$ (siehe Beweis von Lemma 1.18 auf Seite 24), gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda R_{A_1}(\lambda)f\| &= \|\lambda R_{A_1}(\lambda)f\|_X + \|\lambda AR_{A_1}(\lambda)f\|_X \\ &= \|\lambda R_A(\lambda)f\|_X + \|\lambda AR_A(\lambda)f\|_X \\ &= \|\lambda R_A(\lambda)f\|_X + \|\lambda R_A(\lambda)Af\|_X \\ &\leq \|f\|_X + \|Af\|_X \\ &= \|f\|. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Hille-Yosida erzeugt somit A_1 eine Kontraktionshalbgruppe $(S_1(t))_{t \geq 0}$ auf X_1 . Unter den gegebenen Voraussetzungen an F folgt dann aus Satz 6.4 auf Seite 74 bzw. 6.5 auf Seite 75, dass semilineare abstrakte Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A_1u + F(u), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$u_0 \in X_1 = D(A)$ eine eindeutige maximale milde Lösung $u \in C([0, T[; X_1)$ ($T = T(u_0)$) aus Satz 6.5 auf Seite 75) besitzt:

$$u(t) = S_1(t)u_0 + \int_0^t S_1(t-s)F(u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, T[.$$

2. Schritt: Wir zeigen als nächstes, dass die milde Lösung des Problems in X_1 bereits milde Lösung des ursprünglichen Problems formuliert in X ist.

Wir bemerken dazu zunächst, dass für $x \in D(A_1)$ die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S_1(t)x \in C^1([0, T[; X_1) \cap C([0, T[; D(A_1))$ klassische Lösung des homogenen Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A_1u, & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

ist. Da $X_1 \hookrightarrow X$ (stetig eingebettet!) und $A_1x = Ax$ für alle $x \in D(A_1)$, folgt, dass $t \in [0, \infty[\mapsto S_1(t)x$ auch klassische Lösung ($\in C^1([0, T[; X) \cap C([0, T[; D(A))$) des homogenen Cauchy-Problems in X :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

ist.

Da die eindeutige klassische Lösung dieses Problems durch die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)x$ gegeben ist, folgt

$$S_1(t)x = S(t)x \quad \forall t \geq 0, \forall x \in D(A_1).$$

Da $D(A_1)$ dicht in X_1 ist und $S(t)$ sowie $S_1(t)$ als Abbildungen von X_1 (ausgestattet mit der Graphen-norm) nach X stetig sind, folgt, dass dann auch

$$S_1(t)x = S(t)x \quad \forall t \geq 0, \forall x \in X_1.$$

Mit anderen Worten: $S_1(t)$ ist die Einschränkung von $S(t)$ auf X_1 .

Da $u_0 \in D(A) = X_1$ und die im ersten Schritt gewonnene milde Lösung u des semilinearen Cauchyproblems in X_1 ihre Werte in X_1 annimmt, und außerdem $F : D(A) \rightarrow D(A)$, d.h. wieder in $D(A)$ abbildet, folgt nun sofort, dass u bereits Lösung der Integralgleichung

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, T[,$$

d.h. u ist bereits milde Lösung des ursprünglichen in X gestellten Problems.

3. Schritt: Im letzten Schritt zeigen wir nun, dass u bereits klassische Lösung $\in C^1([0, T[; X) \cap C([0, T[; D(A))$ von (sACP) ist. Da $u_0 \in D(A)$, ist die Funktion $t \in [0, \infty[\mapsto S(t)u_0 \in C^1([0, T[; X) \cap C([0, T[; D(A))$ mit

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = AS(t)u_0 = S(t)Au_0 \quad \text{für alle } t \geq 0. \quad (6.11)$$

Betrachten wir nun die Funktion $v(t) = \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds$, $t \in [0, T[$. Wir zeigen zunächst, dass $v(t) \in D(A)$, für alle $t \in [0, T[$.

