

Masterarbeit

Balancierte Paare

vorgelegt von

Veit Wiechert

im Studiengang Master Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät II - Institut für Mathematik

Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin



Erstkorrektor: Prof. Stefan Felsner

Zweitkorrektor: Prof. Rolf H. Möhring

Berlin, 13. August 2013

Danksagung

Ich möchte mich bei Professor Stefan Felsner sehr herzlich für die Betreuung und die Inspiration bedanken. Ein weiterer Dank geht an Udo Hoffmann, der sich immer wieder geduldig meine neuen Ideen angehört hat und mich mit hilfreichen Hinweisen versorgte. Bei Linda Kleist möchte ich mich für hilfreiche Kommentare bezüglich der deutschen Sprache bedanken. An dieser Stelle dürfen natürlich auch nicht Richard Sieg, Thomas Hixon, Katinka Becker und Sarah Spönemann fehlen, die im Studentenarbeitsraum stets für eine fröhliche Arbeitsatmosphäre gesorgt haben.

Zusammenfassung

In dieser Masterarbeit beschäftigen wir uns mit balancierten Paaren und der damit verbundenen $1/3$ - $2/3$ Vermutung. Wir berichten über die wichtigsten Entwicklungen zu diesem Problem seit seiner ersten Formulierung im Jahr 1968 durch Kisilitsyn. Dabei konzentrieren wir uns auch auf eine Arbeit von Eppstein, in der die Vermutung auf Antimatroide verallgemeinert wird. Wir werden auf einen Fehler im Beweis für Antimatroide mit Höhe 2 hinweisen. Mit einem Lemma von Eppstein gelingt es uns dann, einen neuen Beweis für die $1/3$ - $2/3$ Vermutung im Fall von Höhe-2 Partialordnungen anzugeben.

Wir knüpfen an die Arbeit von Eppstein an und beschäftigen uns mit Antimatroiden, die über die perfekten Eliminationsschemata von chordalen Graphen definiert sind (kurz: PES-Antimatroide). Wir beweisen grundlegende Eigenschaften von PES-Antimatroiden und zeigen damit in unserem Hauptresultat, dass PES-Antimatroide von Einheits-Intervallgraphen die $1/3$ - $2/3$ Vermutung erfüllen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Problemstellung und Grundkonzepte	4
1.1 Grundbegriffe	4
1.2 Die $1/3$ - $2/3$ Vermutung und balancierte Paare	6
1.3 Annahmen an ein Gegenbeispiel	7
1.4 Durchschnittliche Höhen	9
2 Spezielle Klassen von Partialordnungen	11
2.1 Weite-2 Ordnungen	11
2.2 N-freie Ordnungen	12
2.3 Semiordnungen	14
2.4 Partialordnungen mit Symmetrie	17
3 Ein geometrischer Ansatz mit Brunn-Minkowski	21
4 Der Ansatz von Kahn und Saks	27
4.1 Höhensequenzen	27
4.2 Logkonkavität und die Aleksandrov-Fenchel Ungleichungen	30
4.3 Beweis von Theorem 4.3	33
4.4 Ansatzanalyse	40
4.5 Die Cross Product Conjecture	43
5 Unendliche Partialordnungen	52
6 Sortieren mit partiellen Informationen	56
6.1 Entropie	56
6.2 Sortieren mit Kettenzerlegungen	60
7 Verallgemeinerung für Antimatroide	64
7.1 Balancierte Paare in Antimatroiden	65
7.2 Konvexdimension 2	66
7.3 Höhe-2 Antimatroide	70
8 Perfekte Eliminationsschemata und Antimatroide	76
8.1 Chordale Graphen	76
8.2 k -Bäume	77
8.3 Blockgraphen	81
9 Einheits-Intervallgraphen und Balancierte Paare	84
9.1 Weitere Eigenschaften von PES-Antimatroiden	84
9.2 Einheits-Intervallgraphen	87
10 Schluss	94
Literaturverzeichnis	95

Einleitung

Wir wollen uns in dieser Masterarbeit mit balancierten Paaren in Partialordnungen und Antimatroiden beschäftigen. Direkt verbunden damit ist die sogenannte $1/3$ - $2/3$ Vermutung. Bevor wir diese genauer erläutern, beginnen wir aber mit einem anderen berühmten kombinatorischen Problem.

