

# Kapitel 1

## Lineare Halbgruppen

### 1.1 Gleichmäßig stetige Halbgruppen

Im gesamten Kapitel bezeichne  $X$  einen beliebigen (reellen oder komplexen) Banachraum,  $\|\cdot\|_X$  die zugehörige Norm in  $X$ .

Wir bezeichnen mit  $L(X)$  die Menge aller stetigen linearen Operatoren  $A : X \rightarrow X$ . Mit der skalaren Multiplikation und der bekannten Addition von Operatoren ist  $L(X)$  ein (reeller oder komplexer) Vektorraum.

#### Erinnerung:

Für einen linearen Operator  $A : X \rightarrow X$  sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (i)  $A$  ist beschränkt, d.h. es existiert  $M > 0$  so, dass

$$\|Ax\|_X \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

- (ii)  $A$  ist stetig auf  $X$

- (iii)  $A$  ist stetig in 0

Durch

$$\|A\|_{L(X)} := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Ax\|_X$$

wird eine Norm (die sog. Operatornorm) auf  $L(X)$  definiert. Es gilt dann für alle  $x \in X$ :

$$\|Ax\|_X \leq \|A\|_{L(X)}\|x\|_X.$$

Der Raum  $L(X)$  ausgestattet mit der Operatornorm ist ein Banachraum.

Desweiteren ist mit der Komposition von Operatoren eine Multiplikation in  $L(X)$  definiert:

$$(A, B) \in L(X) \times L(X) \mapsto A \circ B \in L(X),$$

und mit dieser Multiplikation ist  $L(X)$  eine (reelle oder komplexe) Algebra mit Einselement  $I$ , die Identität auf  $X$ . Weiter gilt

$$\|A \circ B\|_{L(X)} \leq \|A\|_{L(X)}\|B\|_{L(X)}$$

und

$$\|I\|_{L(X)} = 1.$$

Mit anderen Worten:  $(L(X), \circ, \|\cdot\|_{L(X)})$  ist eine sog. (nicht-kommutative) Banachalgebra.

Der Einfachheit halber werden wir meist kurz für die Komposition  $AB$  anstatt  $A \circ B$  schreiben.

Wir haben in der Einführung motiviert, wieso ein autonomes deterministisches System durch eine Familie von Abbildungen  $(S(t))_{t \geq 0}$  beschrieben werden sollte, die der Funktionalgleichung

$$S(t+s) = S(t)S(s) \quad \forall t, s \geq 0$$

genügen. Die Abbildungen  $S(t)$  bilden dabei den Zustandsraum  $X$  des Systems in sich selbst ab. In der Vorlesung DGL 3 wollen wir den Fall untersuchen, dass der Zustandsraum  $X$  ein unendlich dimensionaler Banachraum  $X$  ist.

Die in der Einführung gemachten Betrachtungen motivieren nun folgende

**Definition 1.1**

Eine Familie  $(S(t))_{t \geq 0} \subset L(X)$  heisst **Halbgruppe** von beschränkten linearen Operatoren auf  $X$ , falls gilt:

- (i)  $S(0) = I$ , die Identität auf  $X$
- (ii)  $S(t+s) = S(t)S(s)$  für alle  $t, s \geq 0$ .

Eine Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0} \subset L(X)$  heisst **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\|S(t) - I\|_{L(X)} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+. \quad (1.1)$$

Die Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  heisst **stark stetig** oder  **$C_0$ -Halbgruppe**, falls gilt:

$$\forall x \in X : \|S(t)x - x\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+. \quad (1.2)$$

**Bemerkungen:**

- 1) In analoger Weise kann eine **Gruppe von beschränkten linearen Operatoren** als eine Familie  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}} \subset L(X)$  definiert werden, für die gilt:

- (i)  $S(0) = I$ , die Identität auf  $X$
- (ii)  $S(t+s) = S(t)S(s)$  für alle  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Die Gruppe  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}} \subset L(X)$  heisst **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\|S(t) - I\|_{L(X)} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Die Gruppe  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  heisst **stark stetig** oder  **$C_0$ -Gruppe**, falls gilt:

$$\forall x \in X : \|S(t)x - x\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.$$

Ist  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine Gruppe, so folgt mit der Gruppeneigenschaft

$$I = S(t - t) = S(t)S(-t) = S(-t)S(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Jeder der Operatoren  $S(t)$  ist somit invertierbar und

$$S(t)^{-1} = S(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere erlaubt die Kenntnis des Zustandes eines durch eine Gruppe beschriebenen dynamischen Systems zu einem Zeitpunkt  $t > 0$  die Berechnung des Ausgangszustandes des Systems zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

Damit beschreiben Gruppen dynamische Prozesse, die umkehrbar sind. Die meisten dynamischen Prozesse sind allerdings nicht umkehrbar (man denke z.B. an die Wärmeausbreitung in einem Medium oder die Ausbreitung eines Schadstoffes in einer Flüssigkeit) und werden daher von Halbgruppen beschrieben.

- 2) Falls  $X = \mathbb{R}^n$ , dann sind die Stetigkeitsbedingungen (1.1) und (1.2) äquivalent.
- 3) Im allgemeinen Fall ist die gleichmäßige Stetigkeitsbedingung (1.1) jedoch stärker als die punktweise Stetigkeit (1.2).
- 4) Bedenken wir, dass durch die Halbgruppe ein dynamischer Prozess beschrieben wird, so ist die punktweise Stetigkeit (1.2) eine natürliche Bedingung, da wir in der Regel erwarten, dass ein System „stetig“ von einem Zustand in den nächsten übergeht und keine „abrupten“ Zustandsveränderungen auftreten. Trotzdem ist es natürlich zu erwarten, dass bei manchen Ausgangszuständen sich ein System schneller verändert als bei anderen. Eine gleichmäßige Stetigkeitseigenschaft wie (1.1) erscheint daher in den meisten Fällen unrealistisch.

### Beispiele

- 1) Sei  $X = C_0(\mathbb{R})$  der Raum aller stetigen im Unendlichen verschwindenden reellwertigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , d.h.  $C_0(\mathbb{R}) = \{u \in C(\mathbb{R}); \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0\}$ . Ausgestattet mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  ist  $X$  ein Banachraum. Sei weiter  $q \in C_b(\mathbb{R})$ , d.h. eine stetige beschränkte Funktion auf  $\mathbb{R}$ . Für  $t \geq 0$  definieren wir die Abbildung

$$S(t) : \begin{array}{l} X \rightarrow X \\ f \mapsto e^{tq} f \end{array},$$

wobei  $e^{tq}f$  punktweise definiert ist als  $(e^{tq}f)(x) := e^{tq(x)}f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ .

Da  $q$  beschränkt ist, ist klar, dass  $S(t) \in L(X)$  für alle  $t \geq 0$ . Desweiteren sieht man leicht, dass  $S(0) = I$  und  $S(t+s)f = e^{(t+s)q}f = e^{tq} \cdot e^{sq}f = S(t)S(s)f$  für alle  $f \in X$ , d.h.  $(S(t))_{t \geq 0}$  ist eine Halbgruppe beschränkter linearer Operatoren auf  $X$ .

Ausserdem ist

$$\begin{aligned} \|S(t) - I\|_{L(X)} &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|S(t)f - f\|_\infty \\ &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|(e^{tq} - 1)f\|_\infty \\ &\leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|(e^{tq} - 1)\|_\infty \|f\|_\infty \\ &\leq \|(e^{tq} - 1)\|_\infty. \end{aligned}$$

Da

$$e^{-t\|q\|_\infty} - 1 \leq e^{tq(x)} - 1 \leq e^{t\|q\|_\infty} - 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

und somit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |e^{tq(x)} - 1| \leq \max\{(e^{t\|q\|_\infty} - 1), (1 - e^{-t\|q\|_\infty})\},$$

folgt, dass

$$\begin{aligned} \|S(t) - I\|_{L(X)} &\leq \max\{(e^{t\|q\|_\infty} - 1), 1 - e^{-t\|q\|_\infty}\} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{wenn } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Die Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  ist somit gleichmäßig stetig.

- 2) In dem gleichen Banachraum  $X = C_0(\mathbb{R})$  wie zuvor betrachten wir nun für  $t \geq 0$  die Operatoren

$$\begin{aligned} S(t) : X &\rightarrow X \\ f &\mapsto f(\cdot - t) \end{aligned}$$

$S(t)$  beschreibt also eine Rechtstranslation (Shift) um den Wert  $t$  auf dem Funktionenraum  $X$ . Es ist auch hier klar, dass  $S(t) \in L(X)$  für alle  $t \geq 0$ ,  $S(0) = I$  und  $S(t+s) = S(t)S(s)$  für alle  $t, s \geq 0$ . Da jedes  $f \in X$  automatisch gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}$  ist, gilt außerdem für jedes  $f \in X$ , dass

$$\|S(t)f - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(t+x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+,$$

d.h. aber  $(S(t))_{t \geq 0}$  ist eine  $C_0$ -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf  $X$ .

Allerdings ist  $(S(t))_{t \geq 0}$  nicht gleichmäßig stetig. Um dies zu zeigen, betrachten wir für  $t > 0$  die Funktion  $f_t \in X$  definiert durch

$$f_t(x) = \left(1 - \frac{|x|}{t}\right)^+ = \max\left(\left(1 - \frac{|x|}{t}\right), 0\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass  $\|f_t\|_\infty = 1$  und

$$\begin{aligned} \|S(t)f_t - f_t\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_t(x+t) - f_t(x)| \\ &\geq |f_t(t) - f_t(0)| \\ &= 1 \end{aligned}$$

für alle  $t \geq 0$ . Somit ist dann aber

$$\begin{aligned} \|S(t) - I\|_{L(X)} &\geq \|S(t)f_t - f_t\|_\infty \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

für alle  $t > 0$ , und somit  $(S(t))_{t \geq 0}$  nicht gleichmäßig stetig.

Die hier betrachtete Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  ist ein wichtiges Beispiel der Familie der sog. **Translationshalbgruppen** (Rechts- sowie Linkstranslationen), die auch auf anderen Räumen (z.B.  $L^p(\mathbb{R})$  mit  $1 \leq p < \infty$ ,  $BUC(\mathbb{R})$  (Raum der beschränkten gleichmäßig stetigen Funktionen)). Translationshalbgruppen auf  $\mathbb{R}$  können zu Translationsgruppen fortgesetzt werden.

- 3) Es gibt auch Halbgruppen, die nicht stark stetig sind. Ein Beispiel dafür ist etwa die (Rechts-)Translationshalbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $L^\infty(\mathbb{R})$ :  $S(t)f = f(\cdot - t)$ ,  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Betrachte dazu die Funktion  $f = \chi_{(0,1)} \in L^\infty(\mathbb{R})$ , die Indikatorfunktion des Intervalls  $(0, 1)$ . Dann ist offensichtlich

$$\|S(t)f - f\|_\infty = \text{ess - sup}_{x \in \mathbb{R}} |\chi_{(t, t+1)}(x) - \chi_{(0,1)}(x)| = 1$$

für alle  $t > 0$  und somit  $\|S(t)f - f\|_\infty \not\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0^+$ .

Per Definition wird die Stetigkeit einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe (resp.  $C_0$ -Halbgruppe) nur im Nullpunkt gefordert. Es wird sich aber zeigen, dass die Abbildung  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t) \in L(X)$  (resp. die Abbildungen  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x \in X$ , für alle  $x \in X$ ) dann sogar stetig auf ganz  $[0, \infty[$  sind.

Dazu benötigen wir folgenden Satz, der besagt, dass  $C_0$ -Halbgruppen von Operatoren einer exponentiellen Wachstumsbeschränkung genügen.

**Satz 1.1**

Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe auf dem Banachraum  $X$ .

Dann existiert ein  $M \geq 1$  und ein  $\omega \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

*Beweis:*

Wir zeigen zunächst, dass ein  $\delta > 0$  und ein  $M \geq 1$  existiert, so dass

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq M \quad \forall 0 \leq t \leq \delta. \tag{1.3}$$

Angenommen, dies gilt nicht. Dann existiert eine Folge  $t_n \downarrow 0$ , so dass  $\|S(t_n)\|_{L(X)} \rightarrow +\infty$ .

Andererseits ist aber  $(S(t))_{t \geq 0}$  stark stetig, d.h.

$$\|S(t)x - x\|_X \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \quad \forall x \in X,$$

und somit ist jede Folge  $(S(t_n)x)_n$  beschränkt in  $X$ , für alle  $x \in X$ . Aus dieser punktwweisen Beschränktheit folgt mit dem Satz von Banach-Steinhaus die gleichmäßige Beschränktheit:

$$\sup_n \|S(t_n)\|_{L(X)} < +\infty.$$

Dies ist ein Widerspruch und somit (1.3) gezeigt.