Da $u \in C([0, T[; X_1)$ und $F : X_1 \rightarrow X_1$ lokal Lipschitz-stetig, ist auch

$$F \circ u : [0, T[\rightarrow X_1 \text{ stetig.} \quad (6.12)$$

Insbesondere ist auch die Funktion $s \in [0, t] \mapsto S_1(t-s)F(u(s)) = S(t-s)F(u(s)) \in X_1$ stetig, und ihr Integral über $[0, t]$, d.h. $v(t)$, Limes von Riemann-Summen:

$$v_n(t) := \underbrace{\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n S\left(t - j\frac{t}{n}\right) F\left(u\left(j\frac{t}{n}\right)\right)}_{\in X_1 = D(A) !} \rightarrow v(t) \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (6.13)$$

Als nächstes bemerken wir, dass (6.12) offensichtlich impliziert, dass auch die Funktion $s \in [0, T[\mapsto AF(u(s)) \in X$ stetig ist. Somit ist dann auch die Abbildung $s \in [0, t] \mapsto S(t-s)AF(u(s)) = AS(t-s)F(u(s)) \in X$ stetig. Das Riemann-Integral über $[0, t]$, $t \in [0, T[$, ist somit wohldefiniert, und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} \sum_{j=1}^n S\left(t - j\frac{t}{n}\right) AF\left(u\left(j\frac{t}{n}\right)\right) = \int_0^t S(t-s)AF(u(s)) ds.$$

Dank der Linearität des Operators kann A aus den Riemann-Summen herausgezogen werden, und so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{t}{n} \sum_{j=1}^n S\left(t - j\frac{t}{n}\right) AF\left(u\left(j\frac{t}{n}\right)\right) &= A \left[\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n S\left(t - j\frac{t}{n}\right) F\left(u\left(j\frac{t}{n}\right)\right) \right] \\ &= Av_n(t), \end{aligned}$$

d.h. für alle $t \in [0, T[$ gilt:

$$Av_n(t) \rightarrow \int_0^t S(t-s)AF(u(s)) ds \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Zusammen mit (6.13 auf der vorherigen Seite) und der Abgeschlossenheit des Operators A folgt so

$$v(t) \in D(A) \quad \text{für alle } t \in [0, T[,$$

und

$$Av(t) = A \left(\int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds \right) = \int_0^t S(t-s)AF(u(s)) ds,$$

und aus der Stetigkeit des Integranden folgt die Stetigkeit der Funktion $t \in [0, T[\mapsto Av(t)$.

Mit Lemma 5.10 auf Seite 65 folgt nun sofort, dass v stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}v(t) = Av(t) + F(u(t)) \quad \forall t \in [0, T[,$$

und dass u somit klassische Lösung von (sACP) ist. □

Anwendung des Satzes 6.9 auf Seite 85 auf das Anfangs-/Randwertproblem für die semilineare partielle Differentialgleichung

$$(P1) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} - u + u^p & , t > 0, x \in]0, \pi[\\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & , t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & , x \in [0, \pi] \end{cases}$$

mit $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$.

Wir wählen für die abstrakte Formulierung wieder den Banachraum $X = L^2(\Omega), \Omega =]0, \pi[$. Die Realisierung des Laplace-Operators A in X lautet dann (s.o.):

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); u_{xx} \in L^2(\Omega)\} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ Au = u_{xx}, \quad u \in D(A). \end{cases}$$

Es sei nun, wie im Satz 6.9 auf Seite 85 beschrieben, $X_1 = D(A)$, d.h. $X_1 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ausgestattet mit der Graphennorm

$$\| | u \| \| = \|u\|_{L^2} + \|u_{xx}\|_{L^2}, \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Um den Satz anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass die Nichtlinearität

$$F : \begin{array}{l} H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ f(u) := -u + u^p \end{array}$$

wohldefiniert und lokal Lipschitz-stetig (bzgl. der Graphennorm $\| | \cdot \| \|$) ist.

