Kapitel 4

Evolutionsprobleme und Operator-Differentialgleichungen

Im letzten Kapitel haben wir nur elliptische Probleme untersucht. Diese beschreiben Systeme in einem stationären Zustand, d.h. im Gleichgewicht.
Ein System, dessen Zustand sich im Laufe der Zeit ändert, wird dagegen mit Hilfe von parabolischen oder hyperbolischen Gleichungen modelliert. Im ersten Kapitel haben wir bereits einige Beispiele solcher Gleichungstypen kennengelernt und insbesondere ihre klassischen linearen Vertreter, die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung, mit klassischen Lösungsmethoden untersucht. Wir haben dabei aber auch die Grenzen der klassischen Methoden gesehen. Im allgemeinen besitzen partielle Differentialgleichungen nun einmal keine expliziten Lösungen, die man mit Hilfe von speziellen Methoden „berechnen" kann. Der funktionalanalytische Ansatz, den wir im letzten Abschnitt für die Behandlung elliptischer PDEs gewählt haben, ist dagegen sehr allgemein und erlaubt es, für eine Vielzahl von Gleichungen die Existenz und oft auch die Eindeutigkeit einer (schwachen) Lösung und ihre stetige Abhängigkeit von den Daten zu zeigen. Gleichzeitig haben wir mit dem Galerkin-Verfahren die theoretische Grundlage für das Finite-Elemente-Verfahren kennengelernt, mit dessen Hilfe die schwachen Lösungen mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden können.

In diesem Kapitel wollen wir nun parabolische und hyperbolische partielle Differentialgleichungen mit funktionalanalytischen Methoden untersuchen. Als Modellproblem dient uns dabei das folgende Anfangsrandwertproblem: gesucht ist eine Funktion

$$u: \begin{array}{ll} Q = (0,T)\times\Omega & \to \mathbb{R}, \\ (t,x) & \mapsto u(t,x) \end{array}$$

die folgende Gleichungen erfüllt:

$$\text{(ARWP)} \qquad \begin{cases} u_t - \Delta_p(u) = f & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{auf } \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

wobei das Anfangsdatum $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ und die rechte Seite $f : Q \to \mathbb{R}$ fest vorgegebene Funktionen sind; Ω ist wie üblich eine beschränktes glattberandetes Gebiet im $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Der Einfachheit halber wollen wir in diesem Kapitel ausserdem voraussetzen, dass

$2 \leq p < \infty$.

Obiges (ARWP) beschreibt einen nichtlinearen Diffusionsprozess. Die gesuchte Funktion u (etwa eine Dichtefunktion) beschreibt zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ den Zustand des Systems. Daran wird deutlich, dass die Zeitvariable t eine besondere Rolle spielt. Diese gegenüber der Ortsvariablen ausgezeichnete Rolle können wir dadurch ausdrücken, indem wir eine „abstrakte" Funktion $\tilde{u}$ einführen, die jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ die auf Ω definierte reellwertige Funktion $x \in \Omega \mapsto u(t,x)$ zuordnet, die den Zustand des Systems zum Zeitpunkt t beschreibt:

$$\tilde{u} : t \in [0,T] \mapsto \{u(t,\cdot) : x \in \Omega \mapsto u(t,x)\},$$

d.h. $\tilde{u}(t)(x) = u(t,x)$ für alle $t \in [0,T]$, für alle $x \in \Omega$.
Die „abstrakte" Funktion $\tilde{u}$ nimmt also ihre Werte in einem Funktionenraum X bestehend aus reellwertigen auf Ω definierten Funktionen an, z. B. $X = W^{1,p}(\Omega)$, $X = L^p(\Omega)$, ...

Welches ist nun ein geeigneter Funktionenraum X für unser (ARWP)?

Wir betrachten dazu das elliptische Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta_p(u) = g & \text{auf } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dieses haben wir bereits im letzten Kapitel als abstrakte Operatorgleichung $\mathcal{A}u = f$ mit $\mathcal{A} : W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto W^{-1,p'}(\Omega)$ definiert durch

$$< \mathcal{A}u, v >= \int_\Omega |Du|^{p-2} Du \cdot Dv \, dx \qquad \text{für alle } u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

formuliert.

Es liegt nun nahe, das Anfangsrandwertproblem (ARWP) als gewöhnliche Operator-Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t) & , \ t \in (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für die abstrakte Funktion $\tilde{u} : [0,T] \to W_0^{1,p}(\Omega)$ aufzufassen.

Es stellt sich damit die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung einer solchen gewöhnlichen Operator-Differentialgleichung in einem unendlich dimensionalen Banachraum, und allem voran die Frage nach einem geeigneten Lösungsbegriff. Klar ist: zur Untersuchung benötigen wir geeignete Funktionenräume abstrakter Funktionen, etwa den Raum aller stetigen Funktionen $u : [0,T] \to X$ und den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $u : [0,T] \to X$, wobei X ein beliebiger Banachraum. Da wir aber im allgemeinen nicht erwarten, klassische Lösungen (d.h. im klassischen Sinn differenzierbare Lösungen) zu finden, werden wir weitere abstrakte Funktionenräume benötigen, etwa die Lebesgue-Räume von Banachraum-wertigen Funktionen. Zudem müssen wir die Frage nach einer sinnvollen Definition einer schwachen Lösung, speziell: einer schwachen (Zeit-)Ableitung einer Banachraum-wertigen Funktion $u : [0, T] \to X$ klären.

Grundsätzlich gibt es zwei verschiedene funktionalanalytische Zugänge zu unserem Anfangsrandwertproblem (ARWP)

1.) Variationneller Zugang:

Wie oben beschrieben formulieren wir das (ARWP) als Evolutionsgleichung für einen variationnellen beschränkten, koerzitiven Operator $\mathcal{A} : V \to V'$. Hierbei ist typischerweise

$$V \hookrightarrow_d H \hookrightarrow_d V'$$

ein Gelfand-Dreier, d.h. neben dem reflexiven und separablen Banachraum V und seinem Dualraum V' werden wir mit einem weiteren Raum, einem Hilbertraum H, arbeiten (in unserem Modellbeispiel haben wir es mit dem Gelfand-Dreier $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_d L^2(\Omega) \hookrightarrow_d W^{-1,p'}(\Omega)$ zu tun).
Bei diesem variationnellen Zugang konstruiert man wie im stationären Fall mit Hilfe eines verallgemeinerten Galerkin-Verfahrens, dem sog. Faedo-Galerkin-Verfahren, Näherungsgleichungen in endlich-dimensionalen Teilräumen von V. Dazu wählt man wieder eine Galerkin-Basis $(v_n)_n$ und ein zugehörges Galerkin-Schema $(V_n)_n$ in V. Danach untersucht man, für alle $n \in \mathbb{N}$, die folgenden approximativen Probleme: gesucht ist $u_n : [0, T] \to V_n$ Lösung von

$$\begin{cases} < u_n'(t), v >_{V',V} + < \mathcal{A}u_n(t), v >_{V',V} = < f(t), v >_{V',V} & \forall v \in V_n \\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases}$$

mit $u_{0n} \in V_n$, eine Approximation von u_0. Das approximative Problem ist ein Anfangswertproblem für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen in den Unbekannten $\alpha_i(t), i = 1, \ldots, n$, den Koeffizienten der Funktion $u_n(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) v_i$.
Die Existenz einer Lösung folgt dann mit Hilfe des Satzes von Peano.
Im nächsten Schritt müssen wieder a-priori-Abschätzungen für die Näherungslösungen hergeleitet und anschliessend die Konvergenz der Näherungslösungen in einem geeigneten Funktionenraum untersucht werden.

Mit dieser Methode werden wir in unserem Modell-Beispiel die Existenz und Eindeutigkeit einer „schwachen" Lösung $u : [0, T] \to W_0^{1,p}(\Omega)$ für beliebige Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\Omega)$ und rechte Seiten $f : [0, T] \to W^{-1,p'}(\Omega)$ zeigen. Die Bedeutung des Begriffes einer „schwachen" Lösung, der schwachen Zeitableitung und allen voran der Lebesgue-Räume Banachraum-wertiger Funktionen wird dabei noch zu klären sein.

2.) Halbgruppenzugang:

Bei diesem Zugang versucht man, dass Problem in einem einzigen geeigneten Banachraum zu studieren. Dazu betrachtet man etwa anstelle des variationnellen Operators $\mathcal{A} : V \to V'$, $V \hookrightarrow_d H \hookrightarrow_d V'$, eine Einschränkung dieses Operators in dem Hilbertraum H. Dazu definiert man zunächst den Definitionsbereich des „kleineren" Operators A:

$$D(A) := \{u \in V;\ \mathcal{A}u \in H\}$$

und setzt dann

$$Au = \mathcal{A}u \qquad \forall u \in D(A).$$

Der so definierte neue Operator „erbt" einige Eigenschaften des variationnellen Operators $\mathcal{A}$, speziell Monotonie- und Koerzivitätseigenschaften. Allerdings ist der Operator A im Gegensatz zum beschränkten variationnellen Operator $\mathcal{A}$ in der Regel unbeschränkt.
Aus diesem Grund kann die Existenz einer Lösung der Operator-Differentialgleichung

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) & ,\ t \in (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

nicht mit Hilfe der Galerkin-Methode gezeigt werden. Alternative Approximationstechniken, die in diesem Fall üblich sind, stellen die

* Diskretisierung mit Hilfe eines impliziten Euler-Schemas in der Zeit sowie die
* Regulariserungsmethode

dar.

Bei der letzten Methode versucht man, den unbeschränkten Operator A durch eine Folge von beschränkten „glatten" (etwa Lipschitz stetigen) Operatoren A_n zu approximieren. Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems für diese Operatoren A_n kann dann mit Hilfe einer unendlich-dimensionalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf gezeigt werden.

Wieder muss im Anschluss die Konvergenz der approximativen Lösungen untersucht werden. Dazu werden wie im variationnellen Zugang die geeigneten Funktionenräume benötigt.

4.1 Abstrakte Funktionenräume

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $(X', \|\cdot\|_{X'})$ sein topologischer Dualraum. Wir bezeichnen mit

$\mathbf{C([0,T];X)} :=$ den linearen Raum aller auf $[0,T]$ **stetigen Funktionen mit Werten in** X.

Dabei heisst eine Funktion $u : [0,T] \to X$ **stetig in einem Punkt** $t_0 \in [0,T]$, wenn gilt

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in [0,T]}} \|u(t) - u(t_0)\|_X = 0,$$

$u : [0,T] \to X$ heisst **stetig**, falls u stetig ist in jedem Punkt $t \in [0,T]$.

Bemerkung: Falls $u : [0,T] \to X$ stetig, dann ist auch die reellwertige Funktion $t \in [0,T] \mapsto \|u(t)\|_X$ stetig, da wegen der Dreiecksungleichung

$$|\|u(t)\|_X - \|u(s)\|_X| \leq \|u(t) - u(s)\|_X$$

für alle $t, s \in [0,T]$ gilt.

Da reellwertige stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall stets beschränkt sind und Maximum und Minimum annehmen, folgt, dass

$$\sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X < +\infty.$$

Stetige Funktionen $u : [0,T] \to X$ sind also stets beschränkt.

Desweiteren definiert

$$|||f|||_\infty := \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X \qquad , \quad f \in C([0,T];X)$$

eine Norm auf $C([0,T];X)$. Ausgestattet mit dieser Norm ist $C([0,T];X)$ ist ein Banachraum.

Ohne Beweis zitieren wir

Satz 4.1 (Weierstrass'scher Approximationssatz)
Die Menge aller Polynome

$$p : \begin{array}{ll} [0,T] & \to X \\ t & \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i t^i \end{array}$$

mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, ist dicht in $C([0,T];X)$.

Mit Hilfe des Approximationssatzes folgt sofort

Korollar 4.1
Falls X separabel, dann ist $C([0,T];X)$ separabel.

Um eine Operator-Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = f(t)$, $t \in (0,T)$, für einen Operator $A : D(A) \subset X \to X$, X Banachraum, lösen zu können, muss zunächst einmal der Begriff der Differenzierbarkeit einer vektorwertigen Funktion $u : [0,T] \to X$ geklärt werden.

Definition 4.1
Eine Funktion $u : [0,T] \to X$ heisst *klassisch* (oder *stark*) *differenzierbar* in $t_0 \in [0,T]$, falls es ein $x \in X$ gibt so, dass

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t_0+h\in[0,T]}} \left\| \frac{u(t_0+h)-u(t_0)}{h} - x \right\|_X = 0.$$

In diesem Fall heisst $u'(t_0) := x$ *starke Ableitung von* u *in* t_0.

Die Funktion u heisst *stark differenzierbar auf* $[0,T]$, falls u stark differenzierbar in jedem Punkt $t \in [0,T]$.

Bemerkungen:

1.) Anstelle von „starker Differenzierbarkeit“ spricht man häufig auch einfach nur von „Differenzierbarkeit“.

Wir werden später weitere Differenzierbarkeitsbegriffe kennenlernen („schwache“ Diffenzierbarkeit, „distributionnelle“ Ableitungen vektorwertiger Funktionen ...). Dann erst wird es wichtig sein, zwischen den einzelnen Begriffen auch klar sprachlich zu unterscheiden.

2.) Wie im reellen Fall gilt offensichtlich:

$u : [0,T] \to X$ ist differenzierbar in $t_0 \in [0,T] \Rightarrow u$ ist stetig in t_0

denn

$$\begin{aligned}
\|u(t_0+h)-u(t_0)\|_X &= h\left\|\frac{u(t_0+h)-u(t_0)}{h}\right\|_X \\
&\leq h\left\|\frac{u(t_0+h)-u(t_0)}{h} - u'(t_0)\right\|_X + h\|u'(t_0)\|_X \\
&\to 0 \quad \text{wenn } h \to 0
\end{aligned}$$

Wir können nun rekursiv die folgenden Räume für $k \in \mathbb{N}$ definieren:

$C^k([0,T];X) :=$ der lineare Raum der differenzierbaren Funktionen $u : [0,T] \to X$, für die $u' \in C^{k-1}([0,T];X)$

Hierbei bezeichnet $C^0([0,T];X) = C([0,T];X)$.

Die Abbildung

$$u \in C^k([0,T];X) \mapsto \|u\|_{C^k([0,T];X)} := \max_{0\le j\le k} |||u^{(j)}(t)|||_\infty$$

definiert eine Norm auf $C^k([0,T];X)$. Ausgestattet mit dieser Norm ist $C^k([0,T];X)$ ein Banachraum [1] Falls X separabel ist, ist auch $C^k([0,T];X)$ wieder separabel.