Wir setzen nun  $\omega = \ln(M)/\delta$ . Ein beliebiges  $t > 0$  schreiben wir dann als  $t = n\delta + \sigma$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq \sigma < \delta$  und erhalten so

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{L(X)} &= \|S(n\delta + \sigma)\|_{L(X)} \\ &= \|S(\sigma)S(\delta)^n\|_{L(X)} \\ &\leq M^{n+1} \\ &\leq M \cdot M^{\frac{t}{\delta}} \quad (\text{da } \frac{t}{\delta} > n) \\ &= Me^{\frac{t \ln(M)}{\delta}} \\ &= Me^{\omega t} \end{aligned}$$

für alle  $t \geq 0$ . □

Aus Satz 1.1 ergibt sich sofort

**Korollar 1.1** (i) Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe auf dem Banachraum  $X$ .

Dann ist die Funktion

$$t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x \in X$$

stetig, für alle  $x \in X$ .

(ii) Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine gleichmäßig stetige Halbgruppe auf dem Banachraum  $X$ .

Dann ist die Funktion

$$t \in [0, \infty[ \mapsto S(t) \in L(X)$$

stetig.

*Beweis:*

(i) Sei  $t \geq 0$  und  $x \in X$ . Dann ist für  $h > 0$ :

$$\begin{aligned} & \|S(t+h)x - S(t)x\|_X \\ & \leq \|S(t)\|_{L(X)} \|S(h)x - x\|_X \\ & \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d.h.  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x$  ist rechtsseitig stetig.

Weiter ist, für  $0 < h < t$ , nach Satz 1.1,

$$\begin{aligned} & \|S(t-h)x - S(t)x\|_X \\ & \leq \|S(t-h)\|_{L(X)} \|x - S(h)x\|_X \\ & \leq M e^{\omega(t-h)} \|x - S(h)x\|_X \end{aligned}$$

für ein  $M \geq 1$  und  $\omega \in \mathbb{R}$ . Somit folgt auch, dass  $\lim_{h \rightarrow 0} \|S(t-h)x - S(t)x\|_X = 0$  für alle  $t > 0$ , d.h. die linksseitige Stetigkeit der Funktion  $t \in ]0, \infty[ \mapsto S(t)x$ .

(ii) Supremumsbildung über der Einheitskugel  $B_X$  in  $X$  in den punktweisen Abschätzungen von (i) und Übergang zum Limes mit  $h \rightarrow 0$  liefert die Behauptung.  $\square$

Wie in der Einleitung beschrieben, wollen wir untersuchen, wann Halbgruppen bzw. die Trajektorien von Halbgruppen differenzierbar sind und einer Differentialgleichung genügen. Dazu führen wir den folgenden Begriff ein:

**Definition 1.2**

Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf  $X$ . Der Operator  $A$  definiert durch

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(S(t)x - x) \text{ existiert in } X\} \\ Ax &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(S(t)x - x) \quad \text{für alle } x \in D(A) \end{aligned}$$

heißt **Erzeuger** (oder Generator) **der  $C_0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$** .

Der folgende Satz zeigt, dass jeder beschränkte lineare Operator  $A \in L(X)$  der Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe ist. Genauer gilt:

**Satz 1.2**

Sei  $A \in L(X)$ . Dann ist die Familie  $(S(t))_{t \geq 0}$  definiert durch

$$S(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \quad t \geq 0$$

eine gleichmäßig stetige Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf  $X$ , deren Erzeuger  $A$  ist.

*Beweis:*

Der Beweis funktioniert ähnlich wie im endlich-dimensionalen Fall (vgl. Einleitung). Es ist lediglich an den entsprechenden Stellen die Matrixnorm durch die Operatornorm  $\|\cdot\|_{L(X)}$  zu ersetzen. Die Schritte der Vollständigkeit halber noch einmal im einzelnen:

Wir zeigen zunächst, dass  $S(t) \in L(X)$ : Dazu bemerken wir nur, dass die Folge

$(\sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k}{k!})_n$  eine Cauchy-Folge im Banachraum  $L(X)$  bildet, da

$$\left\| \sum_{k=m}^n \frac{t^k A^k}{k!} \right\|_{L(X)} \leq \sum_{k=m}^n \frac{t^k \|A\|_{L(X)}^k}{k!}$$

für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq n$ , und die skalare Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|_{L(X)}^k}{k!}$  bekanntermaßen konvergiert.

$(S(t))_{t \geq 0}$  ist eine Halbgruppe: Es ist klar, dass  $S(0) = I$ . Da  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|_{L(X)}^k}{k!}$  konvergiert, kann man außerdem wie für das Cauchy-Produkt im skalaren Fall zeigen

$$\begin{aligned} S(t+s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} t^{n-k} s^k A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \frac{s^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} \\ &= S(t)S(s). \end{aligned}$$

$(S(t))_{t \geq 0}$  ist gleichmäßig stetig:

$$\begin{aligned} \|S(t) - I\|_{L(X)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\|_{L(X)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|_{L(X)}^n}{n!} \\ &= e^{t\|A\|} - 1 \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

$A$  ist Erzeuger von  $(S(t))_{t \geq 0}$ : Für  $t > 0$  ist

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\|_{L(X)} &= \left\| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - tA}{t} \right\|_{L(X)} \\
 &= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{n!} \right\|_{L(X)} \\
 &\leq \|A\|_{L(X)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|_{L(X)}^n}{n!} \\
 &\leq \|A\|_{L(X)} (e^{t\|A\|_{L(X)}} - 1) \\
 &\rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0^+.
 \end{aligned}$$

□

Beschränkte lineare Operatoren erzeugen somit gleichmäßig stetige Operatorhalbgruppen. Umgekehrt gilt aber auch

**Satz 1.3**

Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine gleichmäßig stetige Operatorhalbgruppe auf  $X$ . Dann ist der Erzeuger  $A$  von  $(S(t))_{t \geq 0}$  ein beschränkter linearer Operator auf  $X$ .

*Beweis:*

Aus der Stetigkeit der Funktion  $S(\cdot)$  (siehe Korollar 1.1) folgt sofort, dass

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma) d\sigma \rightarrow S(0) = I \quad (t \rightarrow 0^+). \tag{1.4}$$

Wir benötigen nun die Tatsache, dass die Menge der stetig invertierbaren Operatoren in  $L(X)$  offen ist. Im endlich-dimensionalen Fall ( $X = \mathbb{R}^n$ ,  $A$   $n \times n$ -Matrix) konnten wir diese Tatsache beispielsweise leicht daraus herleiten, dass die Determinante eine stetige Abbildung von  $M_n(\mathbb{C})$  nach  $\mathbb{C}$  ist und eine Matrix bekannterweise genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante ungleich Null ist.

Im unendlich-dimensionalen können wir wie folgt argumentieren:

Zunächst bemerken wir, dass für jeden Operator  $A \in L(X)$  mit  $\|A\|_{L(X)} < 1$  die Reihe (sog. *Neumann'sche Reihe*)  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$  in  $L(X)$  konvergiert,  $I - A$  in  $L(X)$  invertierbar ist und der inverse Operator gerade durch die Neumann'sche Reihe gegeben ist:  $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ . Die letzten beiden Behauptungen sieht man wie folgt. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist:

$$\begin{aligned}
 (I - A) \sum_{k=0}^n A^k &= \sum_{k=0}^n A^k (I - A) \\
 &= I - A^{n+1} \\
 &\rightarrow I \quad \text{für } n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

in  $L(X)$ , da  $\|A^{n+1}\|_{L(X)} \leq \|A\|_{L(X)}^{n+1} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  wegen  $\|A\|_{L(X)} < 1$ .

Sei nun  $T \in L(X)$  ein stetig invertierbarer Operator. Für  $S \in L(X)$  mit

$$\|T - S\|_{L(X)} < \frac{1}{\|T^{-1}\|_{L(X)}}$$

gilt dann

$$\begin{aligned}\|I - T^{-1}S\|_{L(X)} &= \|T^{-1}T - T^{-1}S\|_{L(X)} \\ &\leq \|T^{-1}\|_{L(X)}\|T - S\|_{L(X)} \\ &< 1.\end{aligned}$$

Somit folgt nach unseren zuvor gemachten Bemerkungen, dass der Operator  $I - (I - T^{-1}S) = T^{-1}S$  in  $L(X)$  invertierbar ist. Da aber schon  $T^{-1}$  invertierbar ist, folgt daraus unmittelbar die Invertierbarkeit von  $S$  in  $L(X)$ .

Wegen der Offenheit der Menge der invertierbaren Operatoren in  $L(X)$  können wir nun aus (1.4) folgern, dass der Operator  $\frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma) d\sigma$  und somit auch der Operator

$$\int_0^t S(\sigma) d\sigma$$

für  $t > 0$  genügend klein in  $L(X)$  invertierbar ist. Sei solch ein  $t > 0$  genügend klein fest gewählt.

Da für  $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{h} \left[ \int_0^t S(\sigma + h) d\sigma - \int_0^t S(\sigma) d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \int_h^{t+h} S(\sigma) d\sigma - \int_0^t S(\sigma) d\sigma \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma) d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma) d\sigma\end{aligned}$$

(hierbei haben wir nur die Halbgruppeneigenschaft und die Tatsache benutzt, dass stetige lineare Operatoren in das Integral gezogen werden dürfen), folgt dann durch Multiplikation von rechts mit dem inversen Operator  $\left(\int_0^t S(\sigma) d\sigma\right)^{-1}$

$$\begin{aligned}\frac{S(h) - I}{h} &= \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma) d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma) d\sigma \right) \circ \left( \int_0^t S(\sigma) d\sigma \right)^{-1} \\ &\rightarrow \underbrace{(S(t) - S(0)) \circ \left( \int_0^t S(\sigma) d\sigma \right)^{-1}}_{\in L(X)} \quad \text{für } h \rightarrow 0^+ \text{ in } L(X)\end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit der Abbildung  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t) \in L(X)$ . Es folgt, dass  $(S(t) - S(0)) \circ \left(\int_0^t S(\sigma) d\sigma\right)^{-1} \in L(X)$  der Generator der gleichmäßig stetigen Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  und somit die Behauptung.  $\square$

Eine Frage ist bislang offen geblieben: wenn  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe von Operatoren in  $L(X)$  und  $A$  ihr Generator, ist dann schon  $S(t) = e^{tA}$  für  $t \geq 0$ . Anders ausgedrückt: ist eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  eindeutig durch ihren Generator bestimmt? Der Beweis des vorhergehenden Satzes liefert darauf keine Antwort, wohl aber der folgende

**Satz 1.4**

Seien  $(S(t))_{t \geq 0}, (T(t))_{t \geq 0}$  gleichmäßig stetige Halbgruppen von beschränkten linearen Operatoren auf  $X$ . Wenn  $(S(t))_{t \geq 0}$  und  $(T(t))_{t \geq 0}$  den gleichen Generator  $A$  besitzen, dann gilt  $S(t) = T(t)$  für alle  $t \geq 0$ .

*Beweis:*

Sei  $T > 0$ . Gemäß Satz 1.1 existiert dann eine Konstante  $M > 0$ , so dass

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq M \text{ und } \|T(t)\|_{L(X)} \leq M \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (1.5)$$

Sei nun weiter  $\epsilon > 0$ . Wir wollen zeigen, dass  $\|S(t) - T(t)\|_{L(X)} \leq \epsilon$  auf  $[0, T]$ , woraus die Behauptung dann folgt.