Dazu erinnern wir zunächst einmal an die Einbettungssätze für Sobolev-Räume, und insbesondere daran, dass

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}), \quad \text{und somit auch } H^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\bar{\Omega}).$$

Außerdem gilt folgende Abschätzung für ein $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$:

$$\|u_x\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} \|u_{xx}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} (\|u\|_{L^2} + \|u_{xx}\|_{L^2})$$

(die erste Ungleichung folgt für glattes $u \in C_0^\infty(\Omega)$ sofort mittels partieller Integration, für allgemeines $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ durch Approximation).

Aus den Einbettungssätzen folgt zunächst einmal, dass mit $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ auch $u^p \in C^1(\bar{\Omega})$ und $u^p(0) = u^p(\pi) = 0$, und somit $u^p \in H_0^1(\Omega)$. Desweiteren ist $(u^p)_{xx} = p(p-1)u^{p-2}(u_x)^2 + pu^{p-1}u_{xx}$ (für glatte Funktionen u ist das trivial; für $u \in H^2(\Omega)$ folgt dies wie üblich durch Approximation, vgl.

VL DGL 2). Da $u_{xx} \in L^2(\Omega)$, u_x , u^{p-2} und $u^{p-1} \in L^\infty(\Omega)$, folgt sofort, dass auch $(u^p)_{xx} \in L^2(\Omega)$, d.h. aber $u^p \in H^2(\Omega)$. Somit ist gezeigt, dass F wohldefiniert ist.

Der Nachweis der lokalen Lipschitz-Stetigkeit ist Inhalt einer Übungsaufgabe.

Bemerkung: Anstelle der speziellen Nichtlinearität $f(u) = -u + u^p$ (mit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) kann man ganz analog eine beliebige Nichtlinearität $f \in C^3(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$ behandeln.

Ein analoges Resultat ist im mehrdimensionalen Fall (für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^N$) nur für die Raumdimensionen $N = 2, 3$ zu erzielen (die Wohldefiniertheit und lokale Lipschitz-Stetigkeit von F zeigt man in diesem Fall mit Hilfe der dann noch gültigen Sobolev'schen Einbettungssätze (siehe etwa H. Brézis, Analyse fonctionnelle)

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \quad \text{sowie} \quad H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega).$$

Eine andere Art von Regularisierungseffekt ist zu beobachten, wenn der Operator A Erzeuger einer analytischen Halbgruppe ist:

Satz 6.10. *Es sei A der Generator einer beschränkten analytischen Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ auf dem Banachraum X , $F : X \rightarrow X$ sei eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung, $u_0 \in X$. Wenn $u \in C([0, T]; X)$ eine milde Lösung des semilinearen Cauchyproblems (sACP), dann gilt schon $u \in C^1(]0, T[; X) \cap C(]0, T[; D(A))$.*

Beweis:

Sei $u \in C([0, T]; X)$ eine milde Lösung von (sACP), d.h.

$$u(t) = S(t)u_0 + \underbrace{\int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds}_{=:v(t)}, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Wenn es uns gelingt zu zeigen, dass die Funktion $s \in]0, T] \mapsto F(u(s))$ lokal Hölder stetig ist, folgt die Behauptung sofort mit Hilfe des Satzes 5.9 über die Regularität der milden Lösung des inhomogenen Cauchyproblems für analytische Halbgruppen. Wir werden im Folgenden zeigen, dass u (und somit auch $F(u)$) sogar lokal Lipschitz stetig auf $]0, T]$, d.h. Lipschitz stetig auf jedem Intervall der Form $[\delta, T]$, $0 < \delta < T$, ist.