4.1.1 Bochner-Integrale und abstrakte Lebesgue-Räume

Leider wird es in den meisten Fällen nicht möglich sein, eine „klassische Lösung“ einer Operator-Differentialgleichung zu finden. Diese Aussage trifft sowohl zu auf eine Operator-Differentialgleichung

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad t \in (0,T)$$

für einen (i.a. unbeschränkten, unstetigen) Operator $A : D(A) \subset X \to X$, X Banachraum, als auch auf die variationnelle Operator-Differentialgleichung

$$u'(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t), \qquad t \in (0,T)$$

mit einem beschränkten variationnellen Operator $\mathcal{A} : V \to V'$, V Banachraum. Im ersten Fall liegt es an der Unstetigkeit des Operators A, dass im allgemeinen keine „klassische Lösung“ existiert, wobei wir darunter eine klassisch differenzierbare Funktion $u : [0,T] \to X$ verstehen, die punktweise die Operator-Differentialgleichung erfüllt. Dieses Problem haben wir bereits im Fall einer gewöhnlichen skalaren Differentialgleichung $u'(t) = f(t, u(t))$ mit unstetiger rechter Seite kennengelernt.

Im zweiten Fall bemerken wir nur, dass bereits ein Problem dadurch auftaucht, dass offensichtlich nach einer Lösung $u : [0,T] \to V$ gesucht wird, deren „Ableitung“ u' aber eine abstrakte Funktion von $[0,T]$ in den Dualraum V' sein sollte ....

In jedem Fall benötigen wir „grössere“ Funktionenräume, die nicht differenzierbare und auch unstetige Funktionen enthalten.

[1] alternativ kann auf $C^k([0,T];X)$ die äquivalente Norm $\sum_{j=0}^k |||u^{(j)}|||_\infty$ definiert werden; auch die Einführung einer gewichteten Norm ist manchmal sinnvoll, vgl. Satz 4.9 weiter unten

Definition 4.2
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $T > 0$.

1) Eine Funktion $u : [0, T] \to X$ heisst *einfach*, wenn es endlich viele in $[0, T]$ enthaltene paarweise disjunkte Lebesgue-messbare Mengen A_i, $i = 1, \ldots, n$, gibt so, dass u auf jeder der Mengen A_i einen konstanten Wert $x_i \in X$ annimmt und $u(t) = 0$ ist für $t \in [0, T] \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$, d.h.

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}(t), \qquad t \in [0, T]. \tag{4.1}$$

Falls alle Mengen A_i als Intervalle gewählt werden können, wird u auch *Treppenfunktion* genannt.

2) Das *Bochner-Integral* einer einfachen Funktion $u = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$ wie in 1) ist definiert als

$$\int_0^T u(t)\, dt := \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda(A_i)$$

Hierbei bezeichnet λ das Lebesguemass auf $[0, T]$. Falls A_i ein Intervall, dann ist $\lambda(A_i)$ somit genau die Intervalllänge von A_i.

3) Eine Funktion $u : [0, T] \to X$ heisst *stark messbar* (im Sinne von Bochner), falls eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [0, T] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, existiert, so dass

$$u_n(t) \to u(t) \qquad \text{in } X \quad \text{für fast alle } t \in [0, T].$$

4) Eine Funktion $u : [0, T] \to X$ heisst *Bochner-integrierbar*, wenn es eine Folge $(u_n)_n$ von einfachen Funktionen $u_n : [0, T] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, die punktweise fast überall auf $[0, T]$ gegen u in X konvergieren und ausserdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X\, dt = 0. \tag{4.2}$$

In diesem Fall ist das *Bochner-Integral* von u über $[0, T]$ definiert als

$$\int_0^T u(t)\, dt := \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(t)\, dt. \tag{4.3}$$

Das Bochner-Integral von u über eine beliebige Lebesgue-messbare Menge $B \subset [0, T]$ ist dann definiert als

$$\int_B u(t)\, dt := \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(t)\chi_B(t)\, dt.$$

Bemerkungen:

1.) Falls $u : [0, T] \to X$ stark messbar ist, ist die reellwertige Funktion $t \in [0, T] \mapsto$

$\|u(t)\|_X$ Lebesgue-messbar. In der Tat gilt: wenn $(u_n)_n$ eine Folge einfacher Funktionen, die punktweise fast überall auf $[0,T]$ gegen u in X konvergiert, dann konvergiert die Folge der einfachen und insbes. Lebesgue-messbaren Funktionen $(\|u_n(\cdot)\|_X)_n$ punktweise fast überall in $\mathbb{R}$ gegen die Funktion $\|u(\cdot)\|_X$, und diese ist somit Lebesgue-messbar.

2.) Das Integral in (4.2) ist wohldefiniert, da $\|u(\cdot) - u_n(\cdot)\|_X$ nach 1.) Lebesgue-messbar ist. Die Bedingung (4.2) ist also sinnvoll.

Falls die Bedingung (4.2) erfüllt ist, existiert der Grenzwert in (4.3). Dies sieht man wie folgt: seien $m, n \in \mathbb{N}$. Da u_n, u_m einfache Funktionen, besitzen sie eine Darstellung der Form (4.1). Wir können bei dieser Darstellung o.B.d.A. annehmen, dass die Mengen A_i, auf denen u_n bzw. u_m konstante Werte $x_i \in X$ bzw. $y_i \in X$ annehmen, in der jeweiligen Darstellung (4.1) von u_n und u_m dieselben sind (wenn dies zunächst nicht der Fall ist, reicht es aus, die Durchschnitte sämtlicher in der Summendarstellung von u_n auftauchenden Mengen mit denen in der Darstellung von u_m auftauchenden zu bilden, und die Darstellung von u_n und u_m entsprechend der so erhaltenen neuen endlichen Familie von disjunkten Lebesgue-messbaren Mengen zu wählen). Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^T u_n(t)\,dt - \int_0^T u_m(t)\,dt \right\|_X \\
= & \left\| \sum_{i=1}^{k(m,n)} x_i \lambda(A_i) - \sum_{i=1}^{k(m,n)} y_i \lambda(A_i) \right\|_X \\
= & \left\| \sum_{i=1}^{k(m,n)} (x_i - y_i) \lambda(A_i) \right\|_X \\
\leq & \sum_{i=1}^{k(m,n)} \|x_i - y_i\|_X \lambda(A_i) \\
= & \int_0^T \|u_n(t) - u_m(t)\|_X\,dt \\
\leq & \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X\,dt + \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|_X\,dt \\
\to & \ 0 \text{ wenn } n, m \to \infty
\end{aligned}$$

nach (4.2).
Die Folge $(\int_0^T u_n(t)\,dt)_n$ ist demnach eine Cauchy-Folge in X, und da X vollständig, ist $(\int_0^T u_n(t)\,dt)_n$ konvergent in X.

3.) Die Definition des Bochner-Integrals hängt nicht von der spezifisch gewählten Folge $(u_n)_n$ von einfachen Funktionen an. In der Tat: sei $(\tilde{u}_n)_n$ eine weitere Folge von einfachen Funktionen, die punktweise fast überall auf $[0,T]$ gegen u konvergieren und so, dass $\int_0^T \|\tilde{u}_n(t) - u(t)\|_X\,dt \to 0$ für $n \to \infty$.
Dann ist auch die „gemischte" Funktionenfolge $(v_n)_n$ definiert durch

$$v_{2n} = u_n,\ v_{2n+1} = \tilde{u}_n, \qquad \forall n \in N,$$

eine Folge von einfachen Funktionen, die punktweise fast überall auf $[0,T]$ gegen u

konvergiert und für die (4.2) gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \|v_n(t)-u(t)\|_X\,dt = 0.$$

In 2.) haben wir aber gesehen, dass dann

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T v_n(t)\,dt$$

in X existiert. Dann konvergieren aber auch sämtliche Teilfolgen gegen ein und denselben Grenzwert, insbesondere also

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^T \tilde{u}_n(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^T v_{2n+1}(t)\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^T v_{2n}(t)\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^T u_n(t)\,dt \\ &= \int_0^T u(t)\,dt,\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

4.) Im Fall $X=\mathbb{R}$ fallen die Begriffe des Bochner-Integrals und des Lebesgue-Integrals zusammen.

Satz 4.2 (Bochner)
Sei $(X,\|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Eine stark messbare Funktion $u:[0,T]\to X$ ist Bochner-integrabel genau dann, wenn die Funktion $\|u(\cdot)\|_X$ Lebesgue-integrierbar auf $[0,T]$, d.h. wenn $\int_0^T \|u(t)\|_X\,dt<\infty$.

Beweis:
$\Rightarrow$: Da u Bochner-integrabel, existiert eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [0,T]\to X$ so, dass $u_n(t)\to u(t)$ in X für fast alle $t\in[0,T]$ und $\lim_{n\to\infty}\int_0^T \|u(t)-u_n(t)\|_X = 0$.
Wir haben bereits gesehen, dass dann die Folge der einfachen Lebesgue-messbaren reellwertigen Funktionen $\|u_n(\cdot)\|_X$ punktweise fast überall auf $[0,T]$ gegen $\|u(\cdot)\|_X$ konvergiert und die Funktion $\|u(\cdot)\|_X$ daher Lebesgue-messbar ist. Nach dem Lemma von Fatou ist ausserdem

$$\int_0^T \|u(t)\|_X\,dt \le \liminf_{n\to\infty}\|u_n(t)\|_X\,dt. \tag{4.4}$$

Da

$$\begin{aligned}
& \left|\int_0^T \|u_n(t)\|_X\,dt - \int_0^T \|u_m(t)\|_X\,dt\right| \\
\leq\ & \int_0^T \left|\|u_n(t)\|_X - \|u_m\|_X\right| dt \\
\leq\ & \int_0^T \|u_n(t) - u_m(t)\|_X\,dt \\
\leq\ & \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X\,dt + \int_0^T \|u(t) - u_m(t)\|_X\,dt \\
\to\ & 0 \qquad \text{wenn } m,n \to \infty,
\end{aligned}$$

ist die Folge $(\int_0^T \|u_n(t)\|_X\,dt)_n$ eine Cauchfolge in $\mathbb{R}$, und somit insbesondere beschränkt in $\mathbb{R}$. Wegen (4.4) folgt somit, dass $\int_0^T \|u(t)\|_X\,dt < \infty$.

$\Leftarrow$ Da u stark messbar, existiert eine Folge von einfachen Funktionen $u_n : [0,T] \to X$ so, dass $u_n(t) \to u(t)$ in X für fast alle $t \in [0,T]$.
Ausgehend von dieser Folge $(u_n)_n$ konstruieren wir nun eine Folge:

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t) & \text{, falls } \|u_n(t)\|_X \leq 2\|u(t)\|_X \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Es ist klar, dass die Funktionen v_n wieder einfach sind und ausserdem $v_n(t) \to u(t)$ in X für fast alle $t \in [0,T]$. Es gilt somit

$$\|v_n(t) - u(t)\|_X \to 0 \qquad \text{für fast alle } t \in [0,T].$$

Ausserdem folgt aus der Konstruktion der v_n

$$\begin{aligned}
\|v_n(t) - u(t)\|_X &\leq \|v_n(t)\|_X + \|u(t)\|_X \\
&\leq 3\|u(t)\|_X
\end{aligned}$$

fast überall auf $[0,T]$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\|u(\cdot)\|_X \in L^1(0,T)$ nach Voraussetzung, folgt somit mit dem Lebesgue'schen Satz von der majorisierten Konvergenz, dass

$$\int_0^T \|v_n(t) - u(t)\|_X\,dt \to 0.$$

Damit ist gezeigt, dass u Bochner-integrierbar. □

Der folgende Satz enthält einige wichtige Eigenschaften des Bochner-Integrals.

Satz 4.3
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $T > 0$, $u : [0,T] \to X$ Bochner-integrierbar. Dann gilt:

(i) $\left\|\int_0^T u(t)\,dt\right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X\,dt$

(ii) Wenn $A : X \to Y$ ein linearer, beschränkter Operator, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer Banachraum, dann ist auch die Funktion

$$\begin{aligned} Au : \quad [0,T] &\to Y \\ t &\mapsto A(u(t)) \end{aligned}$$

Bochner-integrierbar und

$$A\left(\int_0^T u(t)\,dt\right) = \int_0^T Au(t)\,dt.$$

Insbesondere ist für alle $f \in X'$ die Funktion $t \in [0,T] \mapsto < f, u(t) >_{X',X}$ Lebesgue-integrierbar und

$$< f, \int_0^T u(t)\,dt >_{X',X} = \int_0^T < f, u(t) >_{X',X}\ dt.$$

Beweis:
(i) Die Ungleichung gilt offensichtlich für einfache Funktionen $u = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$:

$$\begin{aligned} \left\|\int_0^T u(t)\,dt\right\|_X &= \left\|\sum_{i=1}^n x_i \lambda(A_i)\right\|_X \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|_X \lambda(A_i) \\ &= \int_0^T \|u(t)\|_X\,dt. \end{aligned}$$

Sei nun $u : [0,T] \to X$ eine beliebige Bochner-integrierbare Funktion. Dann existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(v_n)_n$ mit folgenden Eigenschaften (vgl. Beweis des Satzes von Bochner)

$$v_n(t) \to u(t) \qquad \text{in } X, \text{ für fast alle } t \in [0,T],$$

$$\int_0^T \|v_n(t) - u(t)\|_X\,dt \to 0, \qquad \int_0^T v_n(t)\,dt \to \int_0^T u(t)\,dt \qquad \text{in } X,$$

und

$$\|v_n(t)\|_X \leq 2\|u(t)\|_X \qquad \text{fast überall auf } [0,T],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

so dass nach dem Lebesgue'schen Satz von der majorisierten Konvergenz auch

$$\int_0^T \|v_n(t)\|_X\,dt \to \int_0^T \|u(t)\|_X\,dt \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^T u(t)\,dt \right\|_X &= \lim_{n\to\infty} \left\| \int_0^T v_n(t)\,dt \right\|_X \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|v_n(t)\|_X\,dt \\
&= \int_0^T \|u(t)\|_X\,dt.
\end{aligned}$$

(ii) Da $A : X \to Y$ beschränkt, existiert $M > 0$ so, dass

$$\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Da u Bochner-integrierbar, existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(u_n)_n$ mit

$$u_n(t) \to u(t) \qquad \text{in } X, \text{ für fast alle } t \in [0,T], \tag{4.5}$$

$$\int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X\,dt \to 0, \qquad \int_0^T u_n(t)\,dt \to \int_0^T u(t)\,dt \qquad \text{in } X. \tag{4.6}$$

Es ist klar, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\begin{aligned} Au_n : \ & [0,T] \to Y \\ & t \mapsto A(u_n(t)) \end{aligned}$$

einfache Funktionen sind. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned}
\|Au(t) - Au_n(t)\|_Y &= \|A(u(t) - u_n(t))\|_Y \\
&\leq M\|u(t) - u_n(t)\|_X \\
&\to 0 \qquad \text{(nach (4.5))}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

für $n \to \infty$, für fast alle $t \in [0,T]$.
Es folgt, dass die Funktion Au stark messbar ist. Durch Integration der Ungleichung (4.7) über $[0,T]$ erhalten wir ausserdem, dass

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|Au(t) - Au_n(t)\|_Y\,dt &\leq M \int_0^T \|u(t) - u_n(t)\|_X \\
&\to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,
\end{aligned}$$

und somit folgt, dass die Funktion Au Bochner-integrierbar ist.
Nach Definition des Bochner-Integrals und mit u_n von der Form $u_n(t) = \sum_{i=1}^{k(n)} x_i^{(n)} \chi_{A_i^{(n)}}$ ist dann

$$\begin{aligned}
\int_0^T Au(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T Au_n(t)\,dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} Ax_i^{(n)} \lambda(A_i^{(n)}) \\
&= \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{i=1}^{k(n)} x_i^{(n)} \lambda(A_i^{(n)}) \right) \qquad \text{(da } A \text{ linear)} \\
&= \lim_{n\to\infty} A\left(\int_0^T u_n(t)\,dt \right) \\
&= A\left(\int_0^T u(t)\,dt \right)
\end{aligned}$$

wegen (4.6) und weil $A : X \to Y$ stetig ist. $\square$

Problematisch in der Anwendung ist oft der Nachweis der Messbarkeit einer vorliegenden Funktion. Versucht man etwa eine Lösung einer PDE mit Hilfe von Approximationsmethoden zu konstruieren, so passiert es häufig, dass die Lösungen der Näherungsgleichungen nur in einem gewissen schwachen Sinne gegen eine Grenzfunktion konvergieren (dies haben wir im elliptischen Fall bei der Anwendung des Galerkin-Verfahrens ja bereits gesehen). Somit stellt sich die Frage, ob der schwache Limes einer Folge von stark messbaren Funktionen wieder stark messbar ist. Dies gilt in dieser Allgemeinheit leider nicht. Der schwache Limes ist im allgemeinen nur „schwach messbar" im folgenden Sinne:

Definition 4.3
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $T > 0$.
Eine Funktion $u : [0,T] \to X$ heisst *schwach messbar*, wenn für jedes $f \in X'$ die Funktion

$$t \in [0,T] \mapsto < f, u(t) >_{X',X}$$

Lebesgue-messbar ist.