Da  $(S(t))_{t \geq 0}$  und  $(T(t))_{t \geq 0}$  den gleichen Generator besitzen, gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t},$$

(Limes in  $L(X)$ !) und somit

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - T(t)}{t} = 0.$$

Folglich existiert ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{\|S(t) - T(t)\|_{L(X)}}{t} < \frac{\epsilon}{TM^2} \quad \text{für alle } t \in ]0, \delta]. \quad (1.6)$$

Sei nun  $t \in [0, T]$  beliebig und  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $t/n < \delta$ . Dann erhalten wir nur durch Ausnutzen der Halbgruppeneigenschaft und den Abschätzung 1.5 und 1.6

$$\begin{aligned} & \|S(t) - T(t)\|_{L(X)} \\ &= \left\| S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(\frac{t}{n}\right) \right\|_{L(X)} \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} S\left(\frac{(n-k)t}{n}\right) T\left(\frac{k}{n}\right) - S\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) T\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\|_{L(X)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left(\frac{(n-k)t}{n}\right) T\left(\frac{k}{n}\right) - S\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) T\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\|_{L(X)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{k}{n}\right) - S\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{k}{n}\right) \right\|_{L(X)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) \left[ S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(\frac{t}{n}\right) \right] T\left(\frac{k}{n}\right) \right\|_{L(X)} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) \right\|_{L(X)} \left\| S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(\frac{t}{n}\right) \right\|_{L(X)} \left\| T\left(\frac{k}{n}\right) \right\|_{L(X)} \\ &\leq M^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(\frac{t}{n}\right) \right\|_{L(X)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{TM^2} \frac{t}{n} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Beispiel:** Betrachten wir noch einmal die gleichmäßig stetige Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X = C_0(\mathbb{R})$  definiert durch

$$S(t)f = e^{tq}f, \quad \forall t \geq 0, \forall f \in X,$$

wobei  $q \in C_b(\mathbb{R})$  fest vorgegeben.

Wir wissen nun bereits, dass  $(S(t))_{t \geq 0}$  einen Generator  $A \in L(X)$  besitzt und dass

$$A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}$$

in  $L(X)$ . Insbesondere gilt dann aber auch für jedes  $f \in X$  und alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (Af)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tq(x)}f(x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tq(x)} - 1}{t} (f(x)) \\ &= q(x)f(x). \end{aligned}$$

Folglich ist der Generator  $A$  von  $(S(t))_{t \geq 0}$  der Multiplikationsoperator

$$\begin{aligned} A: X &\rightarrow X \\ f &\mapsto qf \end{aligned}$$

Welche Erkenntnisse haben wir nun durch die Ergebnisse des zurückliegenden Kapitels für das abstrakte (homogene) Cauchy-Problem

$$(ACP) \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au & , t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für einen Operator  $A \in L(X)$  gewonnen? Die Antwort liefert der folgende

**Satz 1.5**

Für alle  $u_0 \in X$  ist die Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto u(t) = S(t)u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} u_0$  die eindeutige klassische Lösung von (ACP), d.h.  $u \in C^1([0, \infty[; X)$ ,  $u(0) = u_0$  und  $u'(t) = Au(t)$  für alle  $t \geq 0$ .

Darüber hinaus gilt sogar  $u \in C^\infty([0, \infty[; X)$ .

*Beweis:*

Aus den bisherigen Ergebnissen folgt dank der Halbgruppeneigenschaft sofort die rechtsseitige Differenzierbarkeit der Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$  in jedem Punkt  $t \geq 0$  in der Operatornorm:

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \frac{S(h) - I}{h} S(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} AS(t) = S(t)A \quad \text{in } L(X).$$

Nun kann man die Stetigkeit dieser rechtsseitigen Ableitung ausnutzen, um zu folgern, dass  $S(\cdot)$  sogar stetig differenzierbar auf  $[0, \infty[$  ist,  $\frac{d}{dt}S(t) = AS(t)$  für alle  $t \geq 0$  gilt. Alternativ kann die linksseitige Differenzierbarkeit von „zu Fuß“ nachgerechnet werden: so gilt für  $t > 0$  und  $0 < h < t$

$$\frac{S(t-h) - S(t)}{-h} = \frac{S(h) - I}{h} S(t-h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} AS(t) \quad \text{in } L(X),$$

und wieder folgt die Behauptung.

Da  $A \in L(X)$ , folgt damit auch sofort die stetige Differenzierbarkeit der Funktion  $t \mapsto AS(t) \in L(X)$  auf  $[0, \infty[$  mit  $\frac{d}{dt}AS(t) = A^2S(t)$  und dann iterativ, dass  $S(\cdot) \in C^\infty([0, \infty[; L(X))$  mit  $\frac{d^n}{dt^n}S(t) = A^nS(t)$  für alle  $t \geq 0$ , für alle  $n$ .

Die entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften der Bahnen der Halbgruppe, d.h. der Funktionen  $t \mapsto S(t)u_0$  mit  $u_0 \in X$  folgt unmittelbar aus den gerade gezeigten Differenzierbarkeitseigenschaften der Halbgruppe in der Operatornorm.

Um die Eindeutigkeit der klassischen Lösung von (ACP) zu zeigen, seien  $u$  und  $v$  nun zwei beliebige klassische Lösungen von (ACP). Aus der Linearität der Differentialgleichung folgt, dass dann  $w = u - v$  eine klassische Lösung des Cauchy-Problems zum Anfangswert  $w(0) = w_0 = 0$  ist. Betrachten wir nun, für  $T > 0$  die Funktion

$$\Phi(t) := S(T-t)w(t), \quad t \in [0, T].$$

Offensichtlich ist

$$\Phi(T) = w(T) \quad \text{und} \quad \Phi(0) = 0.$$

Ausserdem ist  $\Phi$  stetig differenzierbar auf  $[0, T]$  mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t) &= -Ae^{(T-t)A}w(t) + e^{(T-t)A}Aw(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

auf  $[0, T]$ . Folglich ist  $\Phi$  konstant auf  $[0, T]$  und somit  $w(T) = \Phi(T) = \Phi(0) = 0$ . Da  $T > 0$  beliebig, folgt  $w \equiv 0$ , d.h. aber  $u \equiv v$ .  $\square$

Da konkrete partielle Differentialgleichungen in der Regel nur als ein abstraktes Cauchy-Problem mit einem linearen (oder allgemeiner: nicht-linearen) **unbeschränkten** Operatoren  $A$  in einem Banachraum  $X$  formuliert werden können, reichen die bislang gewonnen Erkenntnisse offensichtlich nicht aus, um solche Probleme zu lösen.

## 1.2 Stark stetige Halbgruppen

Die Realisierung eines formal gegebenen linearen Differentialausdrucks, wie etwa „ $\frac{d}{dx}$ “, als Operator in einem Banachraum  $X$  führt i.a. zu einem linearen Operator, der nur noch auf einem Teilraum von  $X$  definiert ist und selbst auf diesem Teilraum nicht stetig (d.h. unbeschränkt) ist. Betrachten wir dazu nur den eben erwähnten Differentialausdruck  $\frac{d}{dx}$  und wählen etwa als Banachraum  $X = C([0, 1])$  ausgestattet mit der üblichen Supremumsnorm.

Offensichtlich können wir den Differentialoperator  $\frac{d}{dx}$  nicht auf ganz  $X$  definieren, wohl aber auf dem dichten linearen Teilraum  $C^1([0, 1])$ . Dort ist der Differentialoperator aber bzgl. der Supremumsnorm nicht stetig, da die gleichmäßige Konvergenz

einer Folge stetig differenzierbarer Funktionen  $(f_n)_n$  gegen eine Funktion  $f$  ja bekanntlich nicht einmal die Differenzierbarkeit des Grenzelements  $f$  garantiert, geschweige denn die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Ableitungen  $(f'_n)_n$  gegen  $f'$  nach sich zieht.

Die Realisierung  $A$  des Differentialausdrucks  $\frac{d}{dx}$  im Banachraum  $X$ , d.h. der Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  definiert durch  $D(A) = C^1([0, 1])$  und  $Af = f'$  für  $f \in D(A)$ , ist ein typisches Beispiel eines linearen unbeschränkten Operators in einem Banachraum.

Mit dieser Klasse von Operatoren wollen wir uns zunächst ein wenig beschäftigen und ein paar grundlegende Begriffe und Tatsachen in diesem Zusammenhang kennenlernen.

Sei dazu im folgenden  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  ein *linearer Operator* von einem Banachraum  $X$  in einen Banachraum  $Y$ , d.h.  $D(A)$ , der Definitionsbereich von  $A$ , ist ein linearer Teilraum des Banachraumes  $X$ , und die Abbildung  $u \in D(A) \mapsto Au \in Y$  ist linear. Falls  $D(A)$  eine dichte Teilmenge von  $X$  ist, heisst  $A$  kurz *dicht definiert*. Die eingangs erwähnten Differentialoperatoren sind zwar unstetig, besitzen aber oft eine andere sehr nützliche Eigenschaft.

**Definition 1.3**

Ein linearer Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  heisst **abgeschlossen**, wenn gilt:

$$\text{falls } (x_n)_n \subset D(A), x_n \rightarrow x \text{ und } Ax_n \rightarrow y \text{ in } Y \quad (n \rightarrow \infty)$$

dann folgt

$$x \in D(A) \text{ und } Ax = y.$$

**Bemerkungen:**

1.) Falls  $D(A)$  ein abgeschlossener Unterraum von  $X$  und  $A : D(A) \rightarrow Y$  stetig ist, dann ist  $A$  auch abgeschlossen.

Insbesondere ist jeder Operator  $A \in L(X)$  abgeschlossen.

2.) Offensichtlich ist ein linearer Operator  $A : D(A) \rightarrow Y$  genau dann abgeschlossen, wenn der Graph von  $A$ , d.h. die Menge

$$G(A) := \{(x, Ax); x \in D(A)\},$$

ein abgeschlossener linearer Teilraum des Produktraums  $X \times Y$  (ausgestattet mit der Norm  $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ ) ist.

3.) Vorsicht ist geboten bei der Bildung von Summen von abgeschlossenen Operatoren: Sind  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  und  $B : D(B) \subset X \rightarrow Y$  abgeschlossene, lineare Operatoren, so ist die Summe der beiden Operatoren, der Operator  $A + B$  definiert auf  $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$  durch  $(A + B)(u) = Au + Bu$ , im allgemeinen nicht abgeschlossen!

Ist einer der beiden Operatoren, etwa  $B \in L(X)$ , d.h. ein auf ganz  $X$  definierter, beschränkter, linearer Operator, dann ist die Summe  $A + B$  (mit Definitionsbereich  $D(A + B) = D(A)$ ) abgeschlossen.

Betrachten wir noch einmal den eingangs erwähnten Differentialoperator  $A = \frac{d}{dx}$  in  $X = C([0, 1])$ . Sei  $(f_n)_n \subset D(A) = C^1([0, 1])$  eine Folge mit der Eigenschaft,

dass  $f_n \rightarrow f$  und  $Af_n = f'_n \rightarrow g$  gleichmäßig auf  $[0, 1]$ . Aus der elementaren reellen Analysis ist uns bekannt, dass dann schon  $f$  stetig differenzierbar auf  $[0, 1]$  ist und  $f' = g$ . Mit anderen Worten:  $f \in D(A)$  und  $Af = g$ , d.h. aber gerade, dass  $A$  abgeschlossen ist.

Im Zusammenhang mit abgeschlossenen Operatoren wollen wir an den Satz vom abgeschlossenen Graphen erinnern, der uns aus der Funktionalanalysis bekannt ist:

**Satz vom abgeschlossenen Graphen**

Es seien  $X, Y$  Banachräume,  $A : X \rightarrow Y$  ein abgeschlossener linearer Operator. Dann gilt:  $A$  ist stetig.

Wir werden sehen, dass Erzeuger von  $C_0$ -Halbgruppen stets abgeschlossene, lineare Operatoren sind. Allerdings wird sich zeigen, dass umgekehrt nicht jeder abgeschlossene, lineare Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  auch schon Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe ist.

Nach dieser Vorbereitung wollen wir uns nun wieder dem Studium der Halbgruppen zuwenden. Im folgenden Lemma sind einige wichtige Eigenschaften von  $C_0$ -Halbgruppen zusammengefasst.

**Lemma 1.1**

Sei  $S(t)_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe auf dem Banachraum  $X$  und  $A$  ihr Erzeuger. Dann gilt:

(i)  $\forall x \in X, t \geq 0 :$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_t^{t+h} S(\sigma)x \, d\sigma = S(t)x$$

(ii)  $\forall x \in X, t \geq 0$  ist  $\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \in D(A)$  und

$$A \left( \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) = S(t)x - x$$

(iii)  $\forall x \in D(A), t \geq 0$  ist  $S(t)x \in D(A)$ ,  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x$  ist stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax \quad \forall t \geq 0$$

(in der 0 ist dabei natürlich nur die rechtsseitige Ableitung gemeint).

(iv)  $\forall x \in D(A), t \geq 0 :$

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\sigma)Ax \, d\sigma = \int_0^t AS(\sigma)x \, d\sigma$$

*Beweis:*

(i) folgt sofort aus der Stetigkeit der Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x$ .