Sei L eine lineare Ordnung auf den Elementen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, die uns nicht bekannt ist. Wir wollen nun L herausfinden und dürfen Fragen der Art „Ist $i < j$ in L ?“ stellen. Auf die Fragen wird, zum Beispiel durch ein Orakel, sofort mit „Ja“ oder „Nein“ geantwortet und wir können den nächsten Vergleich anstellen. Ziel ist es dann, mit so wenig Fragen wie möglich L zu bestimmen. Sei $f(n)$ die Anzahl der Fragen, die dafür im Allgemeinen notwendig ist. Eine untere Schranke bekommen wir sofort mit der *Information Theoretic Lower Bound* (ITLB). Mit jeder Frage können wir bestenfalls garantieren, dass die Menge der noch möglichen linearen Ordnungen halbiert wird. Also ist $f(n) \geq \log_2(n!)$ und es bleibt zu klären, ob $\log_2(n!)$ Vergleiche genügen. Bereits für kleine n sieht man, dass dies nicht immer möglich ist. Aus Komplexitätstheoretischer Sicht ist deshalb aber interessant, ob $f(n) = \mathcal{O}(\log_2(n!))$ gilt. Dies ist leicht zu beantworten, da wir eine *Binary Insertion Sort* machen können. Denn haben wir eine Teilmenge von $\{1, 2, \dots, n\}$ bereits erfolgreich linear geordnet, so finden wir für ein weiteres Element die Position in dieser Teilordnung mittels binärer Suche in $\lceil \log_2 n \rceil$ Schritten, sodass wir insgesamt mit $n \lceil \log_2 n \rceil$ Fragen auskommen können. Wegen $\log_2(n!) = \Theta(n \log_2 n)$ folgt somit

$$f(n) = \Theta(\log_2(n!)).$$

Wir wollen nun davon ausgehen, dass zu Beginn bereits etwas vorsortiert wurde und partielle Informationen über L vorliegen. Diese Informationen können wir als eine Partialordnung \mathbf{P} auf den Elementen $\{1, 2, \dots, n\}$ auffassen, sodass L einer linearen Erweiterung von \mathbf{P} entspricht. Sei $g(\mathbf{P})$ die Anzahl der Fragen, die im Allgemeinen notwendig ist, um L zu bestimmen. Ist $e(\mathbf{P})$ die Anzahl der linearen Erweiterungen von \mathbf{P} , so folgt mit der ITLB wieder sofort $g(\mathbf{P}) \geq \log_2(e(\mathbf{P}))$ und es bleibt zu klären, ob

$$g(\mathbf{P}) = \mathcal{O}(\log_2(e(\mathbf{P})))$$

gilt. Es ist hier wichtig zu beachten, dass $e(\mathbf{P})$ viel kleiner sein kann als $n!$ und genau das macht das Problem so attraktiv. Erst in den 90er Jahren bemerkte der Bereich der westlichen Mathematik, dass Kislitsyn [23] sich schon 1968 mit diesem Problem beschäftigte. Eine zeitlang ging man stattdessen davon aus, dass dieses Problem auf Fredman [16] zurückgeht. Dieser konnte zeigen, dass

$$g(\mathbf{P}) \leq \log_2(e(\mathbf{P})) + 2n$$

gilt. Diese Beobachtung beantwortet obige Frage aber nur im Fall $e(\mathbf{P}) \in \Omega(2^n)$. Bei beiden Autoren finden wir eine Formulierung der $1/3$ - $2/3$ Vermutung, auch bekannt als *Balanced Pair Conjecture*, die das zentrale Thema dieser Masterarbeit sein wird. Sie besagt, dass jede Partialordnung, die keine Kette ist, verschiedene Elemente x, y besitzt mit

$$\frac{1}{3} \leq \mathbb{P}(x \prec y) \leq \frac{2}{3}.$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{P}(x \prec y)$ die Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig gezogenen linearen Erweiterung x kleiner als y ist. Zufällig heißt hier, dass jede lineare Erweiterung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $1/e(\mathbf{P})$ gezogen wird. Gilt obige Ungleichung für x und y , so wird (x, y) auch *balanciertes Paar* genannt.

Bei Richtigkeit der Vermutung zeigt das Beispiel einer Partialordnung auf drei Elementen mit genau einer Vergleichbarkeit, dass sie bestmöglich ist. Weiterhin könnten wir für die Elemente eines balancierten Paares den Vergleich machen und es blieben höchstens $2/3 \cdot e(\mathbf{P})$ noch mögliche lineare Erweiterungen übrig. Wiederholen wir dies für die jeweiligen balancierten Paare, so bekämen wir

$$g(\mathbf{P}) \leq \left(\log_2 \left(\frac{3}{2} \right) \right)^{-1} \log_2(e(\mathbf{P})) = \mathcal{O}(\log_2(e(\mathbf{P})))$$

und hätten die oben gestellte Frage beantwortet. Die obere Schranke $\mathcal{O}(\log_2(e(\mathbf{P})))$ bekommt man aber genauso gut über eine schwächere Variante der Vermutung. Sie besagt, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha \leq 1/3$ gibt, so dass jede Partialordnung, die keine Kette ist, verschiedene Elemente x, y besitzt, die

$$\alpha \leq \mathbb{P}(x \prec y) \leq 1 - \alpha$$

erfüllen. Ein Beweis dafür und damit auch für das Resultat $g(\mathbf{P}) = \mathcal{O}(\log_2(e(\mathbf{P})))$ gelang zuerst Jeff Kahn und Michael Saks [21] im Jahr 1984 für die Konstante $\alpha = 3/11$. Aber auch unabhängig von dieser Motivation über das Sortieren, hat sich die $1/3$ - $2/3$ Vermutung zu einem wichtigen und spannenden Problem im Bereich der Partialordnungen entwickelt.