Bemerkung: Eine stark messbare Funktion ist offensichtlich schwach messbar (vgl. Beginn des Beweises von Satz 4.3 (ii): Messbarkeit von Au).
Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

Wichtig für unsere Anwendungen ist

Satz 4.4 (Dunford-Pettis)
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein separabler Banachraum. Für eine Funktion $u : [0,T] \to X$ gilt dann:

u ist stark messbar $\Leftrightarrow$ u ist schwach messbar.

Bemerkung: Tatsächlich ist der Satz von Dunford-Pettis allgemeiner als die oben formulierte Version, die aber für unsere Zwecke völlig ausreicht. Tatsächlich gilt nach Dunford-Pettis in einem **beliebigen** Banachraum für eine Funktion $u : [0,T] \to X$ die Äquivalenz:

u ist stark messbar $\Leftrightarrow$ u ist schwach messbar und der wesentliche Wertebereich von u ist separabel [2].
Da wir ohnehin meist nur in separablen Banachräumen arbeiten, benötigen wir den Satz von Dunford-Pettis aber nicht in seiner vollen Stärke.

Mit Hilfe des Satzes von Dunford-Pettis können wir nun die eingangs gestellte Frage, ob ein schwacher Limes einer Folge stark messbarer Funktionen wieder stark messbar ist zumindestens im Fall eines separablen Banachraumes positiv beantworten. Eine

[2] d.h. es existiert eine Lebesgue-Nullmenge $S \subset [0,T]$ so, dass das Bild $u([0,T] \setminus S)$ separabel ist

direkte Konsequenz des Satzes von Dunford-Pettis ist nämlich

Korollar 4.2
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein separabler Banachraum, $T > 0$. Falls $(u_n)_n$ eine Folge stark messbarer Funktionen $u_n : [0,T] \to X$ und $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ schwach in X für fast alle $t \in [0,T]$, dann ist die Grenzfunktion $u : [0,T] \to X$ stark messbar.

Für Bochner-integrierbare Funktionen gelten entsprechende Varianten der bekannten Sätze von Lebesgue, Fatou, Fubini, ... Diese werden zum Teil in der Übung vorgestellt und bewiesen.
Wir können nun die Lebesgue-Räume Banachraum-wertiger Funktionen definieren.

Definition 4.4
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $T > 0$.

1) Für $1 \le p < \infty$ bezeichnet $L^p(0,T;X)$ den linearen Raum aller (Äquivalenzklassen von fast überall übereinstimmenden) Bochner-messbaren Funktionen $u : [0,T] \to X$, für die gilt

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < +\infty.$$

Die Abbildung

$$f \in L^p(0,T;X) \mapsto \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}$$

definiert eine Norm auf $L^p(0,T;X)$.
Ausgestattet mit dieser Norm ist $L^p(0,T;X)$ ein Banachraum.

2) Für $p = \infty$ bezeichnet $L^\infty(0,T;X)$ den linearen Raum aller (Äquivalenzklassen von fast überall übereinstimmenden) Bochner-messbaren Funktionen $u : [0,T] \to X$, die wesentlich beschränkt sind, d.h. für die $M > 0$ und eine Lebesgue-Nullmenge $N \subset [0,T]$ existieren, so dass

$$\sup_{t \in [0,T] \setminus N} \|u(t)\|_X \le M.$$

Die Abbildung

$$f \in L^\infty(0,T;X) \mapsto \inf_{\substack{N \subset [0,T] \\ \lambda(N)=0}} \sup_{t \in [0,T] \setminus N} \|u(t)\|_X$$

definiert eine Norm, unter der $L^\infty(0,T;X)$ vollständig ist.

Im folgenden Satz fassen wir die wichtigsten Eigenschaften der abstrakten Lebesgueräume zusammen.

Satz 4.5
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $T > 0$.

(i) Die Menge der einfachen Funktionen ist dicht in $L^p(0,T;X)$ für $1 \leq p < \infty$.

(ii) Für $1 \leq p < \infty$ gilt: $C([0,T];X) \hookrightarrow_d L^p(0,T;X)$.
Für $p = \infty$ ist nur $C([0,T];X) \hookrightarrow L^\infty(0,T;X)$, aber nicht dicht.

(iii) Falls X ein separabler Banachraum, dann ist $L^p(0,T;X)$ separabel für alle $1 \leq p < \infty$.

(iv) Wenn $f \in L^{p'}(0,T;X')$ und $u \in L^p(0,T;X)$, dann ist die Funktion

$$t \in [0,T] \mapsto < f(t), u(t) >_{X',X}$$

Lebesgue-integrierbar und es gilt die *Hölder'sche Ungleichung*

$$\int_0^T | < f(t), u(t) >_{X',X} | \, dt \leq \|f\|_{L^{p'}(0,T;X)} \|u\|_{L^p(0,T;X)}$$

(v) Falls X reflexiv oder X' separabel und $1 < p < \infty$, dann besitzt jedes $f \in (L^p(0,T;X))'$ die Darstellung

$$< f, u >_{(L^p(0,T;X))', L^p(0,T;X)} = \int_0^T < \overline{f}(t), u(t) >_{X',X} \, dt$$

für ein $\overline{f} \in L^{p'}(0,T;X')$. Die Abbildung $f \in (L^p(0,T;X))' \mapsto \overline{f} \in L^{p'}(0,T;X')$ ist linear und isometrisch:

$$\|f\|_{(L^p(0,T;X))'} = \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;X')} \qquad \forall f \in (L^p(0,T;X))'$$

und somit kann $(L^p(0,T;X))'$ mit $L^{p'}(0,T;X')$ identifiziert werden:

$$(L^p(0,T;X))' \cong L^{p'}(0,T;X')$$

Falls X reflexiv und $1 < p < \infty$, dann ist $L^p(0,T;X)$ reflexiv.

Falls $p = 1$, X reflexiv oder X' separabel, dann gilt eine analoge Darstellung für den Dualraum:

$$\big(L^1(0,T;X)\big)' \cong L^\infty(0,T;X')$$

(vi) Falls $X = H$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_H$ und $p = 2$, dann definiert

$$(f,g)_{L^2(0,T;H)} := \int_0^T (f(t), g(t))_H \, dt, \qquad \text{für } f, g \in L^2(0,T;H)$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(0,T;H)$, das die $\|\cdot\|_{L^2(0,T;H)}$-Norm erzeugt.
$(L^2(0,T;H), (\cdot,\cdot)_{L^2(0,T;H)})$ ist demnach ein Hilbertraum.

(vii) Falls $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer Banachraum, $X \hookrightarrow Y$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$, dann gilt

$$L^q(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y).$$

Beweis:
(i) Sei $u \in L^p(0,T;X)$. Dann ist u insbesondere Bochner-messbar. Somit existiert eine Folge von einfachen Funktionen $(u_n)_n$ mit

$$u_n(t) \to u(t) \qquad \text{für fast alle } t \in [0,T].$$

Wie bereits mehrfach gesehen konvergiert dann auch die Folge der einfachen Funktionen $(v_n)_n$ definiert durch

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t), & \text{falls } \|u_n(t)\|_X \leq 2\|u(t)\|_X \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

punktweise fast überall gegen $u(t)$ auf $[0,T]$. Ausserdem ist

$$\|u(t) - v_n(t)\|_X^p \quad \leq \quad (3\|u(t)\|_X)^p \text{ für fast alle } t \in [0,T], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Da $\|u(\cdot)\|_X^p \in L^1(0,T)$ nach Voraussetzung, folgt mit Lebesgue's dominierten Konvergenzsatz, dass

$$\int_0^T \|u(t) - v_n(t)\|_X^p \, dt \to 0,$$

d.h. $(v_n)_n$ konvergiert in $L^p(0,T;X)$ gegen u, und somit folgt die Behauptung.

(ii) wird in der Übung besprochen

(iii) folgt aus (ii) mit Korollar 4.1

(iv) Da f und u Bochner-messbar, existieren einfache Funktionen $f_n : [0,T] \to X'$ bzw. $u_n : [0,T] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, die punktweise fast überall auf $[0,T]$ gegen $f(t)$ in X' bzw. $u(t)$ in X konvergieren. Damit folgt aber, dass die einfachen reellwertigen Funktionen $< f_n(\cdot), u_n(\cdot) >_{X',X}$ fast überall auf $[0,T]$ gegen $< f(\cdot), u(\cdot) >_{X',X}$ konvergieren. Somit ist die Funktion $< f(\cdot), u(\cdot) >_{X',X}$ Lebesgue-messbar. Mit Hilfe der Hölder'schen Ungleichung für reellwertige Lebesgue-integrierbare Funktionen folgt dann

$$\begin{aligned} \int_0^T | < f(t), u(t) >_{X',X} | \, dt &\leq \int_0^T \|f(t)\|_{X'} \|u(t)\|_X \, dt \\ &\leq \left(\int_0^T \|f(t)\|_{X'}^{p'} \, dt \right)^{1/p'} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

(v) Der Beweis ist sehr technisch und kann unter anderem in: H.Gajewski, K.Gröger, K. Zacharias „Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen" (Beweis im Fall X reflexiv und separabel) oder R.E.Edwards „Functional Analysis" nachgelesen werden.

(vi) Aus (iv) und dem Riesz'schen Darstellungssatz folgt, dass die Funktion $t \in [0,T] \mapsto (f(t), g(t))_H$ Lebesgue-integrierbar ist. Dass $(\cdot,\cdot)_{L^2(0,T;H)}$ ein Skalarprodukt definiert, dass ausserdem mit der $\|\cdot\|_{L^2(0,T;H)}$-Norm kompatibel ist, ist leicht einzusehen.

(vii) Sei $u \in L^q(0,T;X)$. Nach Definition des Raumes ist dann $\|u(\cdot)\|_X \in L^q(0,T)$. Aus der Hölder'schen Ungleichung für reelle Lebesgue-messbare Funktionen folgt

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \leq T^{1-p/q} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^q \, dt \right)^{p/q},$$

d.h. aber $u \in L^p(0,T;X)$ und die identische Abbildung von $L^q(0,T;X)$ nach $L^p(0,T;X)$ ist stetig, also $L^q(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;X)$.
Da $X \hookrightarrow Y$, gibt es eine stetige, lineare und injektive Abbildung $i : X \to Y$. Da i stetig, existiert eine Konstante $M > 0$ so, dass $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ für alle $x \in X$. Nach Satz 4.3 (ii) ist dann auch die Funktion $i(u)$ definiert durch $i(u)(t) := i(u(t))$, $t \in [0,T]$, Bochner-integrierbar über $[0,T]$, und es gilt

$$\int_0^T \|i(u)(t)\|_Y^p \, dt \quad \leq \quad M^p \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \qquad \forall u \in L^p(0,T;X).$$

Die lineare und injektive Abbildung

$$\begin{array}{rll} i: & L^p(0,T;X) & \to L^p(0,T;Y) \\ & u & \mapsto i(u) \end{array}$$

ist somit stetig, und daher ist auch $L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y)$. Es folgt die Behauptung. □

Bevor wir uns dem Studium der Operator-Differentialgleichungen zuwenden können, müssen wir uns noch einmal mit der Frage der Differenzierbarkeit von vektorwertigen Funktionen beschäftigen.
Aus der reellen Analysis sind uns bekannt

* der klassische Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

  für stetig differenzierbare Funktionen $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

  $$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t) \, dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

* der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral

  wenn $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig ist, dann ist u fast überall differenzierbar auf $[a,b]$, $u' \in L^1(a,b)$ und

  $$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t) \, dt \qquad \forall x \in [a,b].$$

Eine Verallgemeinerung des klassischen Haupsatzes gilt auch für vektorwertige Funktionen:

Lemma 4.1
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $T > 0$. Sei $u \in C^1([0,T];X)$. Dann gilt:

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\sigma) \, d\sigma \qquad \text{für alle } 0 \leq t \leq T.$$

Beweis:
Wir bemerken zunächst, dass aus der starken Differenzierbarkeit von u sofort die Differenzierbarkeit der reellwertigen Funktion $t \in [0,T] \mapsto < f, u(t) >_{X',X}$ für alle $f \in X'$ sowie die Identität

$$\frac{d}{dt} < f, u(t) >_{X',X} = < f, u'(t) >_{X',X} \qquad \forall t \in [0,T]$$

folgt. Daher gilt, für alle $0 \le s \le t \le T$,

$$\begin{aligned} |< f, u(t) - u(s) >_{X',X} | &= |< f, u(t) >_{X',X} - < f, u(s) >_{X',X} | \\ &\le |t-s| \sup_{\sigma\in[s,t]} \frac{d}{d\sigma} | < f, u(\sigma) >_{X',X} | \\ &= |t-s| \sup_{\sigma\in[s,t]} | < f, u'(\sigma) >_{X',X} | \\ &\le |t-s| \|f\|_{X'} \sup_{\sigma\in[s,t]} \|u'(\sigma)\|_X. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\|_X &= \sup_{\substack{f\in X' \\ \|f\|_{X'}\le 1}} | < f, u(t) - u(s) >_{X',X} \\ &\le |t-s| \sup_{\sigma\in[s,t]} \|u'(\sigma)\|_X \\ &\le |t-s| \max_{\sigma\in[0,T]} \|u'(\sigma)\|_X. \end{aligned}$$

Aus der starken Differenzierbarkeit von u und obiger Abschätzung folgt dann mit dem Lebesgue'schen Satz der majorisierten Konvergenz

$$\frac{u(\cdot + h) - u(\cdot)}{h} \to u'(\cdot) \qquad \text{in } L^1(0,T;X) \quad \text{für } h \to 0.$$

Somit ist für $0 \le t < T$

$$\begin{aligned} \int_0^t u'(s)\,ds &= \lim_{h\to 0^+} \int_0^t \frac{u(s+h) - u(s)}{h}\,ds \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^t u(s+h)\,ds - \int_0^t u(s)\,ds \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_h^{t+h} u(s)\,ds - \int_0^t u(s)\,ds \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)\,ds - \frac{1}{h} \int_0^h u(s)\,ds \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} (u(s) - u(t))\,ds - \frac{1}{h} \int_0^h (u(s) - u(0))\,ds \right) + (u(t) - u(0)) \\ &= u(t) - u(0) \end{aligned}$$

wie leicht aus der Stetigkeit von u auf $[0,T]$ folgt. Da $u \in C^1([0,T];X)$, folgt durch Übergang zum Limes mit $t \to T^-$ in der Identität

$$\int_0^t u'(s)\,ds = u(t) - u(0),$$

dass diese auch noch gilt für $t = T$. $\square$

Der verallgemeinerte Hauptsatz für Lebesgue-Integrale ist dagegen nicht - ohne zusätzliche Voraussetzungen an den Banachraum X zu stellen - auf Bochner-Integrale übertragbar.