(ii) Sei  $x \in X, t > 0$ . Für  $h > 0$  folgt, unter Ausnutzung der Halbgruppeneigenschaft und da stetige lineare Operatoren in das Bochner-Integral hineingezogen werden können,

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} \left( \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) &= \frac{1}{h} \left( \int_0^t S(\sigma + h)x \, d\sigma - \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_h^{t+h} S(\sigma)x \, d\sigma - \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\sigma)x \, d\sigma - \frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma)x \, d\sigma. \end{aligned}$$

Nach (i) konvergiert die rechte Seite für  $h \rightarrow 0^+$  gegen  $S(t)x - x$ . Aus der damit gezeigten Existenz des Limes der linken Seite folgt nun zunächst, dass  $\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \in D(A)$ . Gleichzeitig ist dann aber auch der gefundene Grenzwert der Wert des Erzeugers  $A$  in  $\int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma$ , d.h.

$$A \left( \int_0^t S(\sigma)x \, d\sigma \right) = S(t)x - x.$$

(iii) Sei nun  $x \in D(A), t \geq 0, h > 0$ . Aus der Halbgruppeneigenschaft folgt sofort

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} S(t)x &= \frac{S(t+h) - S(t)}{h} x \\ &= S(t) \frac{S(h) - I}{h} x \\ &\rightarrow S(t)Ax \quad \text{für } h \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

da  $x \in D(A)$ .

Es folgt, dass  $S(t)x \in D(A)$  und  $AS(t)x = S(t)Ax$ .

Gleichzeitig folgt aus  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} x = S(t)x$  die rechtsseitige Differenzierbarkeit der Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x$  und dass

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Weiter erhalten wir für  $0 < h < t$

$$\begin{aligned} \frac{S(t) - S(t-h)}{h} x &= S(t-h) \left( \frac{S(h) - I}{h} x \right) \\ &= S(t-h) \left( \frac{S(h) - I}{h} x - Ax \right) + S(t-h)Ax. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Den ersten Term auf der linken Seite schätzen wir, dank Satz 1.1, mit Hilfe von geeigneten Konstanten  $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$  ab und erhalten

$$\begin{aligned} &\left\| S(t-h) \left( \frac{S(h) - I}{h} x - Ax \right) \right\|_X \\ &\leq \|S(t-h)\|_{L(X)} \left\| \frac{S(h) - I}{h} x - Ax \right\|_X \\ &\leq M e^{\omega(t-h)} \left\| \frac{S(h) - I}{h} x - Ax \right\|_X \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

da  $x \in D(A)$ .

Da  $S(t-h)Ax \rightarrow S(t)Ax$  für  $h \rightarrow 0^+$  in  $X$ , folgt aus (1.7) nun sofort die linksseitige Differenzierbarkeit der Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x$  sowie die Identität

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = S(t)Ax.$$

Somit ist also  $t \mapsto S(t)x$  differenzierbar, und da  $t \mapsto S(t)Ax$  stetig ist, sogar stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

(iv) folgt sofort aus (iii) mittels Integration.  $\square$

Aus Lemma 1.1 ergeben sich nun leicht zwei Eigenschaften, die der Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe notwendigerweise erfüllt.

**Korollar 1.2**

Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe auf dem Banachraum  $X$  und  $A$  ihr Erzeuger. Dann gilt:

$$\overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X} = X \text{ und } A \text{ ist abgeschlossen.}$$

*Beweis:*

Sei  $x \in X$ . Nach Lemma 1.1 (ii) ist dann, für jedes  $h > 0$ ,  $\frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma)x d\sigma \in D(A)$ . Zudem konvergiert  $\frac{1}{h} \int_0^h S(\sigma)x d\sigma \rightarrow x$  für  $h \rightarrow 0^+$  nach Punkt (i) des gleichen Lemmas, und somit folgt, dass  $D(A)$  dicht in  $X$ .

Wir müssen noch zeigen, dass der Erzeuger  $A$  abgeschlossen ist. Betrachte dazu eine beliebige Folge  $(x_n)_n \subset D(A)$  mit der Eigenschaft, dass  $x_n \rightarrow x$  und  $Ax_n \rightarrow y$  in  $X$ . Aus Lemma 1.1 folgt dann

$$S(t)x_n - x_n = \int_0^t S(\sigma)Ax_n d\sigma.$$

Da  $S(t) \in L(X)$ , konvergiert die linke Seite für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $S(t)x - x$  in  $X$ . Da

$$\sup_{\sigma \in [0, t]} \|S(\sigma)Ax_n - S(\sigma)y\|_X \leq M e^{|\omega|t} \|Ax_n - y\|_X,$$

konvergiert die Folge der stetigen Funktionen  $S(\cdot)Ax_n$  gleichmäßig auf  $[0, t]$  gegen die Funktion  $S(\cdot)y$  und somit

$$\int_0^t S(\sigma)x_n d\sigma \rightarrow \int_0^t S(\sigma)y d\sigma.$$

Es folgt, dass

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\sigma)y d\sigma.$$

Division durch  $t > 0$  ergibt

$$\begin{aligned} \frac{S(t) - I}{t} x &= \frac{1}{t} \int_0^t S(\sigma)y d\sigma \\ &\rightarrow S(0)y = y. \end{aligned}$$

Wir schliessen somit, dass  $x \in D(A)$  und  $Ax = y$ . □

Aus Lemma 1.1 (iii) folgt ebenso leicht das folgende Resultat für das abstrakte Cauchy-Problem

$$(ACP) \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au & , t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

wenn der Operator  $A$  Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  ist:

**Satz 1.6**

Für alle  $u_0 \in D(A)$  ist die Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto u(t) = S(t)u_0$  die eindeutige klassische Lösung von (ACP), d.h.  $u \in C^1([0, \infty[; X)$ ,  $u(0) = u_0$  und  $u'(t) = Au(t)$  für alle  $t \geq 0$ .

Falls  $u_0 \in D(A^n)$  für ein  $n \geq 1$ , dann ist  $u \in C^n([0, \infty[; X)$ .

Falls  $u_0 \in \cap_n D(A^n)$ , dann gilt sogar  $u \in C^\infty([0, \infty[; X)$ .

*Beweis:*

Lemma 1.1. (iii) besagt gerade, dass für  $u_0 \in D(A)$  die Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)u_0$  eine klassische Lösung von (ACP) ist.

Die Eindeutigkeit der klassischen Lösung zeigt man wie im Fall  $A \in L(X)$  (siehe Satz 1.5).

Im Gegensatz zum Fall  $A \in L(X)$  ist die klassische Lösung für beliebige Anfangsdaten  $u_0 \in D(A)$  nicht automatisch eine  $C^\infty$ -Funktion. Ist aber etwa  $u_0 \in D(A^2)$ , d.h.  $u_0 \in D(A)$  mit  $Au_0 \in D(A)$ , dann ist die Funktion  $t \mapsto \frac{d}{dt}S(t)u_0 = S(t)Au_0$  nach Lemma 1.1 (iii) (angewendet mit  $Au_0$  anstelle von  $u_0$ ) wieder stetig differenzierbar auf  $[0, \infty[$  und  $\frac{d^2}{dt^2}S(t)u_0 = AS(t)Au_0 = S(t)A^2u_0$  für alle  $t \geq 0$ . Induktiv ergibt sich die Behauptung für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ . □

Angesichts des so erfreulichen Ergebnisses der Wohlgestelltheit des abstrakten Cauchy-Problems für einen Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe, stellt sich nun in natürlicher Weise die Frage, welche Klasse von linearen Operatoren  $C_0$ -Halbgruppen generieren. Das folgende Lemma zeigt, dass es im wesentlichen genügt, die Generatoren von Kontraktionshalbgruppen zu charakterisieren.

**Lemma 1.2** (i) Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf  $X$  mit  $\|S(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}$  für alle  $t \geq 0$ .

Dann ist  $T(t) := e^{-\omega t}S(t)$ ,  $t \geq 0$ , eine beschränkte  $C_0$ -Halbgruppe auf  $X$  (die sog. „skalierte Halbgruppe“ und  $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M$  für alle  $t \geq 0$ ).

Ist  $A$  der infinitesimale Generator von  $(S(t))_{t \geq 0}$ ,  $B$  der Generator von  $(T(t))_{t \geq 0}$ , dann gilt:  $B = A - \omega I$ .

(ii) Sei  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine beschränkte  $C_0$ -Halbgruppe auf  $(X, \|\cdot\|_X)$  mit  $\|S(t)\|_{L(X)} \leq M$ . Dann existiert eine zu  $\|\cdot\|_X$  äquivalente Norm auf  $X$  bzgl. der  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine Kontraktionshalbgruppe ist.

**Bemerkung:** Ist  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf  $X$  ausgestattet mit der Norm  $\|\cdot\|_X$ , dann ist  $(S(t))_{t \geq 0}$  auch eine  $C_0$ -

Halbgruppe von beschränkten linearen Operatoren auf  $X$ , wenn  $X$  mit einer beliebigen anderen zu  $\|\cdot\|_X$  äquivalenten Norm ausgestattet wird. Durch Übergang zu einer äquivalenten Norm ändert sich auch der Generator der Halbgruppe nicht.

*Beweis:*

(i) Die Halbgruppeneigenschaft von  $(T(t))_{t \geq 0}$  rechnet man nach, die starke Stetigkeit ist klar. Wenn nun  $x \in D(A)$ , dann ist für  $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I)x &= \frac{1}{h}(e^{-\omega h}S(h) - I)x \\ &= e^{-\omega h} \frac{1}{h}(S(h) - I)x + \frac{e^{-\omega h} - 1}{h}Ix \\ &\rightarrow Ax - \omega x \end{aligned}$$

für  $h \rightarrow 0^+$ . Es folgt, dass  $D(A) \subset D(B)$  und  $Bx = (A - \omega I)x$  für alle  $x \in D(A)$ . Analog zeigt man, dass  $D(B) \subset D(A)$ , und somit  $D(A) = D(B)$  und  $B = A - \omega I$ .

(ii) Man definiert

$$\|x\| := \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\|_X, \quad x \in X.$$

Es ist klar, dass  $\|\cdot\|_X$  eine Norm auf  $X$  definiert und dass

$$\|x\|_X \leq \|x\| \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

d.h.  $\|\cdot\|$  ist eine zu  $\|\cdot\|_X$  äquivalente Norm. Die Kontraktionseigenschaft von  $(S(t))_{t \geq 0}$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_X$  folgt sofort aus

$$\begin{aligned} \|S(t)x\| &= \sup_{s \geq 0} \|S(s)(S(t)x)\|_X \\ &= \sup_{s \geq 0} \|S(s+t)x\|_X \\ &= \sup_{s \geq t} \|S(s)x\|_X \\ &\leq \|x\| \end{aligned}$$

für alle  $t \geq 0$ . □

Bevor wir nun den zentralen Satz von Hille-Yosida über die Charakterisierung von Generatoren von Kontraktionshalbgruppen angeben können, benötigen wir noch einen neuen Begriff.

Betrachten wir nämlich den Fall, dass  $X = \mathbb{R}^n$  und  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , dann wissen wir ja bereits aus der VL DGL1, dass die von  $A$  erzeugte Halbgruppe, die Matrixexponentialfunktion  $(e^{tA})_{t \geq 0}$ , nur dann eine Kontraktionshalbgruppe sein kann, wenn die Realteile sämtlicher Eigenwerte von  $A \leq 0$  sind (genauer:  $(e^{tA})_{t \geq 0}$  ist beschränkt, d.h.  $\|e^{tA}\|_{L(X)} \leq M$  für alle  $t \geq 0$  und ein  $M \geq 1$ , genau dann wenn die Realteile aller Eigenwerte von  $A \leq 0$  sind und zusätzlich diejenigen Eigenwerte mit Realteil  $= 0$  halbeinfach sind). Es ist somit nicht verwunderlich, dass wir auch im unendlich-dimensionalen so etwas wie die „Eigenwerte“ eines linearen unbeschränkten Operators  $A$  betrachten und Bedingungen an diese stellen müssen, um zu garantieren, dass  $A$  eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt.

**Definition 1.4**

Sei  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ein abgeschlossener linearer Operator in  $X$ .  
Dann ist  $\varrho(A)$  definiert durch

$$\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A) \text{ ist invertierbar in } L(X)\}$$

die **Resolventenmenge von  $A$** .

Das Komplement, d.h. die Menge

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$$

bezeichnet man als das **Spektrum von  $A$** .