Wir wollen in dieser Masterarbeit die bisherigen Ergebnisse dazu zusammentragen und auf aktuelle Resultate hinweisen. Daran anknüpfend werden wir eigene Forschungsergebnisse präsentieren.

Wir beginnen in Kapitel 1 mit den Definitionen der grundlegenden Strukturen und einer exakten Formulierung der $1/3$ - $2/3$ Vermutung. Außerdem werden wir einige Grundkonzepte und Standardtechniken im Umgang mit dieser Vermutung vorstellen.

In Kapitel 2 betrachten wir Klassen von Partialordnungen, für die die Richtigkeit der Vermutung bereits bewiesen wurde. So konnte Linial [25] im Jahr 1984 zeigen, dass Ordnungen mit Weite 2 die Vermutung erfüllen. Mit ähnlichen Techniken lieferte Zaguia [30] 2012 einen Beweis für N -freie Partialordnungen. Weiterhin behandeln wir den Beweis von Brightwell [4], der 1989 zeigte, dass Semiordnungen die Vermutung erfüllen. Abschließend betrachten wir in diesem Kapitel Partialordnungen mit nicht-trivialen Automorphismen. Ganter, Häfner und Poguntke [17] untersuchen in ihrer Arbeit aus dem Jahr 1987, in welchen Fällen solche Ordnungen sogar perfekt balanciert sind.

Einen Beweis für die schwächere Variante der Vermutung wollen wir uns in Kapitel 3 anschauen. Er stammt von Kahn und Linial [22] aus dem Jahr 1991. Dort zeigen sie die Vermutung für $\alpha = 1/2e$ und benutzen dafür das Brunn-Minkowski Theorem aus der Konvexgeometrie. Wie bereits erwähnt, hatten zuvor schon Kahn und Saks [21] die Richtigkeit der schwächeren Vermutung im Fall $\alpha = 3/11$ gezeigt. Wir behandeln ihren Ansatz ausführlich in Kapitel 4. Auch wenn es dort teilweise sehr

technisch wird, so ist eine genaue Analyse doch sehr interessant. Sie benutzen beispielsweise die Aleksandrov-Fenchel Ungleichungen aus der Konvexgeometrie um die Logkonkavität bestimmter Sequenzen nachzuweisen. Aufbauend auf ihre Methoden können Brightwell, Felsner und Trotter in ihrem Artikel [5] von 1995 die schwächere Vermutung für $\alpha = (5 - \sqrt{5})/10$ beweisen. Interessanterweise zeigen sie sogar, dass man dieses Resultat auf unendliche Ordnungen erweitern kann. Mit einem zuerst von Linial [25] betrachteten Beispiel ist dann sogar klar, dass das Resultat im unendlichen Fall bestmöglich ist. Unendliche Partialordnungen behandeln wir aber getrennt davon in Kapitel 5.

Aktuell wird es in Kapitel 6, in dem wir auf eine in 2013 veröffentlichte Arbeit von Eppstein eingehen wollen. Er verallgemeinert dort die $1/3$ - $2/3$ Vermutung auf Antimatroide, die er auch sogleich für einige Klassen von Antimatroiden zeigen kann. Allerdings behauptet er auch einen Beweis für Höhe-2 Antimatroide gefunden zu haben, doch wie wir sehen werden befindet sich ein Fehler in seiner Argumentation. Mit einem Lemma von Eppstein können wir dann aber einen neuen Beweis der Vermutung für Partialordnungen mit Höhe 2 angeben. Weiterhin untersucht er Antimatroide, die über die Perfekten Eliminationsschemata von chordalen Graphen definiert sind (kurz: PES-Antimatroide). Er zeigt, dass PES-Antimatroide von k -Bäumen und Blockgraphen die Vermutung erfüllen.

In Kapitel 7 knüpfen wir dann an die Arbeit von Eppstein an und stellen eigene Ergebnisse zu PES-Antimatroiden vor. So erarbeiten wir zunächst Eigenschaften von PES-Antimatroiden und können damit einen weiteren Beweis für PES-Antimatroide von Bäumen angeben. Abschließen werden wir dann diese Masterarbeit mit unserem Hauptresultat. Wir zeigen, dass PES-Antimatroide von Einheits-Intervallgraphen balancierte Paare besitzen und diese folglich die $1/3$ - $2/3$ Vermutung erfüllen.

Ich wünsche viel Spaß beim Lesen.

1 Problemstellung und Grundkonzepte

Wir wollen zunächst noch etwas ausführlicher auf die für uns wichtigen mathematischen Strukturen eingehen. Dazu gehören vorrangig die *Partialordnungen* und die damit verbundenen mathematischen Objekte.

1.1 Grundbegriffe

Definition 1.1. Eine *Partialordnung* \mathbf{P} ist ein Paar, bestehend aus einer *Grundmenge* X und einer binären Relation \leq auf X , die für alle $x, y, z \in X$ folgende Eigenschaften erfüllt:

- $x \leq x$ (reflexiv)
- $x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$ (antisymmetrisch)
- $x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$ (transitiv).