Der Begriff der absoluten Stetigkeit lässt sich allerdings ohne weiteres auf vektorwertige Funktionen erweitern:

Definition 4.5
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $T > 0$. Eine Funktion $u : [0, T] \to X$ heisst *absolut stetig*, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \|u(b_k) - u(a_k)\|_X < \epsilon$$

für alle endlichen Familien von paarweise disjunkten Intervallen $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ mit $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$.

Bemerkungen:

1.) Es gelten offensichtlich die uns im Fall $X = \mathbb{R}$ schon bekannten Implikationen:

u Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ u absolut stetig $\Rightarrow$ u stetig

2.) Im Gegensatz zum Fall $X = \mathbb{R}$ sind absolut stetige vektorwertige Funktionen aber im allgemeinen nicht fast überall differenzierbar.

Beispiele:

1.) Es sei $X = L^1(0, 1)$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} u : \ & (0,1) && \to X \\ & t && \mapsto \chi_{[0,t]} \end{aligned}$$

absolut stetig, da für jedes $\epsilon > 0$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \|u(b_k) - u(a_k)\|_{L^1(0,1)} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 |\chi_{[0,b_k]}(x) - \chi_{[0,a_k]}(x)|\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} 1\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

für jede endliche Familie von paarweise disjunkten Intervallen $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ mit $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta := \epsilon$.
Allerdings ist u in keinem Punkt $t \in [0, 1]$ stark differenzierbar. In der Tat ist für beliebiges $t, t + h \in [0, T]$, $h > 0$ (der Fall $h < 0$ geht analog):

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\|_{L^1(0,1)} &= \frac{1}{h} \int_0^1 |\chi_{[0,t+h]}(x) - \chi_{[0,t]}(x)|\, dx \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} 1\, dx. \\ &= 1, \end{aligned}$$

Ein Element $w \in L^1(0,1)$ kann also nur dann starke Ableitung von u in t sein, wenn $\|w\|_{L^1(0,1)} = 1$.

Andererseits ist aber

$$\frac{u(t+h)(x) - u(t)(x)}{h} \quad = \quad \begin{cases} 0 & , \text{ falls } 0 < x < t \text{ oder } t+h < x < 1 \\ \frac{1}{h} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

und somit

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \to 0 \qquad \text{punktweise fast überall auf } (0,1) \text{ für } h \to 0.$$

Es müsste also für die starke Ableitung einerseits gelten $w = 0$ fast überall auf $(0,1)$ und andererseits $\|w\|_{L^1(0,1)} = 1$. Widerspruch! □

2.) Sei $X = c_0(\mathbb{N})$, der Raum aller beschränkten reellen Zahlenfolgen $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ausgestattet mit der Supremums-Norm. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} u: \quad [0,1] \quad &\to c_0(\mathbb{N}) \\ t \quad &\mapsto \left(\frac{\exp(itn)}{n}\right)_n \end{aligned}$$

absolut stetig, aber in keinem Punkt $t \in [0,1]$ stark differenzierbar (Beweis als Übung).

In reflexiven Banachräumen allerdings gilt ein Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralsatzes für Bochner-Integrale:

Satz 4.6 (Komura)
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum, $T > 0$ und $u : [0,T] \to X$ absolut stetig. Dann ist u fast überall in $(0,T)$ stark differenzierbar, u' ist Bochner-integrierbar und

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\, ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man beispielsweise in H. Brézis, „Opérateurs maximaux monotones".

Ohne Einschränkungen an den Banachraum X gilt aber stets:

Satz 4.7
Sei $u \in L^1(0,T;X)$. Dann ist die Funktion

$$v(t) := \int_0^t u(s)\,ds, \qquad t \in [0,T]$$

absolut stetig, fast überall stark differenzierbar auf $[0,T]$ und

$$v'(t) = u(t) \qquad \text{fast überall auf } [0,T].$$

Insbesondere ist v stark differenzierbar in jedem Stetigkeitspunkt von u. Falls also $u \in C([0,T];X)$, dann ist $v \in C^1([0,T];X)$.

Beweis:
Falls u stetig in einem Punkt $t \in [0,T]$, dann existiert für beliebiges $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $\|u(s)-u(t)\|_X < \epsilon$ für alle $s \in [0,T]$ mit $|s-t| < \delta$. Es folgt, dass für $|h| < \delta$ mit $t+h \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - u(t)\right\|_X &\leq \frac{1}{h}\int_{\min t,t+h}^{\max t,t+h} \|u(s)-u(t)\|_X\,ds \\ &\leq \epsilon,\end{aligned}$$

und somit ist v stark differenzierbar in t mit $v'(t) = u(t)$.
Falls u nur Bochner-integrabel, dann folgt die Absolutstetigkeit von v aus der Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} \|u(b_k) - u(a_k)\|_X \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \|u(s)\|_X\,ds$$

für endliche Familien paarweiser disjunkter Intervalle $(a_k,b_k)_{k=1\ldots n} \subset [0,T]$ in Kombination mit der absoluten Stetigkeit des Lebesgue'schen Integrals der reellwertigen Funktion $\|u(\cdot)\|_X$.
Wie oben gilt für $t, t+h \in [0,T]$

$$\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - u(t)\right\|_X \leq \frac{1}{h}\int_{\min t,t+h}^{\max t,t+h} \|u(s)-u(t)\|_X\,ds.$$

Für Bochner-integrierbare Funktionen gilt aber genauso wie für Lebesgue-integrierbare Funktionen (Fall $X = \mathbb{R}$), dass obiges Integral auf der rechten Seite für fast alle $t \in [0,T]$ gegen 0 konvergiert (die Punkte, in denen das der Fall ist, sind gerade die sog. „Lebesguepunkte“ der Funktion u). Tatsächlich kann die Konvergenz im vektorwertigen Fall sogar auf die entsprechende Konvergenz für Lebesgue-integrierbare Funktionen im reellen Fall zurückgeführt werden (siehe etwa J. Diestel, J.J. Uhl „Vector measures“, S.49).

□

4.2 Unendlich-dimensionale Versionen des Satzes von Picard-Lindelöf

Wie eingangs erwähnt, kann man oft die Existenz einer Lösung einer Operator-Differentialgleichung $u'(t) + Au(t) = f(t)$, $t \in (0,T)$ für einen unbeschränkten, unstetigen Operator $A : D(A) \subset X \to X$ mit Hilfe einer Regularisierungsmethode nachweisen. Hierbei approximiert man den Operator A durch eine Folge von „glatten“, etwa Lipschitz-stetigen, Operatoren A_λ und untersucht im Anschluss die Konvergenz der Näherungslösungen. Die Existenz „Näherungslösungen“ für einen solchen Lipschitz-stetigen Operator ist durch die folgenden „unendlich-dimensionalen“ Erweiterungen des klassischen Satzes von Picard-Lindelöf gewährleistet.

Satz 4.8 (Picard-Lindelöf, lokal)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $T, r > 0$, $u_0 \in X$ und $g : [0,T] \times \overline{B_r(u_0)} \to X$ eine stetige Abbildung, die Lipschitz-stetig bzgl. der 2. Variablen ist, d.h. es existiert $L > 0$ so, dass

$$\|g(t,y) - g(t,z)\|_X \leq L\|y - z\|_X \qquad \forall t \in [0,T], \forall y, z \in \overline{B_r(u_0)}.$$

Dann existiert ein $0 < \alpha \leq T$, so dass das Anfangswertproblem

$$\text{(AWP)} \qquad \begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)) & , t \in (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

genau eine klassische Lösung u auf $[0,\alpha]$ besitzt, d.h. es existiert genau eine Funktion $u \in C^1([0,\alpha]; X)$ mit $u(0) = u_0$ und so, dass $u'(t) = g(t, u(t))$ für alle $t \in [0,\alpha]$.

Beweis:
Wir bemerken zunächst, dass u klassische Lösung von (AWP) auf einem Intervall $[0,\alpha]$ genau dann, wenn

$$(*) \qquad \begin{cases} u \in C([0,\alpha], X) \text{ und} \\ u(t) = u_0 + \int_0^t g(s, u(s))\, ds \qquad \forall t \in [0,\alpha]. \end{cases}$$

Erfüllt nämlich u (*), dann ist $u \in C^1([0,\alpha]; X)$ und $u'(t) = g(t, u(t))$ für alle $t \in [0,\alpha]$ nach Satz 4.7. Die Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ gilt nach Definition des Bochner-Integrals ebenfalls. Umgekehrt gilt: ist $u \in C^1([0,\alpha]; X)$ eine klassische Lösung von (AWP), dann sind $u', g(\cdot, u(\cdot)) \in C([0,\alpha]; X)$, somit Bochner-integrierbar und mit Lemma 4.1 folgt die Integralgleichung (*).

Der Rest des Beweises verläuft nun ganz ähnlich wie der Beweis der entsprechenden endlich-dimensionalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf.
Wir bemerken, dass die Abbildung g auf $[0,T] \times \overline{B_r(u_0)}$ beschränkt ist: für alle $t \in [0,T]$, $v \in \overline{B_r(u_0)}$ ist

$$\begin{aligned} \|g(t,v)\|_X &\leq \|g(t,u_0) - g(t,v)\|_X + \|g(t,u_0)\|_X \\ &\leq L\|u_0 - v\|_X + \sup_{t\in[0,T]} \|g(t,u_0)\|_X \\ &\leq Lr + \sup_{t\in[0,T]} \|g(t,u_0)\|_X \\ &=: M \end{aligned}$$

und $M < \infty$, da die stetige Funktion $t \mapsto g(t, u_0)$ auf $[0,T]$ beschränkt ist.

<u>**Bemerkung:**</u> Achtung! Im Gegensatz zum endlich-dimensionalen Fall folgt die Beschränktheit von g hier nicht allein aus der Stetigkeit von g auf $[0,T] \times \overline{B_r(u_0)}$ (vgl. Beispiel 7.1.7 in E. Emmrich, „Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen“).

Wir definieren nun

$$\alpha := \min\{\frac{1}{2L}, \frac{r}{M}\}$$

sowie

$$E := \{u \in C([0,\alpha];X); \|u(t) - u_0\|_X \leq r \quad \forall t \in [0,\alpha]\}.$$

Offensichtlich ist E eine abgeschlossene, nicht-leere Teilmenge des Banachraumes $(C([0,\alpha];X), |\|\cdot\||_\infty)$.
Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{array}{rll} \Phi: & E & \to E \\ & u & \mapsto \{t \in [0,\alpha] \mapsto u_0 + \int_0^t g(s,u(s))\,ds\}. \end{array}$$

Φ ist wohldefiniert: in der Tat ist für $u \in C([0,\alpha];X)$ auch die Komposition mit der stetigen Funktion g: $s \in [0,\alpha] \mapsto g(s,u(s))$ wieder stetig und somit ist $\Phi(u) \in C([0,\alpha];X)$ (ja sogar ein Element aus $C^1([0,\alpha];X)$ (s. Satz 4.7)). Ausserdem ist für alle $u \in E$, $t \in [0,\alpha]$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(t) - u_0\|_X &= \left\| \int_0^t g(s,u(s))\,ds \right\|_X \\ &\leq \int_0^t \|g(s,u(s))\|_X\,ds \\ &\leq M\alpha \\ &\leq r \end{aligned}$$

nach Wahl von α. Also ist $\Phi(u) \in E$ für alle $u \in E$.
Weiter gilt für alle $u, v \in E$, $t \in [0,\alpha]$

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_X &= \left\| \int_0^t g(s,u(s)) - g(s,v(s))\,ds \right\|_X \\ &\leq \int_0^t \|g(s,u(s)) - g(s,v(s))\|_X\,ds \\ &\leq \int_0^t L\|u(s) - v(s)\|_X\,ds \\ &\leq \int_0^t L|\|u - v\||_\infty\,ds \\ &\leq \alpha L|\|u - v\||_\infty \\ &\leq \frac{1}{2}|\|u - v\||_\infty. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite der obigen Ungleichung unabhängig von t ist, folgt nun sofort

$$|\|\Phi(u) - \Phi(v)\||_\infty \leq \frac{1}{2}|\|u - v\||_\infty,$$

und somit ist $\Phi : E \to E$ eine strikte Kontraktion. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt damit die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes $u \in E$ der Abbildung Φ, d.h. aber gerade die Existenz und Eindeutigkeit einer klassischen Lösung $u \in C^1([0,\alpha];X)$ von (AWP). □

Satz 4.9 (Picard-Lindelöf, global)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $T > 0$, und $g : [0,T] \times X \to X$ eine stetige Abbildung, die global Lipschitz-stetig bzgl. der 2. Variablen ist, d.h. es existiert $L > 0$ so, dass

$$\|g(t,y) - g(t,z)\|_X \leq L\|y - z\|_X \qquad \forall t \in [0,T], \forall y, z \in X.$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\text{(AWP)} \qquad \begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)) & , t \in (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

zu jedem Anfangswert $u_0 \in X$ genau eine klassische Lösung u auf $[0,T]$.