Für  $\lambda \in \varrho(A)$  ist

$$R_A(\lambda) := (\lambda I - A)^{-1} \in L(X)$$

die sog. **Resolvente von  $A$  im Punkt  $\lambda$** . Die Familie der Operatoren  $(R_A(\lambda))_{\lambda \in \varrho(A)}$  bezeichnet man als **Resolventenfamilie (oder kurz: Resolvente) von  $A$** .

**Bemerkungen:**

**1.)** Mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen sieht man leicht, dass  $\lambda \in \mathbb{C}$  Element der Resolventenmenge ist, genau dann wenn  $(\lambda I - A) : D(A) \subset X \rightarrow X$  bijektiv ist. In der Tat ist nämlich  $\lambda I - A$  abgeschlossen („stetige Störungen von abgeschlossenen Operatoren sind abgeschlossen“). Ist nun  $(\lambda I - A) : D(A) \rightarrow X$  abgeschlossen und bijektiv, so ist auch der inverse Operator  $(\lambda I - A)^{-1} : X \rightarrow X$  abgeschlossen und somit nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen automatisch stetig.

**2.)** Die Resolventenmenge ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Dies sieht man leicht wie folgt:

Wenn  $\lambda \in \varrho(A)$  und  $\mu \in \mathbb{C}$ , dann ergibt sich aus der Darstellung

$$\mu I - A = \lambda I - A + (\mu - \lambda)I = (I - (\lambda - \mu)R_A(\lambda))(\lambda I - A)$$

dass  $(\mu I - A) : D(A) \rightarrow X$  bijektiv ist genau dann, wenn  $I - (\lambda - \mu)R_A(\lambda)$  invertierbar ist. Dies ist aber, wie wir bereits wissen, der Fall, wenn  $|\lambda - \mu| \|R_A(\lambda)\|_{L(X)} < 1$ , d.h. wenn  $|\lambda - \mu| < 1 / \|R_A(\lambda)\|_{L(X)}$ . In diesem Fall ist dann (Neumann'sche Reihe!)

$$\begin{aligned} R_A(\mu) &= R_A(\lambda)(I - (\lambda - \mu)R_A(\lambda))^{-1} \\ &= R_A(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_A(\lambda)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_A(\lambda)^{n+1}. \end{aligned}$$

**3.)** Das Spektrum eines linearen abgeschlossenen Operators ist somit abgeschlossen. Das ist aber auch so ziemlich alles, was man allgemein über das Spektrum eines linearen abgeschlossenen Operators aussagen kann. Insbesondere kann das Spektrum eines solchen Operators leer sein oder aber, das ist der andere Extremfall, die gesamte komplexe Ebene umfassen.

**Beispiele:**

Betrachte auf  $X = C([0, 1])$  die Differential-Operatoren

$$A_i f = f' \quad \text{für } i = 1, 2$$

mit jeweiligem Definitionsbereich

$$D(A_1) = C^1([0, 1])$$

bzw.

$$D(A_2) = \{f \in C^1([0, 1]); f(1) = 0\}.$$

Es ist klar, dass es sich hier um lineare abgeschlossene Operatoren handelt. Zudem ist für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  die Funktion  $f_\lambda(t) := e^{\lambda t}$ ,  $t \in [0, 1]$ , eine nicht-triviale Lösung der Gleichung

$$(\lambda I - A_1)f_\lambda = 0.$$

Folglich ist  $(\lambda I - A_1) : D(A_1) \rightarrow X$  für kein  $\lambda \in \mathbb{C}$  bijektiv und somit  $\sigma(A_1) = \mathbb{C}$ . Auf der anderen Seite ist die Operator-Gleichung

$$\lambda f - A_2 f = g$$

äquivalent zum AWP

$$\begin{aligned} \lambda f - f' &= g \quad \text{auf } [0, 1] \\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses besitzt aber (vgl. VL DGL1) für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $g \in C([0, 1])$  die eindeutige Lösung

$$f(t) = \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} g(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

in  $X$ . Somit ist  $(\lambda I - A_2) : D(A_2) \rightarrow X$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  bijektiv mit Umkehrabbildung

$$R_{A_2}(\lambda)g(t) = \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} g(s) ds, \quad t \in [0, 1], g \in X.$$

Insbesondere ist  $\sigma(A_2) = \emptyset$ .

Nun also der fundamentale

**Satz 1.7 (Hille-Yosida, 1948)**

Ein linearer Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ist genau dann der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  wenn gilt:

- 1.)  $D(A)$  ist dicht in  $X$  und  $A$  ist abgeschlossen
- 2.)  $]0, +\infty[ \subset \varrho(A)$  und  $\|R_A(\lambda)\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$  für alle  $\lambda > 0$ .

*Beweis:*

Notwendigkeit der Bedingungen 1.) und 2.): Wegen Korollar 1.1 ist nur noch 2.) zu zeigen. Wir definieren dazu für  $\lambda > 0$  und  $x \in X$

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt$$

(dies ist die „Laplace-Transformierte“ der Funktion  $S(\cdot)x$ ).

Das uneigentliche Integral ist hierbei wohldefiniert<sup>1</sup>, da  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x$  stetig, beschränkt ( $\|S(t)x\|_X \leq \|x\|_X$  für alle  $t \geq 0$ ) und  $\lambda > 0$ . Es folgt nun leicht, dass  $R(\lambda)$  ein beschränkter linearer Operator auf  $X$  mit

$$\|R(\lambda)x\|_X \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|S(t)x\|_X \, dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\|_X \, dt = \frac{1}{\lambda} \|x\|_X.$$

**Zwischenbemerkung:** Die Notation  $R(\lambda)$  ist nicht zufällig gewählt. Es wird sich herausstellen, dass es sich bei den Operatoren  $R(\lambda)$  tatsächlich um die Resolventen  $R_A(\lambda)$  des Operators  $A$  handelt.

Man sieht übrigens leicht, dass für positive  $\lambda \in \rho(A)$  tatsächlich die Gleichheit  $R(\lambda) = R_A(\lambda)$  gilt. In der Tat besitzt die Halbgruppe  $(e^{-\lambda t} S(t))_{t \geq 0}$  nach Lemma 1.2 (i) den Generator  $A - \lambda I$ . Zudem ist für  $x \in D(A)$  nach Lemma 1.1 (iii) die Funktion  $t \mapsto e^{-\lambda t} S(t)x$  stetig differenzierbar mit  $\frac{d}{dt} e^{-\lambda t} S(t)x = (A - \lambda I)S(t)x$ . Somit ist

$$\begin{aligned} R(\lambda)x &= (\lambda I - A)^{-1} \int_0^\infty (\lambda I - A) e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \\ &= (\lambda I - A)^{-1} \int_0^\infty -\frac{d}{dt} (e^{-\lambda t} S(t)x) \, dt \\ &= (\lambda I - A)^{-1} x, \end{aligned}$$

da  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} S(t)x = 0$  in  $X$ .

Diese Beobachtung motiviert die Definition von  $R(\lambda)$  oben. Leider hilft uns die Beobachtung nicht weiter, da wir an dieser Stelle im Beweis ja noch gar nicht gezeigt haben, dass  $]0, \infty[ \subset \rho(A)$ .

Zurück zum Beweis: Für  $h > 0$ ,  $x \in X$  folgt mit der Halbgruppeneigenschaft, dass

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t+h)x \, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda(t+h)} S(t+h)x \, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt - e^{\lambda h} \left( \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right) \\ &\rightarrow \lambda R(\lambda)x - x \end{aligned}$$

für  $h \rightarrow 0^+$  (die Konvergenz des zweiten Terms folgt einfach mit der Stetigkeit des Integranden). Es folgt, dass für alle  $x \in X$ ,  $\lambda > 0$ ,  $R(\lambda)x \in D(A)$  und

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

---

<sup>1</sup>im Sinne von:  $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda t} S(t)x \, dt$  existiert in  $X$

Dies ist aber äquivalent zur Operatorgleichung

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I,$$

d.h. der Operator  $R(\lambda)$  ist die Rechtsinverse des Operators  $\lambda I - A$ . Wir werden nun zeigen, dass

$$AR(\lambda) = R(\lambda)A \quad \text{auf } D(A). \quad (1.8)$$

Dann folgt sofort, dass auch  $R(\lambda)(\lambda I - A) = I$  auf  $D(A)$ . Somit ist dann aber  $(\lambda I - A) : D(A) \rightarrow X$  bijektiv und  $R_A(\lambda) = R(\lambda)$ .

Sei also  $x \in D(A)$ ,  $\lambda > 0$ . Wir wissen bereits, dass  $R(\lambda)x \in D(A)$ . Die gewünschte Identität  $R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x$ , d.h. die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax \, dt = A \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right),$$

bedeutet, dass wir zeigen müssen, dass der abgeschlossene Operator  $A$  „aus dem Integral herausgezogen“ werden kann. Ein Resultat dieser Art haben wir bislang nur für stetige, auf ganz  $X$  definierte lineare Operatoren kennengelernt.

Der Beweis erfolgt in 2 Schritten. Zunächst erinnern wir daran, dass

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)x \, dt.$$

Aufgrund der Stetigkeit von  $t \mapsto e^{-\lambda t} S(t)x$ , ist das (Bochner-)Integral  $w_n := \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)x \, dt$  ein klassisches (vektorwertiges) Riemann-Integral, d.h.  $w_n = \lim_{k \rightarrow \infty} w_{n,k}$  mit

$$w_{n,k} = \frac{n}{k} \sum_{j=1}^k e^{-\lambda \xi_j} S(\xi_j)x \quad \text{mit} \quad \frac{(j-1)n}{k} \leq \xi_j \leq \frac{jn}{k}$$

mit beliebigen Zwischenstellen  $\xi_j$ .

Da  $S(\xi_j)x \in D(A)$  für alle  $j$  nach Lemma 1.1 (iii) und  $D(A)$  ein linearer Teilraum, ist  $w_{n,k} \in D(A)$  für alle  $k$ . Desweiteren ist

$$\begin{aligned} Aw_{n,k} &= \frac{n}{k} \sum_{j=1}^k e^{-\lambda \xi_j} AS(\xi_j)x \\ &= \frac{n}{k} \sum_{j=1}^k e^{-\lambda \xi_j} S(\xi_j)Ax, \end{aligned}$$

(hier wurde noch einmal Lemma 1.1 (iii) benutzt). Da die Funktion  $t \in [0, n] \mapsto e^{-\lambda t} S(t)Ax$  stetig ist, konvergiert die rechte Seite, für  $k \rightarrow \infty$ , gegen das Riemann-Integral  $z_n := \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)Ax \, dt$ . Da  $A$  abgeschlossen ist, folgt

$$w_n \in D(A) \quad \text{und} \quad Aw_n = z_n,$$

d.h. aber gerade

$$A \left( \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right) = \int_0^n e^{-\lambda t} S(t)Ax \, dt.$$

Da nun aber

$$w_n \in D(A), \quad w_n \rightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \text{ in } X \text{ für } n \rightarrow \infty$$

und

$$\begin{aligned} Aw_n &= \int_0^n e^{-\lambda t} S(t) Ax \, dt \\ &\rightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) Ax \, dt \quad \text{in } X \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(die Konvergenz des uneigentlichen Integrals folgt mit den selben Argumenten wie oben mit  $Ax$  anstelle von  $x$ ), folgt ein weiteres Mal durch die Abgeschlossenheit von  $A$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \in D(A) \quad \text{und} \\ A \left( \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) Ax \, dt. \end{aligned}$$

Es folgt nun sofort mit der Definition von  $R(\lambda)$ , dass

$$R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x,$$

was zu zeigen war.

Hinlänglichkeitsbedingungen 1.) und 2.): Die Idee ist, den unbeschränkten Operator  $A$  durch eine geeignete Folge von stetigen Operatoren  $A_\lambda$  zu approximieren und zu zeigen, dass die von den Operatoren  $A_\lambda$  erzeugten gleichmäßig stetigen Halbgruppen  $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$  in geeigneter Weise gegen eine Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  konvergieren, deren Erzeuger  $A$  ist.

Wir benötigen dazu einige Lemmata:

**Lemma 1.3 (Resolventengleichung)**

Sei  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ein abgeschlossener linearer Operator. Für  $\lambda, \mu \in \rho(A)$  gilt:

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda)R_A(\lambda)R_A(\mu).$$

*Beweis:*

durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} (R_A(\lambda) - R_A(\mu))x &= R_A(\lambda)((\mu I - A)R_A(\mu)x - (\lambda I - A)R_A(\mu)x) \\ &= R_A(\lambda)((\mu I - A - \lambda I + A)R_A(\mu)x) \\ &= (\mu - \lambda)R_A(\lambda)R_A(\mu)x \end{aligned}$$

für alle  $x \in X$ . □

**Bemerkung:** Aus der Resolventengleichung folgt sofort, dass die Operatoren  $R_A(\lambda)$  und  $R_A(\mu)$  für  $\lambda, \mu \in \rho(A)$  miteinander kommutieren.