In der Literatur findet man einige weitere Begriffe für Partialordnungen. Sie werden auch *partielle Ordnungen*, *Halbordnungen* oder auch einfach nur *Ordnungen* genannt. Wir werden oft verkürzt $x \in \mathbf{P}$ schreiben und meinen damit natürlich, dass x ein Element der Grundmenge von \mathbf{P} ist. Wenn nicht genauer angegeben, wird die Relation von \mathbf{P} mit \leq bezeichnet.

Bemerkung 1.1. Eine Partialordnung $\mathbf{P} = (X, \leq)$ kann auch äquivalent über eine irreflexive und transitive Relation $<$ beschrieben werden. Der Unterschied zwischen \leq und $<$ ist dann, dass in $<$ die reflexiven Relationen $x \leq x$ fehlen. Wir werden diese Beschreibung ebenfalls benutzen, da sich dies in einigen Fällen anbieten wird.

Schauen wir uns nun ein paar Beispiele an. Jedes endliche Mengensystem von endlichen Mengen bildet mit der Inklusionsordnung \subseteq eine Partialordnung. Bekannteste Ordnung dieser Art ist der *Boolesche Verband* B_n , der die Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ als Grundmenge hat. Abbildung 1.1 zeigt B_3 , wobei die Mengenrelationen, die über Transitivität gefolgert werden können, nicht eingezeichnet wurden.

Ein weiteres Beispiel ist eine endliche Menge von natürlichen Zahlen zusammen mit der Teilbarkeitsrelation, das heißt es gilt genau dann $n \leq m$, wenn n die Zahl m

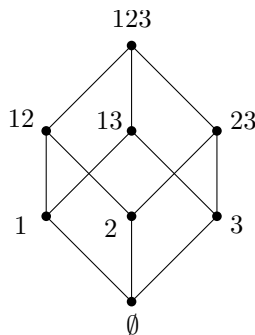


Abbildung 1.1: Boolescher Verband B_3

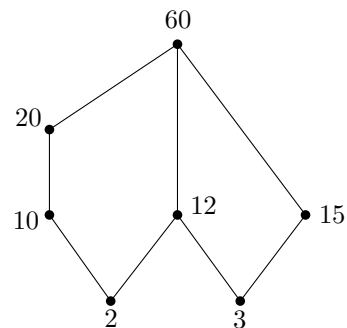


Abbildung 1.2: Teilbarkeitsordnung

teilt. Man überprüft leicht die drei Eigenschaften aus der Definition. Abbildung 1.2 zeigt hierfür ein Beispiel.

Es gibt natürlich auch viele Partialordnungen, in denen die Grundmenge X nicht endlich ist. So kann die Menge der Abbildungen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Relation

$$f \leq g : \iff f(x) \leq_{\mathbb{R}} g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

partiell geordnet werden. Aber auch einfach \mathbb{R} zusammen mit der gewöhnlichen kleiner-gleich-Relation bildet eine Ordnung. Wenn nicht ausdrücklich auf den unendlichen Fall hingewiesen, werden wir aber nur mit endlichen Partialordnungen arbeiten. Es folgen ein paar elementare Definitionen.

Zwei unterschiedliche Elemente $x, y \in X$ einer Partialordnung $\mathbf{P} = (X, \leq)$ sind *vergleichbar*, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$ in \mathbf{P} gilt. Ist dies nicht der Fall, so sind sie *unvergleichbar* und wir schreiben $x \parallel y$. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt *Kette* von \mathbf{P} , wenn die Elemente aus K paarweise vergleichbar sind. Ist \mathbf{P} selber eine Kette, so ist \mathbf{P} eine *lineare Ordnung*. Entsprechend heißt eine Teilmenge $A \subseteq X$ *Antikette* von \mathbf{P} , wenn die Elemente aus A paarweise unvergleichbar sind. Die *Höhe* von \mathbf{P} , bezeichnet mit $h(\mathbf{P})$, ist dann die Länge einer längsten Kette von \mathbf{P} und analog ist die *Weite* von \mathbf{P} , bezeichnet mit $w(\mathbf{P})$, die Größe einer größten Antikette. So haben die Beispiele aus den obigen Abbildungen jeweils Weite 3 und Höhe 4. Weiterhin nennen wir ein Element $x \in X$ *minimal* (bzw. *maximal*), wenn es kein $y \in X \setminus \{x\}$ gibt mit $y \leq x$ (bzw. $x \leq y$). Sei dann $\text{Min}(\mathbf{P})$ die Menge der minimalen Elemente von \mathbf{P} und $\text{Max}(\mathbf{P})$ entsprechend die Menge der maximalen Elemente von \mathbf{P} .

Definition 1.2. Sei $\mathbf{P} = (X, \leq)$ eine Partialordnung. Eine Teilmenge $I \subseteq X$ heißt *Ideal*, wenn für alle $x \in X$ und alle $y \in I$ folgende Implikation gilt:

$$x \leq y \implies x \in I.$$

Hat ein Ideal I einen Erzeuger, das heißt es existiert ein $y \in X$ mit $I = \{x \in X \mid x \leq y\}$, so nennen wir I auch *Hauptideal*. Jedes Element $y \in X$ erzeugt demnach ein Hauptideal, das wir mit $I[y]$ bezeichnen wollen. Weiterhin sei $I(y) = I[y] \setminus \{y\}$.