Beweis:
Der Beweis ähnelt dem Beweis der lokalen Version: wir bemerken wieder zunächst, dass die Existenz und Eindeutigkeit einer klassischen Lösung von (AWP) zum Anfangswert $u_0 \in X$ äquivalent zur Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes einer geeigneten Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \ & C([0,T];X) && \to C([0,T];X) \\ & u && \mapsto \{t \in [0,T] \mapsto u_0 + \textstyle\int_0^t g(s,u(s))\,ds\} \end{aligned}$$

ist. Ausgestattet mit der gewichteten Maximumsnorm

$$|||u|||_{w,\infty} := \max_{t \in [0,T]} e^{-Lt}\|u(t)\|_X, \qquad u \in C([0,T];X)$$

ist $C([0,T];X)$ ein Banachraum. Bezüglich der gewichteten Maximumsnorm ist Φ auch eine strikte Kontraktion, denn für alle $u, v \in C([0,T];X)$ gilt:

$$\begin{aligned} e^{-Lt}\|\Phi(u(t)) - \Phi(v(t))\|_X &\leq e^{-Lt}\int_0^t \|g(s,u(s)) - g(s,v(s))\|_X\,ds \\ &\leq e^{-Lt}\int_0^t L\|u(s) - v(s)\|_X\,ds \\ &= e^{-Lt}\int_0^t Le^{Ls}e^{-Ls}\|u(s) - v(s)\|_X\,ds \\ &\leq e^{-Lt}\int_0^t Le^{Ls}\,ds|||u - v|||_{w,\infty} \\ &= (1 - e^{-Lt})|||u - v|||_{w,\infty} \\ &\leq (1 - e^{-LT})|||u - v|||_{w,\infty} \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$. Folglich ist

$$|||\Phi(u) - \Phi(v)|||_{w,\infty} \leq \underbrace{(1 - e^{-Lt})}_{<1}|||u - v|||_{w,\infty}$$

für alle $u, v \in C([0,T];X)$, d.h. Φ ist eine strikte Kontraktion im Raum $(C([0,T];X), |||\cdot|||_{w,\infty})$ und besitzt somit nach dem Banach'schen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt. $\square$

4.3 Maximal monotone Operatoren

Es stellt sich die Frage, welche Klasse von Operatoren $A : D(A) \subset X \to X$ wir in geeigneter Weise durch Lipschitz-stetige Operatoren approximieren können. Eine geeignete Klasse stellen, wie wir im folgenden sehen werden, die sogenannten maximal monotonen Operatoren in einem Hilbertraum dar. Wir geben zunächst die

Definition 4.6
Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum.
Ein Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset V \to V'$ heisst *maximal monoton*, wenn gilt:

1.) $\mathcal{A}$ ist monoton, d.h.

$$< \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v >_{V',V} \geq 0 \qquad \forall u, v \in D(\mathcal{A})$$

und

2.) $\mathcal{A}$ ist maximal im folgenden Sinne: für alle $(v, w) \in V \times V'$ mit

$$< \mathcal{A}u - w, u - v >_{V',V} \geq 0 \qquad \forall u \in D(\mathcal{A})$$

folgt, dass

$$v \in D(\mathcal{A}) \text{ und } w = \mathcal{A}v.$$

Bemerkung: Ein maximal monotoner Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset V \to V'$ besitzt keine echte monotone Erweiterung, d.h. wenn $\hat{\mathcal{A}} : D(\hat{\mathcal{A}}) \subset V \to V'$ ein monotoner Operator, $D(\mathcal{A}) \subset D(\hat{\mathcal{A}})$ und $\hat{\mathcal{A}}u = \mathcal{A}u$ für alle $u \in D(\mathcal{A})$, dann ist schon $D(\hat{\mathcal{A}}) = D(\mathcal{A})$ und $\hat{\mathcal{A}}u = \mathcal{A}u$ für alle $u \in D(\mathcal{A})$.

Wir haben bereits maximal monotone Operatoren kennengelernt, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 4.2
Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reflexiver Banachraum, $\mathcal{A} : V \to V'$ ein monotoner hemi-stetiger Operator.
Dann ist $\mathcal{A}$ maximal monoton.

Beweis:
Wir müssen nur zeigen, dass $\mathcal{A}$ auch maximal ist. Sei deshalb $(v, w) \in V \times V'$ so, dass

$$< \mathcal{A}u - w, u - v >_{V',V} \geq 0 \qquad \forall u \in V.$$

Mit $u = v \pm t\varphi$, $t \in [0, 1]$, $\varphi \in V$ folgt dann

$$\pm t < \mathcal{A}(v \pm t\varphi) - w, \varphi >_{V',V} \geq 0.$$

Wir dividieren durch t und gehen über zum Limes mit $t \downarrow 0$. Da $\mathcal{A}$ hemistetig, erhalten wir so

$$\pm < \mathcal{A}v - w, \varphi >_{V',V} \geq 0 \qquad \forall \varphi \in V,$$

woraus sofort $w = \mathcal{A}v$ folgt. $\square$

Wie gelangen wir nun von einem variationnellen maximal monotonen Operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset V \to V'$ zu einem Operator $A : D(A) \subset X \to X$, der in einem einzigen geeigneten Banachraum X definiert ist?

Wir betrachten das Problem zunächst an einem konkreten Beispiel.

Beispiel: der p-Laplace-Operator bei homogener Dirichlet-Randbedingung

Wie üblich sei Ω ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet des $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Sei $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $\mathcal{A} : V \to V'$ der variationnelle p-Laplace-Operator definiert durch

$$< \mathcal{A}u, v >_{V',V} = \int_\Omega |Du|^{p-2} Du \cdot Dv \, dx \qquad \forall u, v \in V.$$

Aus Kapitel 3 und Lemma 4.2 folgt, dass $\mathcal{A}$ maximal monoton ist.
Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $p \geq 2$. Dann ist

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_d L^2(\Omega) \hookrightarrow_d W^{-1,p'}(\Omega)$$

ein Gelfand-Dreier. Wie üblich identifizieren hierbei den Hilbertraum $H = L^2(\Omega)$ mit seinem topologischen Dualraum H'.
In dieser Situation können wir nun einfach den variationnellen Operator $\mathcal{A}$ „auf H einschränken". Es wird sich zeigen, dass der so „eingeschränkte" Operator maximal monoton in H ist.

Wir definieren zunächst den Definitionsbereich des „eingeschränkten" Operators A:

$$D(A) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \mathcal{A}u \in L^2(\Omega)\}.$$

Dies ist wie folgt zu verstehen: $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ist Element von $D(A)$, wenn $w \in L^2(\Omega)$ existiert, so dass

$$< \mathcal{A}u, v >_{V',V} = \int_\Omega |Du|^{p-2} Du \cdot Dv \, dx = \int_\Omega wv \, dx \qquad \forall v \in V = W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mit anderen Worten: die Distribution $\mathcal{A}u = -\Delta_p u$ ist regulär und wird von einer L^2-Funktion w erzeugt. Wie gehabt identifizieren wir die Distribution $\mathcal{A}u$ mit der sie erzeugenden L^2-Funktion w.
Somit können wir in natürlicher Weise definieren

$$Au = \mathcal{A}u \qquad \forall u \in D(A),$$

und erhalten einen Operator $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft, dass

$$(Au, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Au(x)v(x) \, dx = \int_\Omega |Du|^{p-2} Du \cdot Dv \, dx \qquad \forall v \in V.$$

Wir bemerken, dass der neue Operator A wieder monoton ist. In der Tat ist für alle $u, v \in D(A)$

$$\begin{aligned}(Au - Av, u - v)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (Au - Av)(u - v)\, dx \\ &= \int_\Omega (|Du|^{p-2}Du - |Dv|^{p-2}Dv) \cdot (Du - Dv)\, dx \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Dies folgt direkt aus der Monotonie von $\mathcal{A} : V \to V'$.

Der Beweis der Maximalität von A erfolgt in zwei Schritten. Wir zeigen zunächst:

Zwischenbehauptung: für alle $f \in L^2(\Omega)$ existiert ein Element $u \in D(A)$ so, dass die Operatorgleichung $u + Au = f$ gilt.
Mit anderen Worten: der Operator $I + A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist surjektiv. Hierbei bezeichnet $I : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ die identische Abbildung.

Bemerkung: Aus der Monotonie von A folgt übrigens ganz leicht die Injektivität von $I + A$, d.h. die Eindeutigkeit einer Lösung $u \in D(A)$ der Operatorgleichung $u + Au = f$. In der Tat, sind u bzw. $v \in D(A)$ Lösungen der Operatorgleichung $u + Au = f$ bzw. $v + Av = g$ mit $f, g \in H$, dann erhalten wir nach Subtraktion der beiden Gleichungen und Bildung des Skalarproduktes auf beiden Seiten in der so erhaltenen Gleichung mit $u - v$ die Identität

$$(u - v, u - v)_{L^2(\Omega)} + (Au - Av, u - v)_{L^2(\Omega)} = (f - g, u - v)_{L^2(\Omega)}.$$

Der zweite Term auf der linken Seite ist nicht-negativ, da A monoton und somit folgt

$$\|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (f - g, u - v)_{L^2(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L^2(\Omega)} \|f - g\|_{L^2(\Omega)},$$

also

$$\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f - g\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Insbesondere folgt aus $f = g$, dass $u = v$, d.h. eine Lösung der Operatorgleichung $u + Au = f$ ist eindeutig bestimmt.
Aus der Zwischenbehauptung folgt somit sogar, dass der Operator $I + A : D(A) \to H$ bijektiv ist.

Beweis der Zwischenbehauptung: Betrachte dazu den variationnellen Operator

$$\mathcal{B} : V \to V', \quad V = W_0^{1,p}(\Omega)$$

definiert durch

$$< \mathcal{B}u, v >_{V',V} = \int_\Omega uv\, dx + \int_\Omega |Du|^{p-2} Du \cdot Dv \qquad \forall u, v \in V.$$

Man überprüft leicht, dass $\mathcal{B}$ strikt monoton, beschränkt, hemistetig und koerzitiv ist. Nach dem Satz von Minty-Browder ist $\mathcal{B}$ daher bijektiv (nur die Surjektivität ist für uns hier von Bedeutung).
Nun ist aber $L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$. Erinnerung: die Abbildung

$$\begin{array}{lll} j: & L^2(\Omega) & \to W^{-1,p'}(\Omega) \\ & u & \mapsto \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \int_\Omega u(x)v(x)\,dx\} \end{array}$$

ist linear, injektiv und stetig (vgl. mit Beispiel in Kapitel 2 nach Satz von Lax-Milgram). Dann folgt aber aus der Bijektivität von $\mathcal{B} : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$, dass für alle $f \in L^2(\Omega)$ genau ein $u \in V = W_0^{1,p}(\Omega)$ existiert so, dass

$$< \mathcal{B}u, v >_{V',V} = < j(f), v >_{V',V} \qquad \forall v \in V,$$

d.h. aber

$$\int_\Omega uv\,dx + \int_\Omega |Du|^{p-2}Du \cdot Dv = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v \in V.$$

Da $f - u \in L^2(\Omega)$, folgt insbesondere, dass $u \in D(A)$ und somit ist u die gesuchte Lösung unserer Operatorgleichung $u + Au = f$. □

Aus der „Rangebedingung“ $R(I + A) = H$ folgt nun leicht die Maximalität von A. Sei dazu $(v, w) \in H \times H$ mit

$$(Au - w, v - u) \ \geq \ 0 \qquad \forall u \in D(A). \tag{4.9}$$

Wir müssen zeigen, dass daraus folgt, dass

$$v \in D(A) \qquad \text{und } Av = w.$$

Aus (4.9) folgt zunächst einmal, dass der Operator $\tilde{A}$ definiert durch

$$D(\tilde{A}) = D(A) \cup \{v\},$$

$$\tilde{A}u = \begin{cases} Au & , \text{ wenn } u \in D(A), \\ w & , u = v \end{cases}$$

eine monotone Erweiterung des Operators A ist.
Sei nun $f = v+w$. Natürlich ist $f \in H$ und da $R(I+A) = H$, existiert ein $u \in D(A)$ Lösung der Operatorgleichung

$$u + Au = f.$$

Nach Definition des Operators $\tilde{A}$ ist dann aber auch

$$u + \tilde{A}u = f.$$

Auf der anderen Seite gilt aber nach Definition von $\tilde{A}$ und f auch

$$v + \tilde{A}v = f.$$

Subtrahieren wir nun beide Gleichungen voneinander und bilden das Skalarprodukt mit $u - v$, erhalten wir

$$\|u - v\|_{L^2(\Omega)^2} + (\tilde{A}u - \tilde{A}v, u - v)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Da $\tilde{A}$ monoton ist, ist der zweite Term auf der linken Seite nicht-negativ. Es folgt, dass

$$\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

und somit $v = u$. Insbesondere ist dann aber $v \in D(A)$ und $w = Av$. □

Der obige Beweis dafür, dass die „Rangebedingung“ $R(I + A) = H$ die Maximalität des Operators A impliziert, benutzt keinerlei spezielle Eigenschaften des p-Laplace-Operators und ist offensichtlich auf jeden monotonen Operator $A : D(A) \subset H \to H$ in einem beliebigen Hilbertraum anwendbar. Es ist ebenso leicht einzusehen, dass auch eine Rangebedingung vom Typ $R(I + \lambda A) = H$ für ein (beliebiges) $\lambda > 0$ die Maximalität eines monotonen Operators garantiert.
Die Rangebedingung charakterisiert sogar die maximal monotonen Operatoren in der Menge aller monotonen Operatoren, denn man kann zeigen:

Lemma 4.3
Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $A : D(A) \subset H \to H$ ein monotoner Operator. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

* A ist maximal monoton
* $R(I + A) = H$
* $R(I + \lambda A) = H$ für ein $\lambda > 0$
* $R(I + \lambda A) = H$ für alle $\lambda > 0$

Beweis: Der Beweis, dass die Maximalität eine Rangebedingung impliziert, ist technisch und erfordert tiefere funktionalanalytische Argumente. Einen Beweis findet man etwa in H. Brézis, „Opérateurs maximaux monotones“ .

Man sieht nun leicht ein, dass das oben beschriebene Verfahren zur Konstruktion eines maximal monotonen Operators nicht nur im Falle des p-Laplace zum Ziel führt, sondern allgemeiner gilt:

Lemma 4.4
Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reflexiver, separabler Banachraum und $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum mit

$$V \hookrightarrow_d H \hookrightarrow_d V'$$

(d.h. (V, H, V') bildet einen Gelfand-Dreier). Sei weiter $\mathcal{A} : V \to V'$ ein monotoner, beschränkter, hemistetiger und koerzitiver Operator.
Dann ist der Operator $A : D(A) \subset H \to H$ definiert durch

$$\begin{aligned} &D(A) = \{u \in V;\ \mathcal{A}u \in H\} \\ &Au = \mathcal{A}u \qquad \forall u \in D(A) \end{aligned}$$

maximal monoton in H.