**Lemma 1.4**

Der Operator  $A$  erfülle die Bedingungen 1.) und 2.) aus Satz 1.7. Dann gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_A(\lambda)x = x \quad \text{für alle } x \in X.$$

*Beweis:*

Nach Definition der Resolvente ist  $\lambda R_A(\lambda)x - AR_A(\lambda)x = x$  für alle  $x \in X$ , und somit

$$(\lambda R_A(\lambda) - I)x = AR_A(\lambda)x \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sei nun zunächst  $x \in D(A)$ . Dann gilt  $R_A(\lambda)Ax = R_A(\lambda)(A - \lambda I)x + \lambda R_A(\lambda)x = (\lambda R_A(\lambda) - I)x$ , d.h.

$$(\lambda R_A(\lambda) - I)x = R_A(\lambda)Ax \quad \text{für alle } x \in D(A).$$

Mit Voraussetzung 2.) folgt somit

$$\|\lambda R_A(\lambda)x - x\|_X \leq \frac{\|Ax\|_X}{\lambda} \rightarrow 0$$

für  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Aus der Dichtheit von  $D(A)$  in  $X$  und da  $\|\lambda R_A(\lambda)\|_{L(X)} \leq 1$  folgt sofort, dass dann auch  $\lambda R_A(\lambda)(x) \rightarrow x$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  für alle  $x \in X$ .  $\square$

**Bemerkung:** Für lineare Operatoren  $A$  in einem Hilbertraum  $X = H$ , für die gilt, dass  $\tilde{A} = -A$  maximal monoton ist, ist es das Ergebnis aus Lemma 1.4 bereits aus der VL DGL II bekannt.

Wir definieren nun für  $\lambda > 0$  die sog. **Yosida-Approximation von A**

$$A_\lambda := \lambda AR_A(\lambda) = \lambda^2 R_A(\lambda) - \lambda I.$$

Wir benötigen im folgenden

**Lemma 1.5**

Der Operator  $A$  erfülle wieder die Bedingungen 1.) und 2.) aus Satz 1.7. Dann gilt:

- (i)  $A_\lambda \in L(X)$  für alle  $\lambda > 0$
- (ii)  $A_\lambda$  und  $A_\mu$  kommutieren für alle  $\lambda, \mu > 0$
- (iii)  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$  für alle  $x \in D(A)$

*Beweis:*

(i) ist klar nach der Definition, da  $R_A(\lambda) \in L(X)$ .

(ii) folgt mit Hilfe der Definition und der Tatsache, dass die Resolventen miteinander kommutieren.

(iii) Da für  $\lambda > 0$  und  $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \lambda R_A(\lambda)Ax &= -\lambda R_A(\lambda)(\lambda I - A)x + \lambda^2 R_A(\lambda)x \\ &= \lambda^2 R_A(\lambda)x - \lambda x \\ &= \lambda AR_A(\lambda)x \\ &= A_\lambda x, \end{aligned}$$

folgt mit Hilfe von Lemma 1.4, dass

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$$

für alle  $x \in D(A)$ . □

Wir haben nun die notwendigen Hilfsmittel, um zeigen zu können, dass die Bedingungen 1.) und 2.) hinreichend dafür sind, dass der Operator  $A$  eine  $C_0$ -Halbgruppe generiert.

Nach Lemma 1.5 und den Ergebnissen des ersten Abschnitts erzeugt die Yosida-Approximation  $A_\lambda$  von  $A$  für jedes  $\lambda > 0$  eine gleichmässig stetige Halbgruppe  $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ . Mit Hilfe der Definition von  $A_\lambda$  und der Tatsache, dass für kommutierende Operatoren  $B_1, B_2 \in L(X)$  gilt, dass

$$e^{t(B_1+B_2)} = e^{tB_1} e^{tB_2} \quad \forall t \geq 0,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{tA_\lambda} &= e^{t(\lambda^2 R_A(\lambda) - \lambda I)} \\ &= e^{t\lambda^2 R_A(\lambda)} e^{-t\lambda I} \\ &= e^{t\lambda^2 R_A(\lambda)} e^{-t\lambda} I \\ &= e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 R_A(\lambda)} \end{aligned}$$

und somit ist, dank Voraussetzung 2.),

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\|_{L(X)} &\leq \|e^{t\lambda^2 R_A(\lambda)}\|_{L(X)} \|e^{-t\lambda} I\|_{L(X)} \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R_A(\lambda)\|_{L(X)}} \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \cdot 1/\lambda} \\ &= 1, \end{aligned}$$

d.h.  $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$  ist eine Kontraktionshalbgruppe, für jedes  $\lambda > 0$ .

Um die Konvergenz der Funktionen  $t \in [0, \infty[ \mapsto e^{tA_\lambda} x$  für  $\lambda \rightarrow 0$  nachzuweisen, zeigen wir zunächst, dass für alle  $\lambda, \mu > 0$ ,  $x \in X$  und  $t \geq 0$ , folgende Abschätzung gilt:

$$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\|_X \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|_X.$$

Mit analogen Argumenten wie im Beweis von Satz 1.6 zeigt man

$$\begin{aligned} e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left( e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left( e^{tA_\mu} e^{ts(A_\lambda - A_\mu)} x \right) ds, \end{aligned}$$

weil mit  $A_\lambda$  und  $A_\mu$  auch die Operatoren  $e^{tA_\lambda}$  und  $e^{sA_\mu}$  für alle  $t, s \geq 0$  miteinander kommutieren.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( e^{tA_\mu} e^{ts(A_\lambda - A_\mu)} x \right) &= e^{tA_\mu} e^{ts(A_\lambda - A_\mu)} t(A_\lambda - A_\mu) x \\ &= t e^{t(1-s)A_\mu} e^{tsA_\lambda} (A_\lambda - A_\mu) x. \end{aligned}$$

Da die von der Yosida-Approximation erzeugten Halbgruppen Kontraktionshalbgruppen sind, folgt nun die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_X &\leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{ds} \left( e^{tA_\mu} e^{ts(A_\lambda - A_\mu)} x \right) \right\|_X ds \\
&\leq \int_0^1 \|t e^{t(1-s)A_\mu} e^{tsA_\lambda} (A_\lambda - A_\mu)x\|_X ds \\
&\leq t \|(A_\lambda - A_\mu)x\|_X.
\end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 1.5 folgt somit, dass, für jedes  $x \in D(A)$  und  $T > 0$  beliebig, die Funktionen  $t \in [0, T] \mapsto e^{tA_\lambda}x$  eine Cauchy-Folge in  $C([0, T]; X)$  (ausgestattet mit der üblichen Supremumsnorm) bilden. Da  $C([0, T]; X)$  vollständig ist, konvergiert die Folge für  $\lambda \rightarrow \infty$  gleichmäßig auf jedem Intervall  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , gegen eine stetige Funktion. Wir können so auf  $D(A)$  für jedes  $t \geq 0$  einen Operator  $S(t)$  definieren durch

$$S(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \quad \forall x \in D(A).$$

Es ist klar, dass der so definierte Operator  $S(t) : D(A) \subset X \rightarrow X$  linear ist. Ausserdem ist

$$\|S(t)x\|_X = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|e^{tA_\lambda}x\|_X \leq \|x\|_X$$

für alle  $x \in D(A)$ , d.h.  $S(t)$  ist stetig auf  $D(A)$ . Da  $D(A)$  dicht in  $X$  nach Voraussetzung 1.), lässt sich  $S(t)$  stetig zu einer Kontraktion auf  $X$  fortsetzen. Wir bezeichnen diese Fortsetzung wieder mit  $S(t)$ .

Wegen der Kontraktionseigenschaft von  $e^{tA_\lambda}$  und  $S(t)$  folgt nun sogar die gleichmäßige Konvergenz von  $e^{tA_\lambda}x \rightarrow S(\cdot)x$  auf  $[0, T]$ , für alle  $x \in X$ . Sei dazu  $x \in X$  beliebig,  $\epsilon > 0$  und  $\hat{x} \in D(A)$  mit  $\|x - \hat{x}\|_X < \epsilon$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
\|S(t)x - e^{tA_\lambda}x\|_X &\leq \|S(t)x - S(t)\hat{x}\|_X + \|S(t)\hat{x} - e^{tA_\lambda}\hat{x}\|_X + \|e^{tA_\lambda}\hat{x} - e^{tA_\lambda}x\|_X \\
&\leq \|x - \hat{x}\|_X + \|S(t)\hat{x} - e^{tA_\lambda}\hat{x}\|_X + \|x - \hat{x}\|_X \\
&\leq 2\epsilon + \|S(t)\hat{x} - e^{tA_\lambda}\hat{x}\|_X.
\end{aligned}$$

Wegen der bereits gezeigten gleichmäßigen Konvergenz der approximativen Lösungen für Anfangswerte in  $D(A)$ , folgt somit

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|S(t)x - e^{tA_\lambda}x\|_X \leq 2\epsilon$$

und damit die Behauptung.

Die so erhaltene Familie  $(S(t))_{t \geq 0}$  ist eine  $C_0$ -Halbgruppe von Kontraktionen auf  $X$ : Die starke Stetigkeit

$$\|S(t)x - x\|_X \rightarrow 0^+ \quad \text{für } t \rightarrow 0, \forall x \in X,$$

folgt sofort aus der starken Stetigkeit der Halbgruppen  $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$  und der Tatsache, dass die Funktionen  $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$  gleichmäßig auf  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , gegen die Funktion  $t \mapsto S(t)x$  konvergieren.

Die Halbgruppeneigenschaft  $S(t+s)x = S(t)S(s)x$  und  $S(0)x = x$  erhält man ebenfalls leicht durch Übergang zum Limes mit Hilfe der Halbgruppeneigenschaft der Familie  $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ .

Es verbleibt noch zu zeigen, dass  $A$  der infinitesimale Erzeuger der Kontraktionshalbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  ist. Sei  $B$  der Erzeuger von  $(S(t))_{t \geq 0}$ . Wir müssen zeigen, dass  $B = A$ . Sei zunächst  $x \in D(A)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} S(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x - x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d}{ds} e^{sA_\lambda}x \, ds \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x \, ds. \end{aligned}$$

Da dank der Kontraktionseigenschaft

$$\begin{aligned} \|e^{sA_\lambda}A_\lambda x - S(s)Ax\|_X &\leq \|e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\|_X + \|e^{sA_\lambda}Ax - S(s)Ax\|_X \\ &\leq \|A_\lambda x - Ax\|_X + \|e^{sA_\lambda}Ax - S(s)Ax\|_X \end{aligned}$$

und die Funktion  $s \mapsto e^{sA_\lambda}Ax$  gleichmäßig auf  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , gegen  $s \mapsto S(s)Ax$  konvergiert, konvergiert der Integrand  $e^{sA_\lambda}A_\lambda x$  gleichmäßig auf  $[0, t]$  gegen  $s \mapsto S(s)Ax$  und wir dürfen Limes und Integration vertauschen. Somit erhalten wir

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Ax \, ds$$

für alle  $t > 0$ ,  $x \in D(A)$ . Aus der Stetigkeit von  $s \mapsto S(s)x$  folgt sofort die Existenz des Limes

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = S(0)Ax = Ax$$

und somit ist gezeigt, dass  $D(A) \subset D(B)$  und  $Bx = Ax$  für alle  $x \in D(A)$ .