Man betrachtet hierzu für kleines $h > 0$, und $t \in [\delta, T - h[$

$$u(t+h) - u(t) = \underbrace{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}_{=:T_1} + \underbrace{\int_0^{t+h} S(t+h-s)F(u(s)) ds - \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds}_{=:T_2}.$$

Den ersten Term schreiben wir zunächst in der Form

$$T_1 = S(t+h-\delta)S(\delta)u_0 - S(t-\delta)S(\delta)u_0$$

und dann als Integral über die Ableitung

$$T_1 = \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} S(s)AS(\delta)u_0 ds.$$

Unter Ausnutzung der Beschränktheit der Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ erhalten wir daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|T_1\|_X &\leq \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} \|S(s)AS(\delta)u_0\|_X ds \\ &\leq \int_{t-\delta}^{t+h-\delta} M \|AS(\delta)u_0\|_X ds \\ &= hM \|AS(\delta)u_0\|_X. \end{aligned}$$

Für T_2 ergibt sich, genau wie im Beweis des Satzes 6.8 auf Seite 79, die Darstellung

$$T_2 = \int_0^t S(t-s)(F(u(s+h)) - F(u(s))) ds + \int_0^h S(t+h-s)F(u(s)) ds.$$

Unter Ausnutzung der Beschränktheit der Halbgruppe und der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von F erhalten wir so

$$\begin{aligned} \|T_2\|_X &\leq \int_0^t M \|F(u(s+h)) - F(u(s))\|_X ds + \int_0^h M \|F(u(s))\|_X ds \\ &\leq L(\|u\|_\infty) \int_0^t M \|u(s+h) - u(s)\|_X ds + hMK, \end{aligned}$$

wobei $\|u\|_\infty = \max_{s \in [0, T]} \|u(s)\|_X$, $K := \max_{s \in [0, T]} \|F(u(s))\|_X$ und $M := \sup_{t > 0} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$. Insgesamt ergibt sich so die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\|_X &\leq \|T_1\|_X + \|T_2\|_X \\ &\leq L(\|u\|_\infty) \int_0^t M \|u(s+h) - u(s)\|_X ds + hM(K + \|AS(\delta)u_0\|_X) \end{aligned}$$

für alle $t \in [\delta, T-h]$, oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned} &\|u(t+h+\delta) - u(t+\delta)\|_X \\ &\leq L(\|u\|_\infty)M \int_0^t \|u(s+h+\delta) - u(s+\delta)\|_X ds + hM(K + \|AS(\delta)u_0\|_X) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T-\delta-h]$.

Mit dem Lemma von Gronwall folgt

$$\|u(t+h+\delta) - u(t+\delta)\|_X \leq hM(K + \|AS(\delta)u_0\|_X)e^{L(\|u\|_\infty)MT},$$

für alle $h > 0, 0 \leq t \leq T-\delta-h$, d.h. aber gerade dass u Lipschitz-stetig auf $[\delta, T]$.

□

Anwendung des Satzes 6.10 auf der vorherigen Seite auf das Anfangs-/Randwertproblem für die semilineare partielle Differentialgleichung

$$(P2) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} - u + u^2 & , t > 0, x \in]0, \pi[=: \Omega \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & , t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & , x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Wir wählen für die abstrakte Formulierung den Banachraum $X = \{f \in C([0, \pi]); f(0) = f(\pi) = 0\}$. Die Realisierung des Laplace-Operators A in X lautet:

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in X \cap C^2([0, \pi]); u_{xx} \in X\}, \\ Au = u_{xx}, \quad u \in D(A). \end{cases}$$

Wir haben bereits gesehen, dass A eine \mathcal{C}_0 -Halbgruppe von Kontraktionen in X erzeugt. Man kann zeigen, dass diese Halbgruppe beschränkt analytisch ist (siehe etwa A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Chapter 7). Offensichtlich ist ausserdem die Abbildung

$$F: X \rightarrow X \\ u \mapsto -u + u^2$$

lokal Lipschitz-stetig. Aus dem Satz 6.4 auf Seite 74 folgt, dass das semi-lineare Anfangswertproblem

$$(\text{sACP}) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + F(u) & , t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases}$$