Analog dazu ist $F \subseteq X$ ein *Filter*, wenn für alle $x \in X$ und alle $y \in F$ gilt:

$$y \leq x \implies x \in F.$$

Der von y erzeugte Filter wird dann mit $F[y]$ bezeichnet.

In B_3 aus Abbildung 1.1 ist dann $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ zum Beispiel ein Ideal, aber kein Hauptideal. Das Element $\{1, 3\}$ von B_3 erzeugt das Hauptideal $\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$.

Definition 1.3. Ist $\mathbf{P} = (X, \leq)$ eine Partialordnung, so heißt $\mathbf{Q} = (Y, \leq')$ induzierte Teilordnung von \mathbf{P} , wenn $Y \subseteq X$ gilt und wenn die Relation \leq' die Einschränkung von \leq auf die Elemente aus Y ist, das heißt $\leq' = \leq \cap (Y \times Y)$.

Kommen wir nun zu den *linearen Erweiterungen*, die im nächsten Unterkapitel für die Definition der balancierten Paare wichtig werden.

Definition 1.4. Sei $\mathbf{P} = (X, \leq)$ eine Partialordnung. Eine lineare Ordnung L auf der Menge X heißt *lineare Erweiterung* von \mathbf{P} , wenn sie die Relation von \mathbf{P} respektiert, das heißt wenn für alle verschiedenen $x, y \in X$ gilt:

$$x \leq y \implies x < y \text{ in } L.$$

Gilt $x < y$ in L , so sagen wir auch oft vereinfacht, dass x in L vor y steht.

Schauen wir uns dazu wieder ein Beispiel für B_3 an. Folgende lineare Ordnung ist eine lineare Erweiterung davon.

$$L = \emptyset < \{1\} < \{2\} < \{1, 2\} < \{3\} < \{1, 3\} < \{2, 3\} < \{1, 2, 3\}.$$

Ausgehend von einer Partialordnung wollen wir uns nun zwei wichtige Graphen definieren. Wir setzen an dieser Stelle grundlegendes Wissen aus der Graphentheorie voraus.

Definition 1.5. Sei $\mathbf{P} = (X, \leq)$ eine Partialordnung. Der *Vergleichbarkeitsgraph* von \mathbf{P} hat X als Knotenmenge und zwei verschiedene Knoten $x, y \in X$ sind genau dann über eine Kante verbunden, wenn x und y in \mathbf{P} vergleichbar sind. Wir bezeichnen diesen Graphen mit $G(\mathbf{P})$.

Definition 1.6. Sei $\mathbf{P} = (X, \leq)$ eine Partialordnung. Für verschiedene $x, y \in X$ nennen wir eine Relation $x \leq y$ auch *Coverrelation*, wenn es kein $z \in X \setminus \{x, y\}$ gibt mit $x \leq z \leq y$.

Der Covergraph von \mathbf{P} hat dann X als Knotenmenge und zwei verschiedene Knoten $x, y \in X$ sind genau dann über eine Kante verbunden, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$ eine Coverrelation ist.

In den Abbildungen 1.1 und 1.2 haben wir Covergraphen dargestellt. Mehr noch, Coverrelationen wurden durch y -monotone stetige Kurven repräsentiert. Eine Zeichnung mit diesen Eigenschaften wird auch *Hasse-Diagramm* oder einfach nur *Diagramm* genannt.

1.2 Die $1/3$ - $2/3$ Vermutung und balancierte Paare

Ist \mathbf{P} eine Partialordnung, so wollen wir die Menge der linearen Erweiterungen von \mathbf{P} mit $E(\mathbf{P})$ bezeichnen. Die Anzahl der linearen Erweiterungen sei dann $e(\mathbf{P})$. Sind x und y zwei unvergleichbare Elemente von \mathbf{P} , so wollen wir nun zu \mathbf{P} die Relation $x \leq y$ hinzufügen. Im Allgemeinen erhält man keine Partialordnung, da die neue Relation nicht transitiv sein muss. Fügt man nun einfach alle Relationen hinzu, die durch Transitivität gefolgert werden können, so erhalten wir eine Partialordnung, die wir mit $\mathbf{P}(x < y)$ bezeichnen wollen. Die linearen Erweiterungen von $\mathbf{P}(x < y)$ sind dann genau die linearen Erweiterungen von \mathbf{P} , in denen x vor y steht. Mit diesen Bezeichnungen definieren wir für verschiedene $x, y \in \mathbf{P}$

$$\mathbb{P}(x \prec y) := \frac{e(\mathbf{P}(x < y))}{e(\mathbf{P})}.$$

Fassen wir die Menge der linearen Erweiterungen von \mathbf{P} als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum auf, in der jede lineare Erweiterung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $1/e(\mathbf{P})$ gezogen wird, so entspricht $\mathbb{P}(x \prec y)$ also der Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig gezogenen linearen Erweiterung x vor y steht. Sinnvollerweise bezeichne $x \prec y$ das Ereignis, dass x vor y steht.