Nach Voraussetzung 2.) ist  $1 \in \varrho(A)$ , d.h.  $(I - A) : D(A) \rightarrow X$  bijektiv. Als Erzeuger der Kontraktionshalbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  erfüllt aber nach dem ersten Teil des Beweises (Notwendigkeit) auch der Operator  $B$  die Bedingung 2.), d.h. auch  $(I - B) : D(B) \rightarrow X$  ist bijektiv. Hieraus folgt nun leicht, dass  $D(B) = D(A)$  (und somit  $A = B$ ). Ist nämlich  $x \in D(B)$ ,  $f := x - Bx$ , so ist auf der einen Seite  $x = (I - B)^{-1}f$  die eindeutige Lösung der Gleichung  $x - Bx = f$ . Auf der anderen Seite ist  $\tilde{x} = (I - A)^{-1}f$  die eindeutige Lösung der Gleichung  $\tilde{x} - A\tilde{x} = f$ . Da  $D(A) \subset D(B)$  und  $A = B$  auf  $D(A)$ , folgt, dass  $\tilde{x}$  dann auch Lösung der Gleichung  $x - Bx = f$  ist. Die Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichung impliziert  $\tilde{x} = x$  und somit  $\tilde{x} \in D(A)$ . Folglich ist  $D(B) \subset D(A)$ , was zu zeigen war. □

### Bemerkungen:

1.) Man zeigt leicht, dass die Bedingungen 1.) und 2.) im Satz von Hille-Yosida äquivalent sind zu den Bedingungen 1.) und 2.)\*:

$$\begin{aligned} \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} &\subset \varrho(A) \text{ und} \\ \|R_A(\lambda)\|_{L(X)} &\leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) > 0. \end{aligned}$$

2.) Ist  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ein linearer abgeschlossener Operator, der nicht dicht definiert ist, aber die Bedingung 2.) des Satzes von Hille-Yosida erfüllt, dann erfüllt

die Einschränkung von  $A$  auf den Banachraum  $X_0 := \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$  (ausgestattet mit der Norm  $\|\cdot\|_X$ ), d.h. der Operator  $A_0 = A|_{X_0}$  definiert durch

$$\begin{aligned} D(A_0) &= \{x \in D(A); Ax \in X_0\} \\ A_0x &= Ax \quad \text{für alle } x \in D(A_0), \end{aligned}$$

die Bedingungen 1.) und 2.) und ist somit Generator einer Kontraktionshalbgruppe auf  $X_0$ . Überlegen wir uns nur kurz, dass  $D(A_0)$  dicht in  $X_0$  ist. Der Nachweis der übrigen Eigenschaften ist leicht.

Sei zunächst  $x \in D(A)$ ; betrachte für  $n \in \mathbb{N}$

$$x_n := nR_A(n)x.$$

Dann ist

$$x_n \in D(A) \quad \text{und} \quad Ax_n = nAR_A(n)x = n(x_n - x) \in D(A)$$

(da  $x_n, x \in D(A)$  und  $D(A)$  ein linearer Raum), und somit ist  $x_n = nR_A(n)x \in D(A_0)$ .

Ausserdem gilt

$$x_n = x + AR_A(n)x = x + R_A(n)Ax \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty),$$

da  $\|R_A(n)\|_{L(X)} \leq 1/n$ .

Da  $D(A)$  dicht in  $X_0$  und, wie eben gezeigt, jedes Element in  $D(A)$  durch eine Folge von Elementen  $(x_n)_n \in D(A_0)$  approximiert werden kann, folgt, dass  $D(A_0)$  dicht in  $X_0$  ist.

### Beispiel:

Sei  $X = C([0, 1])$  ausgestattet mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $D(A) = \{f \in C^1([0, 1]); f(1) = 0\}$ ,  $Af = f'$  für  $f \in D(A)$ .

Wir haben bereits gesehen, dass das Spektrum des linearen abgeschlossenen Operators  $A$  leer ist und die Resolvente von  $A$  in  $\lambda \in \mathbb{C}$  gegeben ist durch

$$R_A(\lambda)f(t) = \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s) ds, \quad t \in [0, 1], f \in X.$$

Folglich erhalten wir als Abschätzung für die Resolvente

$$\begin{aligned} \|R_A(\lambda)\|_{L(X)} &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s) ds \right| \\ &\leq \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} ds \\ &= e^{\lambda t} \frac{e^{\lambda t} - e^\lambda}{\lambda} \\ &\leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Allerdings ist  $A$  nicht dicht definiert:  $X_0 := \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_\infty} = \{f \in X; f(1) = 0\}$ . Der eingeschränkte Operator  $A_0 := A|_{X_0}$  erzeugt somit eine Kontraktionshalbgruppe

$(S_0(t))_{t \geq 0}$  auf  $X_0$ .

Mit Hilfe des Satzes von Hille-Yosida und entsprechender Umnormierung des Raumes (vgl. Lemma 1.2 (ii)) können wir nun die Erzeuger von beschränkten  $C_0$ -Halbgruppen charakterisieren.

**Satz 1.8**

Ein linearer Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ist genau dann der Erzeuger einer beschränkten  $C_0$ -Halbgruppe  $S(t)_{t \geq 0}$  mit  $\|S(t)\|_{L(X)} \leq M$  für alle  $t \geq 0$ , wenn gilt:

- 1.)  $D(A)$  ist dicht in  $X$  und  $A$  ist abgeschlossen
- 2.)  $]0, +\infty[ \subset \rho(A)$  und  $\|R_A(\lambda)^n\|_{L(X)} \leq \frac{M}{\lambda^n}$  für alle  $\lambda > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bemerkung:** Im Gegensatz zum Satz von Hille-Yosida ist hier eine unendliche Familie von Abschätzungen für die Resolvente von  $A$  zu zeigen. Ein Operator  $A$ , der die Bedingung 1.) erfüllt, für den gilt  $]0, \infty[ \subset \rho(A)$  und ein  $M > 0$  existiert, so dass  $\|R_A(\lambda)\|_{L(X)} \leq M/\lambda$  für alle  $\lambda > 0$  ist **nicht notwendig** der Erzeuger einer beschränkten  $C_0$ -Halbgruppe.

*Beweis:*

Die Notwendigkeit der Bedingungen 1.) und 2.) ergibt sich leicht aus dem Satz von Hille-Yosida bei Übergang zur Norm

$$\| \|x\| \| := \sup_{t \geq 0} \|S(t)x\|_X$$

in  $X$ . Wie bereits im Beweis des Lemma 1.2 (ii) gesehen, ist  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine Kontraktionshalbgruppe in  $(X, \| \cdot \|)$ . Nach dem Satz von Hille-Yosida erfüllt der Generator  $A$  von  $(S(t))_{t \geq 0}$  (der sich bei Übergang zu einer äquivalenten Norm in  $X$  ja bekanntlich nicht ändert) die Bedingung 1.),  $]0, \infty[ \subset \rho(A)$  und

$$\| \|R_A(\lambda)x\| \| \leq \frac{\| \|x\| \|}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0, x \in X.$$

Damit ist aber auch

$$\| \|R_A(\lambda)^n x\| \| \leq \frac{\| \|x\| \|}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0, x \in X \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da

$$\|x\|_X \leq \| \|x\| \| \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

folgen daraus sofort die gesuchten Abschätzungen für die Resolvente in der  $\| \cdot \|_X$ -Norm.

Zeigen wir nun, dass ein Operator, der die Bedingungen 1.) und 2.) erfüllt, eine beschränkte  $C_0$ -Halbgruppe erzeugt. Um sich wieder auf den Satz von Hille-Yosida beziehen zu können, müssen wir versuchen, eine weitere zu  $\| \cdot \|_X$  äquivalente Norm auf  $X$  zu definieren bzgl. der die Resolventen  $R_A(\lambda)$  ( $\lambda > 0$ ) von  $A$  kontraktiv sind. Aus naheliegenden Gründen können wir nicht die oben verwendete Norm  $\| \| \cdot \| \|$

verwenden...

Konstruktion der Norm:

Wir definieren zunächst für  $\mu > 0$ :

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R_A(\mu)^n x\|_X, \quad x \in X.$$

Offensichtlich gilt

$$\|x\|_X \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

(mit Voraussetzung 2.)) und  $\|\cdot\|_\mu$  ist eine zu  $\|\cdot\|_X$  äquivalente Norm auf  $X$ .

Weiter gilt

$$\|\mu R_A(\mu)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \quad \forall x \in X.$$

Für  $0 < \lambda \leq \mu$  erhalten wir mit Hilfe der Identität für beliebiges  $y \in X$

$$\begin{aligned} x &= R_A(\lambda)y \\ &= R_A(\mu)(y + (\mu - \lambda)x) \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|R_A(\lambda)y\|_\mu &= \frac{1}{\mu} \|\mu R_A(\mu)(y + (\mu - \lambda)x)\|_\mu \\ &\leq \frac{1}{\mu} \|y\|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \|x\|_\mu, \end{aligned}$$

woraus sofort

$$\|R_A(\lambda)y\|_\mu \leq \frac{\|y\|_\mu}{\lambda} \quad \forall y \in X$$

folgt. Somit  $R_A(\lambda)$  eine Kontraktion bzgl. der  $\|\cdot\|_\mu$ -Norm auf  $X$  (für  $0 < \lambda \leq \mu$ ) und gleiches gilt dann natürlich auch für alle Iterierten von  $R_A(\lambda)$ . Es folgt

$$\|\lambda^n R_A(\lambda)^n x\|_X \leq \|\lambda^n R_A(\lambda)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \quad \forall 0 < \lambda \leq \mu, x \in X, n \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Wir können nun auf der linken Seite das Supremum über  $n \in \mathbb{N}$  bilden und erhalten so

$$\underbrace{\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\lambda^n R_A(\lambda)^n x\|_X}_{\|x\|_\lambda} \leq \|x\|_\mu \quad \forall 0 < \lambda \leq \mu, x \in X.$$

Wir haben somit gezeigt, dass

$$\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu \quad \forall x \in X, 0 < \lambda \leq \mu.$$

aufgrund dieser Monotonie und der Beschränktheit (Erinnerung:  $\|x\|_\mu \leq M\|x\|_X$ ) existiert

$$|x| := \lim_{\mu \rightarrow \infty} \|x\|_\mu$$

für alle  $x \in X$  und definiert eine Norm auf  $X$ , die der Abschätzung

$$\|x\|_X \leq |x| \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X \quad (1.10)$$

genügt und somit zu  $\|\cdot\|_X$  äquivalent ist.

Aus der zweiten Ungleichung in (1.9) folgt sofort, dass  $R_A(\lambda)$  für alle  $\lambda > 0$  eine Kontraktion in der  $\|\cdot\|_X$ -Norm ist. Mit dem Satz von Hille-Yosida folgt nun, dass  $A$  eine Kontraktionshalbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $(X, \|\cdot\|_X)$  erzeugt. Bzgl. der ursprünglichen Norm ist  $(S(t))_{t \geq 0}$  wegen (1.10) eine durch die Konstante  $M$  beschränkte Halbgruppe mit Erzeuger  $A$ .  $\square$

Aus dem letzten Satz folgt nun mit einfacher Skalierung (vgl. Lemma 1.2 (i))

**Satz 1.9**

Ein linearer Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ist genau dann der Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  mit  $\|S(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}$  für alle  $t \geq 0$ , wenn gilt:

- 1.)  $D(A)$  ist dicht in  $X$  und  $A$  ist abgeschlossen
- 2.)  $]\omega, +\infty[ \subset \varrho(A)$  und  $\|R_A(\lambda)^n\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$  für alle  $\lambda > \omega$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis:*

$\Rightarrow$ : Ist  $A$  der Erzeuger der  $C_0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$ , so ist  $A - \omega I$  der Generator der skalierten Halbgruppe  $(e^{-\omega t} S(t))_{t \geq 0}$ . Nach Lemma 1.2 ist die skalierte Halbgruppe beschränkt:

$$\|e^{-\omega t} S(t)\|_{L(X)} \leq M \quad \forall t \geq 0.$$

Nach Satz 1.8 gilt somit

$$\underbrace{\overline{D(A - \omega I)}}_{= \overline{D(A)}} = X,$$

$A - \omega I$  ist abgeschlossen,

woraus sofort die Abgeschlossenheit von  $A$  folgt. Desweiteren gilt

$$]0, \infty[ \subset \varrho(A - \omega I),$$

d.h.  $\lambda I - (A - \omega I) = (\lambda - \omega)I - A : D(A) \rightarrow X$  ist bijektiv für alle  $\lambda > 0$ . Somit folgt sofort

$$]\omega, \infty[ \subset \varrho(A).$$

Aus der Abschätzung

$$\|R_{A - \omega I}(\lambda)^n\|_{L(X)} \leq \frac{M}{\lambda^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \lambda \in \varrho(A - \omega I)$$

schliesslich folgt mit der Identität

$$R_{A - \omega I}(\lambda) = R_A(\lambda + \omega) \quad \forall \lambda > 0$$

die gesuchte Abschätzung

$$\|R_A(\mu)\|_{L(X)} \leq \frac{M}{\mu^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mu > \omega.$$

Die umgekehrte Implikation  $\Leftarrow$  zeigt man analog.  $\square$

**Bemerkungen:**

- 1.) Wie im Falle des Satzes von Hille-Yosida kann gezeigt werden, dass die Bedingung 2.) im Satz 1.8 durch folgende äquivalente Bedingung 2.)\*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \subset \varrho(A) \text{ und} \\ \|\lambda^n R_A(\lambda)^n\|_{L(X)} \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda)^n} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

bzw. die entsprechende Bedingung im Satz 1.9 durch die Bedingungen 2.)\*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) > \omega\} \subset \varrho(A) \text{ und} \\ \|\lambda^n R_A(\lambda)^n\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega)^n} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) > \omega \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

ersetzt werden kann.