für alle $u_0 \in C([0, \pi])$ eine eindeutige maximale milde Lösung $u \in C([0, T(u_0)[; C([0, \pi]))$. Nach Satz 6.10 auf Seite 89 ist die milde Lösung $u \in C^1([0, T]; C^2([0, \pi]))$, und für alle $t \in]0, T(u_0)[$ gilt

$$\frac{du}{dt}(t)Au(t) = -u(t) + u(t)^2 \quad \text{in } C([0, \pi]),$$

d.h. aber gerade, dass u definiert durch $u(t, x) := u(t)(x)$, $t \in [0, T]$, $x \in [0, \pi]$, eine klassische Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} u(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = -u(t, x) + u^2(t, x)$$

auf $]0, T(u_0)[\times]0, \pi]$ ist.

Wir wollen nun die Frage untersuchen, ob $T(u_0) = \infty$ und somit u eine globale Lösung ist.

Dazu multiplizieren („testen“) wir die Differentialgleichung in jedem Punkt t mit der Funktion $\sin(x)$ und integrieren anschließend über Ω . So erhalten wir für jedes $t \in]0, T(u_0)[$ die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_t(t, x) \sin(x) dx \\ &= \int_{\Omega} u_{xx}(t, x) \sin(x) dx - \int_{\Omega} u(t, x) \sin(x) dx + \int_{\Omega} u^2(t, x) \sin(x) dx. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Mit zweimaliger partieller Integration findet man

$$\int_{\Omega} u_{xx}(t, x) \sin(x) dx = - \int_{\Omega} u(t, x) \sin(x) dx \quad (6.15)$$

(es ergeben sich keine Randterme, da sowohl \sin wie auch u in den Randpunkten verschwinden).

Wir definieren nun auf $]0, T(u_0)[$ die Funktion f durch

$$f(t) := \int_{\Omega} u(t, x) \sin(x) dx, \quad t \in]0, T(u_0)[.$$

Aufgrund der Regularität von u ist $f \in C([0, T(u_0)]) \cap C^1(]0, T(u_0)[$ und

$$\frac{df}{dt}(t) = \int_{\Omega} u_t(t, x) \sin(x) dx \quad \forall t \in]0, T(u_0)[.$$

Aus (6.14) ergibt sich, unter Berücksichtigung von (6.15), folgende gewöhnliche Differentialgleichung für f :

$$\frac{df}{dt}(t) = -2f(t) + \int_{\Omega} u^2(t, x) \sin(x) dx.$$

Der letzte Term kann nicht als Ausdruck von f geschrieben werden. Mit Hilfe der Hölder'schen Ungleichung ergibt sich jedoch folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} & |f(t)| \\ &\leq \int_0^{\pi} |u(t, x) \sin(x)| dx \\ &\leq \left(\int_0^{\pi} u^2(t, x) \sin(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^{\pi} \sin(x) dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \left(\int_0^{\pi} u^2(t, x) \sin(x) dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

d.h. es ist

$$\frac{f(t)^2}{2} \leq \left(\int_0^\pi u^2(t, x) \sin(x) dx \right)^{1/2}.$$

Zusammen mit obiger Differentialgleichung für f folgt somit, dass $f \in C([0, T(u_0)]) \cap C^1(]0, T(u_0)[)$ eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems für eine Differentialungleichung ist:

$$\begin{cases} \frac{df}{dt}(t) \geq -2f(t) + \frac{f(t)^2}{2} \\ f(0) = \int_0^\pi u_0(x) \sin(x) dx. \end{cases}$$