Damit können wir die $1/3$ - $2/3$ Vermutung formulieren, die das zentrale Thema dieser Arbeit ist.

$1/3$ - $2/3$ Vermutung. *Ist \mathbf{P} eine Partialordnung, die keine Kette ist, so existieren verschiedene $x, y \in \mathbf{P}$ mit*

$$\frac{1}{3} \leq \mathbb{P}(x \prec y) \leq \frac{2}{3}.$$

Sollte die Vermutung richtig sein, so zeigt die Partialordnung auf drei Elementen mit genau einer Vergleichbarkeit, dass sie bestmöglich ist. Sie geht wohl zurück auf Kislitsyn [23], der diese bereits 1968 in einem russischen Artikel formuliert hat. Von der westlichen Mathematik nicht richtig beachtet, stellte 1976 Fredman [16] die Vermutung unabhängig davon auf. Bei beiden ist das Sortieren mit partiellen Informationen eine Motivation dafür gewesen. Seitdem haben sich viele Mathematiker mit diesem Problem beschäftigt, so dass es zu einem der wichtigsten Probleme auf dem Gebiet der Partialordnungen avancierte. Wir werden uns in dieser Arbeit mit den wichtigsten Veröffentlichungen zu diesem Problem beschäftigen. Doch bevor wir damit beginnen, müssen wir noch etwas Vorarbeit leisten.

Sei \mathbf{P} wieder eine Partialordnung mit verschiedenen Elementen x und y . Wir sagen dann das Paar (x, y) ist α -balanciert für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha \leq 0.5$, wenn gilt:

$$\alpha \leq \mathbb{P}(x \prec y) \leq 1 - \alpha.$$

Im konkreten Fall $\alpha = 1/3$ nennen wir ein solches Paar auch vereinfacht *balanciert*. Eine Partialordnung heißt *balanciert*, wenn sie ein balanciertes Paar besitzt. Die $1/3$ - $2/3$ Vermutung ist dann äquivalent zu der Behauptung, dass bis auf Ketten jede Partialordnung balanciert ist.

Uns wird es auch oft interessieren, welches Paar einer Partialordnung am meisten balanciert ist. Anhand dieses Paares wollen wir die *Balance* $\delta(\mathbf{P})$ einer Partialordnung \mathbf{P} definieren. Das heißt

$$\delta(\mathbf{P}) := \max_{x, y \in \mathbf{P}} \min\{\mathbb{P}(x \prec y), \mathbb{P}(y \prec x)\}.$$

Eine weitere Beschreibung der Vermutung ist dann die Behauptung, dass jede Partialordnung \mathbf{P} , die keine Kette ist, die Ungleichung $\delta(\mathbf{P}) \geq 1/3$ erfüllt.

1.3 Annahmen an ein Gegenbeispiel

Wenn wir die Richtigkeit der $1/3$ - $2/3$ Vermutung für eine Klasse von Partialordnungen zeigen wollen, ist es häufig sinnvoll dies über einen indirekten Beweis zu machen. Das heißt wir nehmen an, dass ein Gegenbeispiel existiert. Und für genau diese Gegenbeispiele ist die folgende Relation sehr nützlich.

Definition 1.7. Sei \mathbf{P} eine Partialordnung. Wir definieren die Relation \ll auf der Grundmenge von \mathbf{P} . Für verschiedene $x, y \in \mathbf{P}$ gilt

$$x \ll y \iff \mathbb{P}(x \prec y) > \frac{2}{3}.$$

Das nächste Lemma geht wohl auf Pouzet zurück.

Lemma 1.1. Sei \mathbf{P} eine Partialordnung, die nicht balanciert ist. Dann definiert die Relation \ll auf der Grundmenge von \mathbf{P} eine lineare Ordnung.

Beweis. Da \mathbf{P} nicht balanciert ist, folgt sofort, dass die Elemente von \mathbf{P} bezüglich \ll paarweise vergleichbar sind. Zu zeigen bleibt, dass \ll eine Partialordnung definiert. Mit unserer Definition folgt sofort die Irreflexivität. Nehmen wir nun an, dass $x \ll y$ und $y \ll z$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x \prec z) &\geq \mathbb{P}(x \prec y \prec z) \\ &= 1 - \mathbb{P}(y \prec x \text{ oder } z \prec y) \\ &\geq 1 - \mathbb{P}(y \prec x) - \mathbb{P}(z \prec y) \\ &> 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Da \mathbf{P} nicht balanciert ist, folgt dann aber sogar $\mathbb{P}(x \prec z) > 2/3$ und somit $x \ll z$, was die Transitivität zeigt. \square

Für die Arbeit mit Gegenbeispielen wird die folgende Bemerkung immer mal wieder sinnvoll sein.