Bemerkung: Bei der obigen Definition haben wir wie üblich systematisch ein Element $f \in H'$ mit Hilfe der Riesz'schen Abbildung $j : H' \to H$ mit dem entsprechenden Element $j(f) \in H$ identifiziert. Deshalb ist die Bedingung $\mathcal{A}u \in H$ an die Elemente im Definitionsbereich von A sinnvoll.

Maximal monotone Operatoren in Hilberträumen lassen sich, wie bereits angedeutet, gut durch Lipschitzstetige Operatoren approximieren. Dazu geben wir zunächst

Definition 4.7
Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $A : D(A) \subset H \to H$ ein maximal monotoner Operator. Für $\lambda > 0$ heisst der Operator

$$J_\lambda^A := (I + \lambda A)^{-1} : H \to D(A) \subset H \qquad \textit{Resolvente von } A$$

und

$$A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda^A) : H \to H \qquad \textit{Yosida-Approximation von } A$$

Bemerkung : Die Resolvente ist wohldefiniert. In der Tat folgt die Injektivität des Operators $I + A$ (und somit die Wohldefiniertheit der Resolvente) ganz genauso wie im Spezialfall des p-Laplace gesehen aus der Monotonie des Operators A. Es genügt in dem oben im Falle des p-Laplace geführten Beweis die L^2-Norm bzw. das L^2-Skalarprodukt durch die entsprechende Norm bzw. das entsprechende Skalarprodukt in H zu ersetzen.
Die der Abschätzung (4.8) entsprechende Ungleichung in H zeigt sogleich, dass die Resolvente nicht nur wohldefiniert, sondern auch kontraktiv (d.h. Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1) in H ist. Diese Eigenschaft sowie die wichtigsten Eigenschaften der Yosida-Approximation sind im folgenden Satz festgehalten.

Satz 4.10
Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, $|\cdot|$ bezeichne die Norm in H. Sei weiter $A : D(A) \subset H \to H$ ein maximal monotoner Operator. Dann besitzen Resolvente und Yosida-Approximation von A die folgenden Eigenschaften:

(i) für alle $\lambda > 0$ ist J_λ^A eine Kontraktion in H, d.h.
$$|J_\lambda^A u - J_\lambda^A v| \leq |u - v| \qquad \forall u, v \in H$$

(ii) $A_\lambda = AJ_\lambda^A$ für alle $\lambda > 0$

(iii) A_λ ist maximal monoton und $\frac{1}{\lambda}$-Lipschitz stetig auf H für alle $\lambda > 0$

(iv) $A_{\lambda+\mu} = (A_\lambda)_\mu$ für alle $\lambda, \mu > 0$

(v) für alle $x \in D(A)$ gilt:
$$A_\lambda x \to Ax \quad \text{in } H,\ |A_\lambda x| \uparrow |Ax| \quad \in \mathbb{R} \text{ wenn } \lambda \downarrow 0,$$
$$|A_\lambda x - Ax|^2 \leq |Ax|^2 - |A_\lambda x|^2 \qquad \forall \lambda > 0. \tag{4.10}$$

(vi) für alle $x \notin D(A)$: $|A_\lambda x| \uparrow \infty$ wenn $\lambda \downarrow 0$

Beweis:
(i) haben wir bereits gesehen.

(ii) Nach Definition ist
$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda^A).$$
Somit gilt für jedes $u \in H$
$$\begin{aligned} v = A_\lambda u \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda v = u - J_\lambda^A u \qquad (4.11)\\ &\Leftrightarrow \quad J_\lambda^A u = u - \lambda v. \end{aligned}$$
Nun ist aber $x = J_\lambda^A u$ die eindeutige Lösung der Operatorgleichung $x + \lambda Ax = u$, d.h. es gilt
$$(u - \lambda v) + \lambda A(u - \lambda v) = u.$$
Letztere Gleichung ist aber äquivalent zu
$$A(u - \lambda v) = v,$$
und mit (4.11) folgt dann
$$AJ_\lambda^A u = A_\lambda u.$$
Da $u \in H$ beliebig ist, folgt die Gleichheit der Operatoren $AJ_\lambda^A = A_\lambda$.

(iii) Seien $u, v \in H$, $\lambda > 0$. Dann gilt
$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda|A_\lambda u - A_\lambda v|^2 \\ &= (A_\lambda u - A_\lambda v, (u - J_\lambda^A u) - (v - J_\lambda^A v)) \\ &= (A_\lambda u - A_\lambda v, u - v) - (A_\lambda u - A_\lambda v, J_\lambda^A u - J_\lambda^A v)) \\ &\leq (A_\lambda u - A_\lambda v, u - v), \qquad (4.12) \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, da

$$\begin{aligned}
& (A_\lambda u - A_\lambda v, J_\lambda^A u - J_\lambda^A v)) \\
= \; & (AJ_\lambda^A u - AJ_\lambda^A v, J_\lambda^A u - J_\lambda^A v)) && \text{(nach (ii))} \\
\geq \; & 0 && \text{(da } A \text{ monoton).}
\end{aligned}$$

Aus (4.12) folgt zunächst einmal, dass A_λ monoton ist.
Weiter folgt aus der Abschätzung (4.12), dass

$$\begin{aligned}
\lambda |A_\lambda u - A_\lambda v|^2 &\leq (A_\lambda u - A_\lambda v, u - v) \\
&\leq |A_\lambda u - A_\lambda v||u - v|,
\end{aligned}$$

und somit

$$|A_\lambda u - A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda}|u - v|$$

für alle $u, v \in H$, d.h. aber A_λ ist $\frac{1}{\lambda}$-Lipschitz-stetig auf H.
Es bleibt zu zeigen, dass A_λ maximal ist. Nach Lemma 4.3 genügt es, die Rangebedingung $R(I + A) = H$ zu zeigen.
Sei dazu $f \in H$. Dann ist $u \in H$ eine Lösung der Operatorgleichung

$$u + A_\lambda u = f \tag{4.13}$$

genau dann, wenn

$$\lambda u + (u - J_\lambda^A u) = f.$$

Letztere Gleichung wiederum ist äquivalent zur Operatorgleichung

$$u = \frac{1}{1+\lambda} f + \frac{1}{1+\lambda} J_\lambda^A u.$$

Dies ist eine Fixpunktgleichung für den Operator

$$\begin{aligned}
\Phi : \; & H \to H \\
& u \mapsto \frac{1}{1+\lambda} f + \frac{1}{1+\lambda} J_\lambda^A u.
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)| &= \frac{1}{1+\lambda} |J_\lambda^A u - J_\lambda^A v| \\
&\leq \frac{1}{1+\lambda} |u - v| && \text{(wegen (i))}
\end{aligned}$$

für alle $u, v \in H$, ist Φ eine strikte Kontraktion und besitzt demnach nach dem Banach'schen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt $u \in H$. Dieser ist nach unseren Vorüberlegungen die gesuchte Lösung von (4.13).

(iv) Im Beweis von (ii) haben wir gesehen, dass für alle $u, v \in H$, $\lambda > 0$, gilt:

$$v = A_\lambda u \quad \Leftrightarrow \quad v = A(u - \lambda v). \tag{4.14}$$

Angewandt mit A_λ anstelle von A und μ anstelle von λ erhalten wir somit:

$$v = (A_\lambda)_\mu u \quad \Leftrightarrow \quad v = A_\lambda(u - \mu v).$$

Erneutes Anwenden von (4.14) ergibt die Äquivalenz zu

$$v = A((u - \mu v) - \lambda v) = A(u - (\lambda + \mu)v).$$

Die letzte Gleichung ist aber wieder nach (4.14) äquivalent zu

$$A_{\lambda+\mu} u = v,$$

und die Behauptung $(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}$ ist damit bewiesen.
(v) Sei $x \in D(A)$, $\lambda > 0$. Wegen (ii) und da A monoton ist, gilt

$$(Ax - A_\lambda x, x - J_\lambda^A x) \ \geq \ 0,$$

und somit ist auch

$$(Ax - A_\lambda x, A_\lambda x) = \frac{1}{\lambda}(Ax - A_\lambda x, x - J_\lambda^A x) \ \geq \ 0.$$

Es folgt, dass

$$|A_\lambda x|^2 \leq (Ax, A_\lambda x) \leq |Ax||A_\lambda x|$$

und somit

$$|A_\lambda x| \leq |Ax| \qquad \forall \lambda > 0. \tag{4.15}$$

Wenden wir die gleiche Argumentation auf A_μ anstelle von A an, erhalten wir unter Verwendung von (iv) für alle $x \in H = D(A_\mu)$, $\lambda, \mu > 0$,

$$|A_{\lambda+\mu} x|^2 \leq (A_\mu x, A_{\mu+\lambda} x) \tag{4.16}$$

sowie

$$|A_{\lambda+\mu} x| \leq |A_\mu x| \qquad \forall x \in H, \lambda, \mu > 0. \tag{4.17}$$

Für alle $x \in H$ gilt somit, dass $(|A_\lambda x|)_\lambda$ monoton wächst, wenn $\lambda \downarrow 0$. Falls $x \in D(A)$, ist $(|A_\lambda x|)_\lambda$ wegen (4.15) ausserdem beschränkt und somit konvergent in $\mathbb{R}$.
Wir zeigen nun, dass für $x \in D(A)$ auch $(A_\lambda x)_\lambda$ konvergent in H ist. Dazu bemerken wir, dass, für $\lambda, \mu > 0$, wegen (4.16),

$$\begin{aligned} |A_{\lambda+\mu} x - A_\mu x|^2 &= |A_{\lambda+\mu} x|^2 + |A_\mu x|^2 - 2(A_{\lambda+\mu} x A_\lambda x) \\ &\leq |A_{\lambda+\mu} x|^2 + |A_\mu x|^2 - 2|A_{\lambda+\mu} x|^2 \\ &= |A_\mu x|^2 - |A_{\lambda+\mu} x|^2. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Da $(|A_\lambda x|)_\lambda$ als konvergente Folge in $\mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge ist, folgt aus der letzten Ungleichung, dass $(A_\lambda x)_\lambda$ eine Cauchy-Folge in H ist und somit für $\lambda \downarrow 0$ in H konvergiert.
Es bezeichne w den Grenzwert von $(A_\lambda x)_\lambda$ in H. Es ist zu zeigen, dass $w = Ax$. Dies folgt mit Hilfe eines Standardarguments für maximal monotone Operatoren. Zunächst einmal bemerken wir, dass wegen der Beschränktheit von $(A_\lambda x)_\lambda$ in H

$$\lambda A_\lambda x = x - J_\lambda^A x \to 0 \qquad \text{in } H, \text{ wenn } \lambda \downarrow 0,$$

und somit

$$J_\lambda^A x \to x \qquad \text{in } H, \text{ wenn } \lambda \downarrow 0.$$

Wegen der Monotonie von A und (ii) ist aber

$$(Au - A_\lambda x, u - J_\lambda^A x) \; \geq \; 0 \qquad\qquad \forall u \in D(A), \lambda > 0.$$

Im Limes erhalten wir somit für $\lambda \downarrow 0$

$$(Au - w, u - x) \; \geq \; 0 \qquad\qquad \forall u \in D(A).$$

Aus der Maximalität von A folgt dann $w = Ax$.
Abschliessend bemerken wir, dass die gesuchte Ungleichung (4.10) sich sofort aus (4.18) ergibt, wenn $\mu \downarrow 0$.

(vi) Wir haben bereits im Beweis von (v) gesehen, dass, für alle $x \in H$, $(|A_\lambda x|)_\lambda$ monoton wachsend ist, wenn $\lambda \downarrow 0$. Es sei nun $x \notin D(A)$. Wir nehmen an, dass $(A_\lambda x)_\lambda$ beschränkt in H ist und wollen dies zum Widerspruch führen. Wir benutzen dazu ähnliche Argumente wie im Beweis von (v). Aufgrund der Beschränktheit von $(A_\lambda x)_\lambda$ folgt zunächst wieder

$$J_\lambda^A x \to x \qquad\qquad \text{in } H \text{ für } \lambda \downarrow 0.$$

Als beschränkte Folge im Hilbertraum H besitzt $(A_\lambda x)_\lambda$ ausserdem eine schwach konvergente Teilfolge. Sei $(\lambda_n)_n$ eine Nullfolge, für die gilt, dass

$$A_{\lambda_n} x \rightharpoonup w \qquad \text{schwach in } H$$

für ein gewisses Element $w \in H$.
Wegen der Monotonie von A und (ii) ist wie vorher

$$(Au - A_{\lambda_n} x, u - J_{\lambda_n}^A x) \; \geq \; 0 \qquad\qquad \forall u \in D(A), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Im Limes erhalten wir somit für $\lambda_n \to 0$ wie im Beweis von (v)

$$(Au - w, u - x) \; \geq \; 0 \qquad\qquad \forall u \in D(A),$$

woraus wegen der Maximalität von A folgt, dass $x \in D(A)$ und $w = Ax$. Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass $x \notin D(A)$. $\square$

4.4 Das homogene Cauchy-Problem für maximal monotone Operatoren

Mit Hilfe der Yosida-Approximationen $(A_\lambda)_\lambda$ können wir demnach einen beliebig vorgegebenen maximal monotonen Operator A in einem Hilbertraum H durch Lipschitzstetige Operatoren approximieren. Es ist nun naheliegend zu versuchen, ein vorgegebenes Cauchyproblem

$$\text{(CP)} \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f & \text{auf } (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für einen maximal monotonen Operator A in H, Anfangswert $u_0 \in H$ und rechter Seite $f : [0,T] \to H$ durch die Cauchyprobleme

$$\text{(CP)}_\lambda \qquad \begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = f_\lambda & \text{auf } (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für die Yosida-Approximation A_λ und stetiger rechter Seite $f_\lambda \in C([0,T];H)$ zu approximieren. Nach dem (globalen) Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Näherungsproblem $(\mathrm{CP})_\lambda$ eine klassische Lösung $u_\lambda \in C^1([0,T];X)$, für alle $\lambda > 0$. Wenn die rechte Seite in $(\mathrm{CP})_\lambda$ so gewählt wird, dass f_λ in einem geeigneten Sinn gegen f konvergiert, so erwarten wir verständlicherweise, dass die Näherungslösungen $(u_\lambda)_\lambda$ gegen eine „Lösung“ u von (CP) konvergieren. Dabei ist insbesondere zu untersuchen, in welcher Weise die Grenzfunktion u tatsächlich das Cauchyproblem „löst“. Es ist klar, dass u im allgemeinen keine klassische Lösung von (CP) sein wird, sondern nur eine „verallgemeinerte Lösung“.
Wir untersuchen dieses Problem an dieser Stelle nur im Spezialfall, dass die rechte Seite f in (CP) (bzw. f_λ in $(\mathrm{CP})_\lambda$) identisch gleich 0 und $u_0 \in D(A)$ ist. In diesem Fall können wir die Konvergenz der Näherungslösungen $(u_\lambda)_\lambda$ gegen eine sogenannte starke Lösung von (CP) zeigen.