Betrachten wir nun das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{dg}{dt}(t) \geq -2g(t) + \frac{g(t)^2}{2} \\ g(0) = 5. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung ist vom Typ „getrennte Veränderliche“, und mit den expliziten Lösungsmethoden aus der VL DGL 1 finden wir die explizite Form der maximalen Lösung g des Anfangswertproblems:

$$g(t) = \frac{4}{1 - \frac{1}{5}e^{2t}}$$

und das zugehörige maximale Existenzintervall $[0, \frac{\ln(5)}{2}[$. Insbesondere gilt

$$\lim_{t \nearrow \frac{\ln 5}{2}} g(t) = +\infty. \quad (6.16)$$

Ist nun

$$f(0) = \int_0^\pi u_0(x) \sin(x) dx \geq 5$$

(d.h. ist das Anfangsdatum $u_0 \in C([0, \pi])$ „genügend groß“, dann folgt aus dem Vergleichsprinzip für gewöhnliche Differentialgleichungen (siehe VL DGL 1, oder auch W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 7. Auflage, II.§ 9), dass

$$g(t) \leq f(t) \quad \text{für alle } t \leq \min \left\{ \frac{\ln 5}{2}, T(u_0) \right\}.$$

Wäre nun $T(u_0) > \frac{\ln 5}{2}$, dann ergäbe sich aus dem Vergleichsprinzip aus (6.16), dass

$$\lim_{t \nearrow \frac{\ln 5}{2}} f(t) = +\infty.$$

Da aber

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^\pi u(t, x) \sin(x) dx \\ &\leq \|u(t, \cdot)\|_\infty \int_0^\pi \sin(x) dx \\ &= 2\|u(t, \cdot)\|_\infty, \end{aligned}$$

folgt, dass

$$\lim_{t \nearrow \frac{\ln 5}{2}} \|u(t, \cdot)\|_\infty = +\infty,$$

d.h. $u(t, \cdot)$ „explodiert“ in der Supremumsnorm, wenn $t \nearrow \frac{\ln 5}{2}$.

Da $u \in C([0, T(u_0)]; C([0, \pi]))$ und somit auf jedem kompakt in $[0, T(u_0)[$ enthaltenen Teilintervall

gleichmässig beschränkt ist, folgt, dass $T(u_0) \leq \frac{\ln 5}{2}$.
Da nach der Hölder'schen Ungleichung auch

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \left(\int_0^\pi \sin^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\pi u^2(t, x) dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u(t, \cdot)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

folgt mit einer analogen Argumentation, dass auch im L^2 -setting die milde Lösung $u \in C([0, T(u_0)[; L^2(\Omega))$ des semi-linearen Anfangswertproblem nicht global existiert, und dass $T(u_0) \leq \frac{\ln(5)}{2}$.

Index

- $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, 6
- Absorptions-Operator, 34
- analytisch, 57
- beschränkt holomorph, 57
- Cauchy-Integralformel, 54
- differenzierbar
 - komplex, 53
- dissipativ, 68
- Duhamel-Formel, 44
- Erzeuger, 9
- ganze Funktion, 56
- Generator, 9
- Gruppe, 5
 - \mathcal{C}_0 -, 5
 - gleichmäßig stetig, 5
 - stark stetig, 5
- Hölderstetig, 65
- Halbgruppe, 5
 - \mathcal{C}_0 -, 5
 - analytische, 57
 - beschränkt holomorphe, 57
 - gleichmäßig stetig, 5
 - holomorphe, 57
 - stark stetig, 5
- holomorph, 53, 57
- Identitätssatz, 55
- klassische Lösung, 44
- Kollisionsterm, 34
- komplex differenzierbar, 53
- Lösung
 - klassische, 44, 71
 - milde, 32, 42, 72
 - starke, 47
- Linkstranslationshalbgruppe, 82
- Lumer-Phillips, 70
- m-dissipativ, 69
- milde Lösung, 42, 44
- Operator
 - abgeschlossener, 14
 - Operatornorm, 4
- Regularisierungseffekt, 53
- Resolvente, 19
- Resolventenfamilie, 19
- Resolventenmenge, 19
- Satz von Liouville, 56
- Satz von Vitali, 56
- scattering-Operator, 34
- sektoriell, 59
- Shift-Operator, 6
- Spektralwinkel, 59
- Spektrum, 19
- starke Lösung, 47
- Translationshalbgruppe
 - Links, 82
- Translationshalbgruppen, 7
- Transport-Operator, 34
- Variation-der-Konstanten-Formel, 44