Bemerkung 1.2. Hat \mathbf{P} ein globales Minimum x , das heißt es gilt $x \leq y$ in \mathbf{P} für alle $y \in \mathbf{P}$, so beginnt jede lineare Erweiterung von \mathbf{P} mit x . Entfernen wir x von den linearen Erweiterungen, so bekommen wir genau die linearen Erweiterungen von $\mathbf{P}' = \mathbf{P} \setminus \{x\}$. Folglich stimmt die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(y \prec z)$ für alle $y, z \neq x$ in \mathbf{P}' und \mathbf{P} überein. Diese Überlegung lässt sich natürlich auch für globale Maxima anstellen.

Wir können die eben gemachte Beobachtung sogar auf *lineare Summen* ausweiten. Dabei heißt eine Partialordnung $\mathbf{P} = (X, \leq)$ *lineare Summe*, wenn sich die Grundmenge X so als disjunkte Vereinigung von nichtleeren Mengen A und B schreiben lässt, dass $x \leq y$ für alle $x \in A$ und alle $y \in B$ gilt. Bezeichne \mathbf{P}' dann die auf A induzierte Ordnung und \mathbf{P}'' die auf B induzierte Ordnung.

Bemerkung 1.3. Jede lineare Erweiterung von \mathbf{P} beginnt notwendigerweise mit einer linearen Erweiterung von \mathbf{P}' , gefolgt von einer linearen Erweiterung von \mathbf{P}'' . Schränkt man diese auf die Elemente aus \mathbf{P}' ein, so bekommen wir diese Einschränkung bei genau $e(\mathbf{P}'')$ vielen Erweiterungen von \mathbf{P} . Also gilt auch $e(\mathbf{P}) = e(\mathbf{P}')e(\mathbf{P}'')$. Damit ist ebenfalls klar, dass die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(x \prec y)$ für verschiedene $x, y \in A$ in \mathbf{P} und \mathbf{P}' übereinstimmt. Analoges gilt für \mathbf{P} und \mathbf{P}'' .

Ist \mathbf{P} ein Gegenbeispiel zur $1/3$ - $2/3$ Vermutung, so können wir also annehmen, dass \mathbf{P} keine lineare Summe ist.

1.4 Durchschnittliche Höhen

Viele Ansätze zum Lösen der $1/3$ - $2/3$ Vermutung benutzen die durchschnittliche Höhe eines Elementes in einer linearen Erweiterung. Ist \mathbf{P} eine Partialordnung, so definieren wir uns die *Höhe* $h_\sigma(x)$ eines Elementes $x \in \mathbf{P}$ zu einer gegebenen linearen Erweiterung $\sigma \in E(\mathbf{P})$ als die Position von x in σ . Anders gesagt gibt $h_\sigma(x)$ die Anzahl der Vorgänger von x in σ vermehrt um eins an. Die *durchschnittliche Höhe* von $x \in \mathbf{P}$ ist dann

$$h(x) = \frac{1}{e(\mathbf{P})} \sum_{\sigma \in E(\mathbf{P})} h_\sigma(x).$$

Wir wollen uns an dieser Stelle gleich mal anschauen, wie man diese Höhen und die Relation \ll aus dem vorigen Abschnitt sinnvoll benutzen kann.

Hat eine Partialordnung \mathbf{P} ein Element x , das zu allen anderen Elementen der Ordnung unvergleichbar ist, so nennen wir x *unabhängig*. Es gilt dann das folgende Theorem, das wir mit den Ideen von Eppstein aus [11] beweisen.

Theorem 1.1 ([11]). *Hat die Partialordnung \mathbf{P} (mit mindestens 2 Elementen) ein unabhängiges Element, so ist sie balanciert.*

Beweis. Sei $x \in \mathbf{P}$ ein unabhängiges Element. Haben wir eine lineare Erweiterung σ von \mathbf{P} gegeben, so können wir uns die Einschränkung von σ auf die Elemente aus $\mathbf{P}' := \mathbf{P} \setminus \{x\}$ anschauen. Da x unabhängig ist, bekommen wir jede Einschränkung und damit jede lineare Erweiterung von \mathbf{P}' genau $|\mathbf{P}|$ mal. Auch die Anzahlen der linearen Erweiterungen von \mathbf{P} und \mathbf{P}' unterscheiden sich um den Faktor $|\mathbf{P}|$, sodass die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(y \prec z)$ in \mathbf{P}' und \mathbf{P} übereinstimmt. Ist die Partialordnung \mathbf{P}' balanciert, so ist dies also auch \mathbf{P} .