Definition 4.8
Eine Funktion $u : [0,T] \to H$ heisst *starke Lösung von* (CP) zum Anfangswert $u_0 \in H$ und rechter Seite $f : [0,T] \to H$, falls gilt:

(i) u ist absolut stetig auf $[0,T]$ und fast überall differenzierbar

(ii) $u(t) \in D(A)$ für fast alle $t \in (0,T)$

(iii) u erfüllt punktweise fast überall die Differentialgleichung:

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) \qquad \text{für fast alle } t \in (0,T)$$

(iv) $u(0) = u_0$

Bemerkung: Nach dem Satz von Komura ist eine absolutstetige Funktion $u : [0,T] \to H$ mit Werten in einem Hilbertraum H automatisch fast überall differenzierbar.
Die Bedingung (ii) ist implizit bereits in der Bedingung (iii) enthalten.

Satz 4.11
Für alle $u_0 \in D(A)$ besitzt das Cauchyproblem (CP) eine eindeutige starke Lösung $u : [0,T] \to H$. Die starke Lösung u besitzt ausserdem folgende Eigenschaften:

* $u(t) \in D(A)$ für alle $t \in [0,T]$
* u ist Lipschitz-stetig, $\dfrac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;H)$

Sind u_1 und u_2 starke Lösungen des Cauchyproblems (CP) zu den Anfangswerten u_0^1 bzw. u_0^2, dann gilt:

$$|u_1(t) - u_2(t)| \le |u_0^1 - u_0^2| \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{4.19}$$

Beweis:
Wir beweisen zunächst das Vergleichsprinzip (4.19) für starke Lösungen. Aus diesem

folgt dann sofort die Eindeutigkeit der starken Lösung von (CP).
Da u_1 und u_2 starke Lösungen von (CP) zum Anfangswert u_0^1 bzw. u_0^2 sind, gilt

$$\frac{du_1}{dt}(t) + Au_1(t) = 0 \qquad \text{fast überall auf } (0,T)$$

und genauso

$$\frac{du_2}{dt}(t) + Au_2(t) = 0 \qquad \text{fast überall auf } (0,T).$$

Ausserhalb einer Nullmenge $N \subset (0,T)$ sind daher beide Gleichungen punktweise erfüllt. Wir subtrahieren beide Gleichungen und bilden dann das Skalarprodukt auf beiden Seiten mit $u_1(t) - u_2(t)$. Damit ergibt sich in jedem Punkt $t \in (0,T) \setminus N$:

$$\left(\frac{du_1}{dt}(t) - \frac{du_2}{dt}(t), u_1(t) - u_2(t)\right) + (Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t)) = 0.$$

Da A monoton ist, ist der zweite Term ≥ 0. Für den ersten Term gilt aber

$$\begin{aligned}\left(\frac{du_1}{dt}(t) - \frac{du_2}{dt}(t), u_1(t) - u_2(t)\right) &= \left(\frac{d(u_1 - u_2)}{dt}(t), u_1(t) - u_2(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1(t) - u_2(t)|^2\end{aligned}$$

und somit erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1(t) - u_2(t)|^2 \leq 0 \qquad \text{fast überall auf } (0,T).$$

Da u_1, u_2 absolut stetig, ist auch die reellwertige Funktion $t \in (0,T) \mapsto |u_1(t) - u_2(t)|^2$ absolut stetig, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1(\cdot) - u_2(\cdot)|^2 \in L^1(0,T)$ und es gilt der Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung. Durch Integration und da $u_1(0) = u_0^1$ bzw. $u_2(0) = u_0^2$ erhalten wir daher

$$\frac{1}{2}|u_1(t) - u_2(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|u_0^1 - u_0^2|^2 \qquad \text{für alle } t \in [0,T],$$

und damit sofort (4.19).

Existenz einer starken Lösung

Für $\lambda > 0$ sei $u_\lambda \in C^1([0,T];H)$ die nach dem (globalen) Satz von Picard-Lindelöf existierende klassische Lösung von $(\mathrm{CP})_\lambda$ mit $f_\lambda \equiv 0$. Da die Differentialgleichung autonom ist, ist dann auch, für alle $0 < h < T$, die um h verschobene Funktion $v_\lambda(t) := u_\lambda(t+h)$, $t \in [0, T-h]$, eine klassische Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0 \quad \text{auf } (0, T-h) \\ v_\lambda(0) = u_\lambda(h) \end{cases}$$

Subtraktion der beiden Differentialgleichungen für $u_\lambda(\cdot + h)$ und u_λ und anschliessende Bildung des Skalarprodukts mit $u_\lambda(\cdot + h) - u_\lambda$ führt zu

$$\left(\frac{du_\lambda}{dt}(t+h) - \frac{du_\lambda}{dt}(t), u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)\right) + (A_\lambda u_\lambda(t+h) - A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)) = 0$$

für alle $t \in [0, T-h]$. Mit den gleichen Argumenten wie oben erhalten wir so aufgrund der Monotonie von A_λ die Abschätzung

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)|^2 \leq 0 \qquad \text{für alle } t\in[0,T-h],$$

und somit wie oben

$$|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)| \leq |u_\lambda(h)-u_\lambda(0)| \qquad \text{für alle } t\in[0,T-h].$$

Durch Division der Ungleichung durch h und Übergang zum Limes mit $h\to 0$ erhalten wir, da u_λ, $u_\lambda(\cdot+h)$ klassische Lösungen von $(\mathrm{CP})_\lambda$ bzw. des um h verschobenen Cauchyproblems sind, für alle $t\in[0,T-h]$, $\lambda>0$,

$$|A_\lambda u_\lambda(t)| = \left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right| \leq \left|\frac{d}{dt}u_\lambda(0)\right| = |A_\lambda u_0| \leq |Au_0|, \tag{4.20}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Satz 4.10 (v) folgt.
Wir haben damit gezeigt, dass

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right| \leq |Au_0| \qquad \forall\lambda>0.$$

Dies ist äquivalent zur Abschätzung

$$|u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)| \leq |Au_0|h \qquad \forall t\in[0,T-h], \lambda>0. \tag{4.21}$$

Wir werden als nächstes zeigen, dass $(u_\lambda)_\lambda$ eine Cauchyfolge in $C([0,T];H)$ ist. Seien $\lambda,\mu>0$. Durch Subtraktion der von u_λ bzw. u_μ erfüllten Differentialgleichungen und anschliessende Bildung des Skalarproduktes mit $u_\lambda-u_\mu$ erhalten wir für alle $t\in[0,T]$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 + (A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t)-u_\mu(t)) = 0. \tag{4.22}$$

Nun ist aber aufgrund der Monotonie von A und weil $A_\lambda = AJ_\lambda^A$

$$\begin{aligned}
& (A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t)-u_\mu(t)) \\
= \ & (A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t), (u_\lambda(t)-J_\lambda^A u_\lambda(t)) + (J_\lambda^A u_\lambda(t)-J_\mu^A u_\mu(t)) + (J_\mu^A u_\mu(t)-u_\mu(t))) \\
\geq \ & (A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t), (u_\lambda(t)-J_\lambda^A u_\lambda(t)) + (J_\mu^A u_\mu(t)-u_\mu(t))) \\
= \ & (A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t), \lambda A_\lambda u_\lambda(t)-\mu A_\mu u_\mu(t)).
\end{aligned}$$

Aus (4.22) folgt somit für alle $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2 &\leq (A_\lambda u_\lambda(t)-A_\mu u_\mu(t), \mu A_\mu u_\mu(t)-\lambda A_\lambda u_\lambda(t))\\
&= -\lambda|A_\lambda u_\lambda(t)|^2-\mu|A_\mu u_\mu(t)|^2+(\lambda+\mu)(A_\lambda u_\lambda(t), A_\mu u_\mu(t))\\
&\leq -\lambda|A_\lambda u_\lambda(t)|^2-\mu|A_\mu u_\mu(t)|^2+\frac{\lambda+\mu}{2}(|A_\lambda u_\lambda(t)|^2+|A_\mu u_\mu(t)|^2)\\
&= \frac{\lambda-\mu}{2}|A_\mu u_\mu(t)|^2+\frac{\mu-\lambda}{2}|A_\lambda u_\lambda(t)|^2\\
&\leq \frac{|\mu-\lambda|}{2}|Au_0|^2
\end{aligned}$$

wegen (4.20).
Durch Integration über $(0,t)$ erhalten wir

$$|u_\lambda(t)-u_\mu(t)| \leq \sqrt{t|\mu-\lambda|}\,|Au_0|,$$

für alle $t \in [0,T]$ und somit

$$\sup_{t\in[0,T]}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)| \leq \sqrt{T|\mu-\lambda|}\,|Au_0|,$$

d.h. aber gerade, dass $(u_\lambda)_\lambda$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(C([0,T];H), |||\cdot|||_\infty)$ ist. Folglich konvergiert u_λ gleichmässig auf $[0,T]$ gegen eine Funktion $u \in C([0,T];H)$ wenn $\lambda \to 0$. Aus (4.21) folgt sofort, dass u Lipschitz stetig auf $[0,T]$ ist. Nach dem Satz von Komura ist damit u auch fast überall differenzierbar auf $[0,T]$ und wegen der Abschätzung (4.21) für u ist natürlich auch $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;H)$.

Wir zeigen als nächstes, dass $u(t) \in D(A)$ für alle $t \in [0,T]$. Dazu erinnern wir zunächst daran (vgl. (4.20)), dass $(A_\lambda u_\lambda(t))_\lambda$ für alle $t \in [0,T]$ beschränkt in H ist. Somit folgt, dass

$$|u_\lambda(t)-J_\lambda^A u_\lambda(t)| = \lambda|A_\lambda u_\lambda(t)| \leq \lambda|Au_0|$$

für alle $t \in [0,T]$, $\lambda > 0$. Da $u_\lambda \to u$ in $C([0,T];H)$ für $\lambda \downarrow 0$, folgt somit, dass

$$J_\lambda^A u_\lambda \to u \qquad \text{in } C([0,T];H) \text{ für } \lambda \to 0.$$

Sei nun $t \in [0,T]$ beliebig, aber fest. Da $(A_\lambda u_\lambda(t))_\lambda$ in H beschränkt, existiert eine Nullfolge $(\lambda_n)_n$ so, dass

$$A_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t) \rightharpoonup w \qquad \text{schwach in } H$$

für ein gewisses Element $w \in H$. Nun folgt das übliche Maximalitätsargument. Wegen der Monotonie von A ist

$$(Av-A_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t), v-J_{\lambda_n}^A u_{\lambda_n}(t)) \geq 0 \qquad \forall v \in D(A), n \in \mathbb{N}.$$

Der Übergang zum Limes mit $\lambda_n \to 0$ führt zur Ungleichung

$$(Av - w, v - u(t)) \;\geq\; 0 \qquad\qquad \forall v \in D(A),$$

welche wegen der Maximalität von A impliziert, dass $u(t) \in D(A)$ und $w = Au(t)$. Wir haben damit insbesondere gezeigt, dass $u(t) \in D(A)$ für alle $t \in [0,T]$. Ausserdem haben wir gezeigt, dass jede schwach konvergente Teilfolge von $(A_\lambda u_\lambda(t))_\lambda$ den gleichen Limes $Au(t)$ besitzt. Somit folgt, dass die gesamte (verallgemeinerte) Folge $A_\lambda u_\lambda(t) \rightharpoonup Au(t)$ schwach in H für $\lambda \downarrow 0$.

Es verbleibt zu zeigen, dass u punktweise fast überall die Differentialgleichung erfüllt.

Leider können wir nicht punktweise in den Näherungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}u_\lambda(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = 0$$

zum Limes $\lambda \to 0$ übergehen, da nicht klar ist, ob

$$\frac{d}{dt}u_\lambda(t) \rightharpoonup \frac{d}{dt}u(t) \text{ schwach in } H \text{ für } \lambda \to 0$$

punktweise fast überall auf $[0,T]$.
Deswegen gehen wir nun von der punktweisen Betrachtung der Gleichung über zu ihrer Betrachtung im Raum $L^2(0,T;H)$. Dazu definieren wir zunächst die „Realisierung“ $\mathcal{A}$ des Operators A in $L^2(0,T;H)$ durch

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in L^2(0,T;H);\; u(t) \in D(A) \text{ f.ü. auf } [0,T],\; t \mapsto Au(t) \in L^2(0,T;H)\},$$

$$\mathcal{A}u = \{t \in [0,T] \mapsto Au(t)\} \qquad \forall u \in D(\mathcal{A}).$$

Der Operator $\mathcal{A}$ ist, wie man leicht zeigt (Übung!) maximal monoton in $L^2(0,T;H)$. Ausserdem ist offensichtlich die Resolvente $J_\lambda^{\mathcal{A}}$ bzw. die Yosida-Approximation $\mathcal{A}_\lambda$ von $\mathcal{A}$ die jeweilige Realisierung in $L^2(0,T;H)$ der Resolvente J_λ^A bzw. der Yosida-Approximation A_λ von A. Wir haben gesehen, dass

$$J_\lambda^{\mathcal{A}} u_\lambda \to u \qquad\qquad \text{in } C([0,T];H) \;\text{ für } \lambda \downarrow 0,$$

und da $C([0,T];H) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$, folgt

$$J_\lambda^{\mathcal{A}} u_\lambda \to u \qquad\qquad \text{in } L^2(0,T;H) \;\text{ für } \lambda \downarrow 0.$$

Aus (4.20) folgt ausserdem, dass $(\mathcal{A}_\lambda u_\lambda)_\lambda$ beschränkt in $L^\infty(0,T;H)$, und da $L^\infty(0,T;H) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$, gilt somit:

$$(\mathcal{A}_\lambda u_\lambda)_\lambda \text{ ist beschränkt in } L^2(0,T;H).$$

Somit existiert eine Nullfolge $(\lambda_n)_n$ so, dass

$$\mathcal{A}_{\lambda_n} u_{\lambda_n} \rightharpoonup w \qquad \text{schwach in } L^2(0,T;H).$$

Wie üblich folgt mit dem Standardargument für maximal monotone Operatoren, dass $w = \mathcal{A}u$: wegen der Monotonie von $\mathcal{A}$ ist

$$(\mathcal{A}v - \mathcal{A}_{\lambda_n}u_{\lambda_n}, v - J^{\mathcal{A}}_{\lambda_n}u_{\lambda_n})_{L^2(0,T;H)} \geq 0 \qquad \forall v \in D(\mathcal{A}),$$

und so erhalten wir, nach Übergang zum Limes mit $\lambda_n \to 0$,

$$(\mathcal{A}v - w, v - u)_{L^2(0,T;H)} \geq 0 \qquad \forall v \in D(\mathcal{A}).$$

Aus der Maximalität von $\mathcal{A}$ folgt dann $w = \mathcal{A}u$ und somit konvergiert auch die gesamte (verallgemeinerte) Folge $(\mathcal{A}_\lambda u_\lambda)_\lambda$ schwach in $L^2(0,T;H)$ gegen $\mathcal{A}u$.