- 2.) Erfüllt ein Operator  $A$  die Bedingungen des Satzes 1.8 bzw. 1.9 mit Ausnahme der Dichteitseigenschaft des Definitionsbereiches, gilt analog zum Kontraktionsfall, dass der auf  $X_0 = \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$  eingeschränkte Operator eine beschränkte bzw.  $C_0$ -Halbgruppe auf  $X_0$  erzeugt.

- 3.) Aus der obigen Charakterisierung der Erzeuger von  $C_0$ -Halbgruppen folgt nun leicht die Charakterisierung der Erzeuger von  $C_0$ -Gruppen. Dabei bezeichnet man als Erzeuger einer  $C_0$ -Gruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  den Operator  $A$  definiert durch

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ für alle } x \in D(A) = \{x \in X; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existiert in } X\}.$$

Ist  $A$  der Generator einer  $C_0$ -Gruppe, ergibt sich unmittelbar, dass  $A$  Generator der  $C_0$ -Halbgruppe  $(S_+(t))_{t \geq 0} := (S(t))_{t \geq 0}$  ist und  $-A$  die  $C_0$ -Halbgruppe  $(S_-(t))_{t \geq 0} := (S(-t))_{t \geq 0}$  erzeugt. Die Implikationen (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (c) des nachstehenden Satzes sind somit, unter Berücksichtigung von Satz 1.9, klar.

**Satz 1.10**

Für einen linearen Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  sind äquivalent:

- (a)  $A$  ist Erzeuger einer  $C_0$ -Gruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  mit  $\|S(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega|t|}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$
- (b)  $A$ , bzw.  $-A$ , ist Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe  $(S_+(t))_{t \geq 0}$ , bzw.  $(S_-(t))_{t \geq 0}$ , mit  $\|S_{\pm}(t)\| \leq M e^{\omega t}$  für alle  $t \geq 0$
- (c) (i)  $D(A)$  ist dicht in  $X$  und  $A$  ist abgeschlossen  
(ii)  $\varrho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{R}; |\lambda| > \omega\}$  und  $\|R_A(\lambda)^n\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(|\lambda| - \omega)^n}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $|\lambda| > \omega$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis:*

Es verbleibt nur noch zu zeigen, dass (c)  $\Rightarrow$  (a) gilt. Unter der Voraussetzung (c) folgt, wie bereits erwähnt, nach Satz 1.9 unmittelbar, dass  $A$  bzw.  $-A$   $C_0$ -Halbgruppen  $(S_+(t))_{t \geq 0}$  bzw.  $(S_-(t))_{t \geq 0}$  mit der entsprechenden Wachstumsbeschränkung erzeugen. Definieren wir nun die Familie  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}} \subset L(X)$  durch

$$S(t) := \begin{cases} S_+(t) & , t \geq 0 \\ S_-(-t) & , t < 0 \end{cases} ,$$

so ist klar, dass die Familie  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  stark stetig in 0 ist und zudem gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existiert genau dann, wenn } x \in D(A),$$

und für  $x \in D(A)$  ist  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = Ax$ .

Es verbleibt die Gruppeneigenschaft der Familie  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  zu zeigen.

Mittels des mittlerweile bekannten Tricks des Umnormierens und entsprechender Skalierung dürfen wir zudem annehmen, dass  $M = 1$  und  $\omega = 0$  und somit  $(S_+(t))_{t \geq 0}$  und  $(S_-(t))_{t \geq 0}$  Kontraktionshalbgruppen sind. Da  $A$  und  $-A$  miteinander kommutieren, kommutieren auch die Resolventen  $R_A(\lambda)$  und  $R_{-A}(\lambda) = -R_A(-\lambda)$  sowie die Yosida-Approximationen  $A_\lambda, (-A)_\lambda$  miteinander. Somit kommutieren auch die Operatoren der erzeugten gleichmäßig stetigen Halbgruppen  $e^{tA_\lambda}$  und  $e^{s(-A)_\lambda}$ , für alle  $s, t \geq 0, \lambda > 0$ , miteinander. Da diese bekanntlich gegen die Halbgruppen  $(S_+(t))_{t \geq 0}$  bzw.  $(S_-(t))_{t \geq 0}$  konvergieren, kommutieren so schliesslich auch die Operatoren  $S_+(t)$  und  $S_-(s)$  miteinander, für alle  $s, t \geq 0$ . Aufgrund dieser Eigenschaft rechnet man nun leicht nach, dass die Familie von Operatoren  $(T(t))_{t \geq 0}$  definiert durch  $T(t) = S_+(t)S_-(t)$ ,  $t \geq 0$ , eine  $C_0$ -Halbgruppe von Operatoren (die Vertauschbarkeit der Operatoren sichert hierbei die Halbgruppeneigenschaft). Sei  $C$  der Generator der Halbgruppe  $(T(t))_{t \geq 0}$ . Für  $x \in D(A) \cap D(-A) = D(A)$  gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{h \downarrow 0} \frac{S_+(h)S_-(h)x - x}{h} \\ = & \lim_{h \downarrow 0} \frac{S_+(h)(S_-(h)x - x)}{h} + \lim_{h \downarrow 0} \frac{S_+(h)x - x}{h} \\ = & -Ax + Ax \\ = & 0, \end{aligned}$$

und somit folgt, dass  $D(A) \subset D(C)$  und  $Cx = 0$  für alle  $x \in D(A)$ .

Nach Lemma 1.1 (iv) gilt zudem für alle  $t \geq 0$ , für alle  $x \in D(C)$ ,

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Cx \, ds.$$

Hieraus folgt nun sofort, dass  $T(t)x = x$  für alle  $t \geq 0$ , für alle  $x \in D(A)$ . Da  $D(A)$  dicht in  $X$  ist und  $T(t) \in L(X)$ , folgt  $T(t) = S_+(t)S_-(t) = I_X$  für alle  $t \geq 0$ . Somit ist jeder der Operatoren  $S_+(t)$ ,  $S_-(t)$  invertierbar und

$$S_+(t)^{-1} = S_-(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Nun lässt sich leicht nachrechnen, dass  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  der Gruppeneigenschaft genügt. Ist etwas  $t < 0, s > 0$  mit  $t + s > 0$ , so gilt

$$\begin{aligned} S_+(-t)S(t+s) &= S_+(-t)S_+(t+s) \\ &= S_+(s) \\ &= S(s). \end{aligned}$$

Durch Anwenden des inversen Operators  $(S_+(-t))^{-1} = S_-(-t)$  ergibt sich so

$$S(t+s) = S_-(-t)S(s) = S(t)S(s)$$

nach Definition der Familie  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ .

□

Wenden wir uns nun wieder dem abstrakten homogenen Cauchy-Problem für einen linearen Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  zu:

$$(ACP)_h \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Dieses, bzw. das allgemeinere nicht-homogene abstrakte Cauchy-Problem

$$(ACP) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f, & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

mit  $f : [0, \infty[ \rightarrow X$ , hatte unser Studium der  $C_0$ -Halbgruppen ja motiviert. Aus den bislang gewonnenen Erkenntnissen gelangen wir nun leicht zu folgendem

**Satz 1.11**

Der lineare Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  sei Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$ .

Dann besitzt das abstrakte homogene Cauchy-Problem für alle  $x \in D(A)$  eine eindeutige globale klassische Lösung  $u : [0, \infty[ \rightarrow X$ . Diese ist gegeben durch  $u(t) = S(t)x$  für alle  $t \geq 0$ .

*Beweis:*

Wir haben bereits gesehen, dass für  $x \in D(A)$  die Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto u(t) := S(t)x$  eine klassische Lösung von  $(ACP)_h$  ist. Es ist also nur noch die Eindeutigkeit der klassischen Lösung zu zeigen. Sei dazu  $v$  eine weitere klassische Lösung von  $(ACP)$  auf  $[0, \infty[$ . Aufgrund der Linearität von  $A$  ist dann die Funktion  $w := u - v$  offensichtlich klassische Lösung von  $(ACP)_h$  zum Anfangswert  $w(0) = 0$ . Sei nun  $T > 0$  und definiere

$$\Phi(t) := S(t)w(T - t), \quad t \in [0, T].$$

Offensichtlich ist dann

$$\Phi(T) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi(0) = w(T).$$

Außerdem ist  $\Phi$  stetig differenzierbar auf  $[0, T]$  mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t) &= AS(t)w(T - t) - S(t)Aw(T - t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

auf  $[0, T]$ . Folglich ist  $\Phi$  konstant auf  $[0, T]$  und somit  $w(T) = 0$ . Da  $T > 0$  beliebig, folgt  $w \equiv 0$ , d.h. aber  $u \equiv v$ . □

In Anbetracht von Satz 1.11 erscheint nun folgende Definition einer verallgemeinerten Lösung von  $(ACP)_h$  natürlich:

**Definition 1.5**

Der lineare Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  sei Generator einer  $C_0$ -Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$  auf  $X$ .

Für  $x \in X$  heisst die Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x$  **milde Lösung** des abstrakten Cauchy-Problems  $(ACP)_h$ .

### Bemerkungen:

1.) Wir haben bereits bei dem Beweis des Satzes von Hille-Yosida bemerkt, dass die klassische Lösung  $t \in [0, \infty[ \mapsto e^{tA_\lambda} x$  des approximierenden Cauchy-Problems für die Yosida-Approximation  $A_\lambda$  auch für  $x \in X \setminus D(A)$  gleichmäßig auf kompakten Intervallen gegen die stetige Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x$  konvergiert. Es ist daher in der Tat natürlich, diese (i.a. nicht differenzierbare) Funktion als eine „verallgemeinerte Lösung“ aufzufassen.

2.) Für  $x \in X \setminus D(A)$  ist die Funktion  $t \mapsto S(t)x$  niemals in 0 rechtsseitig differenzierbar und somit grundsätzlich keine klassische Lösung.

**Beispiel:**  $X = C_0(\mathbb{R})$ ,  $(S(t))_{t \geq 0}$  die (Links-)Translationshalbgruppe auf  $X$  gegeben durch  $S(t)f = f(\cdot + t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $f \in X$ . Der Generator von  $(S(t))_{t \geq 0}$  ist bekanntlich der Differentiationsoperator  $A: Af = f'$  definiert auf  $D(A) = \{f \in X; f \text{ differenzierbar mit } f' \in X\}$ . Offensichtlich ist dann für eine nur stetige Funktion  $f \in X \setminus D(A)$  die Funktion  $t \mapsto f(\cdot + t)$  für kein  $t \geq 0$  differenzierbar!

Dennoch ist es grundsätzlich möglich, dass auch für  $x \in X \setminus D(A)$  die Funktion  $t \in [0, \infty[ \mapsto S(t)x$  zumindestens für  $t > 0$  (oder auch nur  $t > t_0$  für ein festes  $t_0 > 0$ ) differenzierbar ist und für  $t > 0$  (bzw.  $t > t_0$ ) die DGL im klassischen Sinne löst. Ist dies der Fall, sprechen wir von einem **Regularisierungseffekt** der Halbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$ . Diese und andere Fragen untersuchen wir im Anschluss an das nun folgende Studium des nicht-homogenen ACPs. Ein triviales Beispiel einer regularisierend wirkenden Halbgruppe ist die folgende:

**Beispiel:**  $X = C([0, 1])$ ,  $D(A) = \{f \in X; f(1) = 0\}$ ,  $Af = f'$  für  $f \in D(A)$ . Wie bereits gesehen erzeugt  $A$  eingeschränkt auf  $X_0 := \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$  eine Kontraktionshalbgruppe  $(S(t))_{t \geq 0}$ .  $S(t)$  ist, wie man sich leicht überzeugt, wieder eine Linkstranslation. Genauer: für  $s \in [0, 1]$  ist

$$S(t)f(s) = \begin{cases} f(t+s), & \text{falls } t+s < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist natürlich für alle  $t \geq 1$   $S(t)f = 0$  für jedes  $f \in X_0$ , und somit ist, für alle  $f \in X_0$ , die milde Lösung  $t \mapsto S(t)f$  trivialerweise differenzierbar...

Glücklicherweise gibt es aber auch interessantere „echte“ Regularisierungseffekte.