Wir können nun zeigen, dass

$$\frac{d}{dt}u_\lambda = -\mathcal{A}u_\lambda \rightharpoonup \frac{d}{dt}u \qquad \text{schwach in } L^2(0,T;H),$$

oder, anders ausgedrückt, dass

$$\frac{d}{dt}u = -\mathcal{A}u \qquad \text{fast überall auf } [0,T].$$

Sei dazu $f \in H$. Für alle $t, t+h \in [0,T], \lambda > 0$ ist nach Satz 4.3 und Lemma 4.1

$$\begin{aligned}
\left(f, \frac{u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)}{h}\right) &= \left(f, \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \frac{d}{d\sigma}u_\lambda(\sigma)\, d\sigma\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left(f, \frac{d}{d\sigma}u_\lambda(\sigma)\right) d\sigma \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f, -\mathcal{A}_\lambda u_\lambda(\sigma))\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Da die konstante Funktion $t \in [0,T] \mapsto f \in L^2(0,T;H)$ ist, folgt dank der schwachen Konvergenz $\mathcal{A}_\lambda u_\lambda \rightharpoonup \mathcal{A}u$ in $L^2(0,T;H)$, dass die rechte Seite der obigen Gleichung für $\lambda \to 0$ gegen $\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(f, -\mathcal{A}u(\sigma))\, d\sigma$ konvergiert. Der Übergang zum Limes mit $\lambda \to 0$ in obiger Gleichung liefert somit die Identität

$$\begin{aligned}
\left(f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right) &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (f, -\mathcal{A}u(\sigma))\, d\sigma \\
&= (f, \frac{1}{h}\int_t^{t+h} -\mathcal{A}u(\sigma)\, d\sigma)
\end{aligned}$$

für alle $f \in H$, $t, t+h \in [0,T]$.
Es folgt, dass

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} -\mathcal{A}u(\sigma)\, d\sigma$$

für alle $t, t+h \in [0,T]$.
Da u fast überall differenzierbar ist und fast alle Punkte in $[0,T]$ Lebesguepunkte der Funktion $\mathcal{A}u \in L^2(0,T;H)$ sind, führt der Übergang zum Limes mit $h \to 0$ in obiger Gleichung zu

$$\frac{d}{dt}u = -\mathcal{A}u \qquad \text{fast überall auf } [0,T],$$

d.h. aber gerade

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \qquad \text{fast überall auf } [0,T].$$

□

Bemerkung:
Man kann die Konvergenz

$$A_\lambda u_\lambda(\cdot) \rightharpoonup Au(\cdot) \qquad \text{schwach in } L^2(0,T;H) \text{ für } \lambda \downarrow 0,$$

die im letzten Beweisschritt eine Schlüsselrolle spielte, auch direkt - ohne Einführung des Operators $\mathcal{A}$ in $L^2(0,T;H)$ - zeigen:

Beweisvariante:
Da $A_\lambda u_\lambda(t) \rightharpoonup Au(t)$ schwach in H für alle $t \in [0,T]$, folgt, dass, für beliebiges $f \in L^2(0,T;H)$, die reellwertigen Funktionen $t \mapsto (f(t), A_\lambda u_\lambda(t))$ punktweise fast überall auf $[0,T]$ gegen die Funktion $t \mapsto (f(t), Au(t))$ konvergieren. Ausserdem ist aber wegen (4.20) $|(f(t), A_\lambda u_\lambda(t))| \le |f(t)||Au_0|$ f.ü. auf $[0,T]$. Da die Funktion $t \mapsto |f(t)||Au_0| \in L^2(0,T) \subset L^1(0,T)$, folgt mit dem Satz der majorisierten Konvergenz von Lebesgue, dass $\int_0^T (f(t), A_\lambda u_\lambda(t))\,dt \to \int_0^T (f(t), Au(t))\,dt$ für alle $f \in L^2(0,T;H)$, d.h. aber gerade, dass $A_\lambda u_\lambda(\cdot) \rightharpoonup Au(\cdot)$ schwach in $L^2(0,T;H)$ konvergiert für $\lambda \to 0$.

Das in der ersten Beweisvariante benutzte Argument mit Hilfe der Realisierung $\mathcal{A}$ von A in $L^2(0,T;H)$ ist jedoch ein Standardtrick in der Theorie der maximal monotonen Operatoren, das auch in allgemeineren Situationen anwendbar ist - insbesondere auf Cauchyprobleme für mengenwertige maximal monotone Operatoren (sog. „Multis“), die in DGL III behandelt werden. Bei mengenwertigen Operatoren ist die eben beschriebene zweite Beweisvariante dagegen nicht anwendbar.

4.5 Das nicht-homogene Cauchy-Problem

Betrachten wir nun das nicht-homogene Cauchy-Problem

$$\text{(CP)} \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f & \text{auf } (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

für eine beliebige rechte Seite $f \in L^1(0,T;H)$.

Inwieweit ist es möglich, die im homogenen Fall erzielten Resultate auf das nicht-homogene Cauchy-Problem zu verallgemeinern?

Man überprüft leicht, dass der im homogenen Fall geführte Beweis der Eindeutigkeit einer starken Lösung ohne weiteres auf den nicht-homogenen Fall übertragbar ist, da bei Subtraktion der Gleichungen für u_1 und u_2 die rechte Seite f verschwindet.

Betrachten wir als nächstes die Frage der Existenz einer starken Lösung des nicht-homogenen Cauchy-Problems. Falls $f \in C([0,T];H)$, so besitzt das Cauchy-Problem für die Yosida-Approximation A_λ nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine global eindeutige klassische Lösung u_λ. Wir wollen im folgenden nur diesen Fall weiter untersuchen. [3] Es bleibt also „nur“ die Konvergenz der Lösungen u_λ der approximativen Cauchy-Probleme

$$(\mathrm{CP}) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} + A_\lambda u = f & \text{auf } (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

zu untersuchen.

Betrachten wir die einzelnen Schritte des Beweises der Konvergenz der approximativen Lösungen im homogenen Fall, so stellen wir fest, dass nur der erste Teil (Gewinnung der Abschätzungen (4.20) und (4.21)) im nicht-homogenen Fall Schwierigkeiten bereitet. Anstelle der Ungleichung

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)|^2 \leq 0$$

für alle $t, t+h \in [0,T]$, $\lambda > 0$, erhalten wir bei rechter Seite $f \neq 0$ die Abschätzung

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)|^2 \leq (f(t+h) - f(t), u(t+h) - u(t)),$$

und somit in integraler Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)|^2 &\leq \frac{1}{2}|u_\lambda(h) - u_\lambda(0)|^2 + \int_0^t (f(s+h) - f(s), u_\lambda(s+h) - u_\lambda(s))\, ds \\ &\leq \frac{1}{2}|u_\lambda(h) - u_\lambda(0)|^2 + \int_0^t |f(s+h) - f(s)||u_\lambda(s+h) - u_\lambda(s)|\, ds \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Abschätzung

$$|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)| \leq |u_\lambda(h) - u_\lambda(0)| + \int_0^t |f(s+h) - f(s)|\, ds \tag{4.23}$$

[3] Ist die rechte Seite $f \in L^1(0,T;H)$ unstetig, können wir - dank der Tatsache, dass $C([0,T];H) \hookrightarrow_d L^1(0,T;H)$ ist - die rechte Seite durch eine Folge von stetigen Funktionen $f_\lambda \in C([0,T];H)$ approximieren.

für alle $t, t+h \in [0,T]$, $\lambda > 0$, mit Hilfe von

Lemma 4.5
Sei $\Phi \in C([0,T])$, $\Psi \in L^1(0,T)$, $\Psi \geq 0$ f.ü. auf $[0,T]$, und es gelte

$$\frac{1}{2}\Phi(t)^2 \leq \frac{1}{2}\Phi(0)^2 + \int_0^t \Phi(s)\Psi(s)\,ds \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{4.24}$$

Dann folgt:

$$|\Phi(t)| \leq |\Phi(0)| + \int_0^t \Psi(s)\,ds \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{4.25}$$

Beweis des Lemmas:
Sei $\epsilon > 0$ und $g_\epsilon(t) := \frac{1}{2}(|\Phi(0)| + \epsilon)^2 + \int_0^t \Phi(s)\Psi(s)\,ds$, $t \in [0,T]$. Offensichtlich folgt aus (4.24)

$$\frac{1}{2}\Phi(t)^2 \leq g_\epsilon(t) \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{4.26}$$

Wir werden zeigen, dass aus (4.26) die Ungleichung

$$|\Phi(t)| \leq |\Phi(0)| + \epsilon + \int_0^t \Psi(s)\,ds \qquad \forall\, t \in [0,T] \tag{4.27}$$

folgt. Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt durch Übergang zum Limes mit $\epsilon \to 0$ die gesuchte Ungleichung (4.25).

Betrachten wir die Eigenschaften der Funktion g_ϵ. Offensichtlich ist g_ϵ absolut stetig und f.ü. differenzierbar auf $[0,T]$ mit $g'_\epsilon(t) = \Phi(t)\Psi(t)$ f.ü. auf $[0,T]$. Wegen (4.24) ist ausserdem

$$g_\epsilon(t) \geq \frac{\epsilon^2}{2} \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

und somit ist auch die Funktion $t \in [0,T] \mapsto \sqrt{g_\epsilon(t)}$ absolut stetig und f.ü. differenzierbar [4] mit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sqrt{g_\epsilon(t)} &= \frac{1}{2\sqrt{g_\epsilon(t)}} g'_\epsilon(t) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g_\epsilon(t)}} \Phi(t)\Psi(t) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}\Phi(t)} \Phi(t)\Psi(t) \qquad \text{(wegen (4.26))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi(t)
\end{aligned}$$

für fast alle $t \in [0,T]$. Durch Integration erhalten wir so

$$\begin{aligned}
\sqrt{g_\epsilon(t)} &\leq \sqrt{g_\epsilon(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \Psi(s)\,ds \\
&= |\Phi(0)| + \epsilon + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \Psi(s)\,ds
\end{aligned}$$

[4] hier wird klar, warum wir die Hilfsfunktion g_ϵ eingeführt haben: die Funktion $g_0(t) = \frac{1}{2}\Phi(0)^2 + \int_0^t \Phi(s)\Psi(s)\,ds$ verschwindet möglicherweise in einem Punkt oder einem Teilintervall von $[0,T]$ und die Funktion $t \mapsto \sqrt{g_0(t)}$ ist dann nicht mehr differenzierbar auf ganz $[0,T]$

für alle $t \in [0, T]$. Mit Hilfe von (4.26) folgt dann (4.27). $\square$

Um aus der Abschätzung (4.23) eine Ungleichung vom Typ (4.21) bzw. (durch Division durch h und Übergang zum Limes mit $h \to 0$) vom Typ (4.20) herzuleiten, benötigt man folgende zusätzliche Eigenschaft der rechten Seite f:

$$\limsup_{h \downarrow 0} \int_0^{T-h} |f(t+h) - f(t)| \, dt \leq Const \cdot h. \tag{4.28}$$

Eine Abschätzung diesen Typs gilt beispielsweise, wenn $f \in W^{1,1}(0, T; H)$ (als Konstante $Const$ kann dann $\int_0^T \left| \frac{d}{d\sigma} f(\sigma) \right| d\sigma$ gewählt werden). Abschätzung (4.28) gilt allgemeiner für Funktionen $f : [0, T] \to H$, die von beschränkter Variation sind, d.h. für die gilt:

$$Var(f, [0, T]) := \sup_{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = T} |f(a_k) - f(a_{k-1}| < \infty.$$

Hierbei wird das Supremum über alle möglichen endlichen Partitionen $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = T$ des Intervalls $[0, T]$ gebildet. $Var(f, [0, T])$ wird die Variation von f auf $[0, T]$ genannt.
Für Funktionen von beschränkter Variation gilt die Abschätzung (4.28) mit $Const = Var(f, [0, T])$.

Man sieht nun leicht, dass für stetige Funktionen f von beschränkter Variation aus (4.23) die Abschätzungen

$$|A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0| + Var(f, [0, T]) \qquad \forall\, t \in [0, T]$$

und

$$|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)| \leq (|Au_0| + Var(f, [0, T]))h \qquad \forall\, t, t+h \in [0, T], \lambda > 0$$

folgen.
Alle weiteren Argumente des Beweises der Konvergenz der approximativen Lösungen u_λ gegen eine starke Lösung des Cauchy-Problems (CP) lassen sich nun problemlos auf den nicht-homogenen Fall übertragen.

Mit Hilfe von Lemma 4.5 lässt sich übrigens auch leicht ein Vergleichsprinzip für starke Lösungen des Cauchy-Problems zu verschiedenen rechten Seiten zeigen.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in folgendem

Satz 4.12
Für alle $u_0 \in D(A)$ und $f \in C([0,T];H)$ mit beschränkter Variation besitzt das nicht-homogene Cauchyproblem (CP) eine eindeutige starke Lösung $u : [0,T] \to H$. Die starke Lösung u besitzt ausserdem folgende Eigenschaften:

- $u(t) \in D(A)$ für alle $t \in [0,T]$
- u ist Lipschitz-stetig, $\dfrac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;H)$

Sind u_1 und u_2 starke Lösungen des Cauchyproblems (CP) zu den Anfangswerten u_0^1 bzw. u_0^2 und rechten Seiten f_1 bzw. f_2, dann gilt:

$$|u_1(t) - u_2(t)| \le |u_0^1 - u_0^2| + \int_0^t |f_1(s) - f_2(s)|\, ds \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{4.29}$$

Für allgemeine rechte Seiten $f \in L^1(0,T;H)$ besitzt das nicht-homogene Cauchy-Problem i.a. keine starke Lösung. Es muss dann ein geeigneter „schwacher" Lösungsbegriff definiert und Eindeutigkeit und Existenz der so definierten schwachen Lösung gezeigt werden. Dies wird ein Gegenstand der Vorlesung DGL III darstellen, in der wir Operator-Differentialgleichungen

$$\frac{du}{dt} + Au = f$$

für nicht-monotone Operatoren A in allgemeinen Banachräumen untersuchen werden.