Angenommen \mathbf{P}' ist nun nicht balanciert. Die Relation \ll definiert dann auf den Elementen von \mathbf{P}' eine lineare Ordnung $y_0 \ll y_1 \ll \dots \ll y_{n-2}$. Sei σ eine lineare Erweiterung von \mathbf{P}' . Da x unabhängig ist, gibt es dann genau $h_\sigma(y_i)$ viele lineare Erweiterungen von \mathbf{P} , die x vor y_i stehen haben und die σ als Einschränkung auf die Elemente aus \mathbf{P}' besitzen. Ist $n := |\mathbf{P}|$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x \prec y_i) &= \frac{1}{e(\mathbf{P})} \sum_{\sigma \in E(\mathbf{P}')} h_\sigma(y_i) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{e(\mathbf{P}')} \sum_{\sigma \in E(\mathbf{P}')} h_\sigma(y_i) = \frac{1}{n} h(y_i). \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass ein $y_i \in \mathbf{P}'$ existiert mit

$$\frac{1}{3}n \leq h(y_i) \leq \frac{2}{3}n.$$

Um das zu zeigen definieren wir uns zu verschiedenen $y, z \in \mathbf{P}'$ Zufallsvariablen Z_y und Z_y^z durch

$$\begin{aligned} Z_y(\sigma) &= \text{Anzahl der Vorgänger von } y \text{ in } \sigma \\ Z_y^z(\sigma) &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } z \text{ vor } y \text{ in } \sigma \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Mit der Definition folgt sofort

$$Z_y(\sigma) = \sum_{z \in \mathbf{P}' \setminus \{y\}} Z_y^z(\sigma) \quad \text{und} \quad h_\sigma(y) = Z_y(\sigma) + 1.$$

Wir wollen jetzt die zu erwartende Höhe $h(y_i)$ nach unten abschätzen und dabei ausnutzen, dass sie der zu erwartenden Anzahl von Vorgängern in einer linearen Erweiterung vermehrt um 1 entspricht. Mit der Linearität des Erwartungswertes folgt

$$\begin{aligned} h(y_i) &= 1 + \mathbb{E}(Z_{y_i}) = 1 + \sum_{z \in \mathbf{P}' \setminus \{x\}} \mathbb{E}(Z_{y_i}^z) \\ &\geq 1 + \sum_{0 \leq j < i} \mathbb{E}(Z_{y_i}^{y_j}) \\ &= 1 + \sum_{0 \leq j < i} \mathbb{P}(y_j \prec y_i) > 1 + \frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

Mit analogen Argumenten für die zu erwartende Anzahl an Nachfolgern in einer linearen Erweiterung, bekommen wir die Ungleichung $h(y_i) < n - \frac{2}{3}(n - 1 - i)$. Wählt man nun $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, so erhalten wir sogar

$$\frac{1}{3}n < h(y_i) < \frac{2}{3}n.$$

□

2 Spezielle Klassen von Partialordnungen

In diesem Kapitel wollen wir uns Beweise anschauen, die zeigen, dass die $1/3$ - $2/3$ Vermutung für bestimmte Klassen von Partialordnungen richtig ist. Wir beginnen mit den Weite-2 Ordnungen, mit denen sich Linial bereits 1984 beschäftigt hat. Seine Arbeit gehört, seit Bekanntwerden der Vermutung um 1976, zu den ersten Beiträgen auf diesem Gebiet. Linials Technik lässt sich auch auf N -freie Ordnungen anwenden, so dass wir diese im Anschluss behandeln, obwohl das Resultat erst 2012 durch Zaguia bekannt wurde. Danach beschäftigen wir uns mit Semiordnungen, einer Subklasse der Intervallordnungen, und der zugehörigen Arbeit von Brightwell aus dem Jahr 1989. Das Kapitel abschließen wollen wir dann mit einem nicht allzu sehr beachteten Artikel von Ganter, Häfner und Poguntke über Partialordnungen mit Symmetrie, den wir sehr interessant finden und deshalb näher betrachten wollen.

2.1 Weite-2 Ordnungen

Die Weite $w(\mathbf{P})$ einer Partialordnung \mathbf{P} hatten wir definiert als die Anzahl der Elemente in einer größten Antikette, das heißt

$$w(\mathbf{P}) := \max_{A \text{ Antikette}} |A|.$$

Partialordnungen mit Weite w können nach Dilworth [10] in w disjunkte Ketten zerlegt werden. Beschränken wir uns auf den Fall $w(\mathbf{P}) = 2$, so betrachten wir also Ordnungen $\mathbf{P} = (A \cup B, <)$ mit disjunkten Mengen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, die in \mathbf{P} bereits eine Kette bilden, das heißt es gilt

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \quad \text{und} \quad b_1 < b_2 < \dots < b_m.$$

Das folgende Theorem geht auf Linial [25] zurück.

Theorem 2.1. *Ist \mathbf{P} eine Partialordnung der Weite 2, so ist \mathbf{P} balanciert.*

Beweis. Sei also $\mathbf{P} = (A \cup B, <)$ eine Ordnung der Weite 2. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass a_n und b_m unvergleichbar sind, denn andernfalls gäbe es ein globales Maximum, dessen Existenz wir nach Bemerkung 1.2 ausschließen dürfen.

Angenommen das Theorem ist für \mathbf{P} nicht erfüllt. Dann können wir aufgrund der Symmetrie annehmen, dass $\mathbb{P}(b_m \prec a_n) < 1/3$ gilt und definieren jetzt

$$\begin{aligned} q_m &= \mathbb{P}(b_m \prec a_n) \\ q_i &= \mathbb{P}(b_i \prec a_n \prec b_{i+1}) \quad \text{für } 1 \leq i \leq m-1 \\ q_0 &= \mathbb{P}(a_n \prec b_1). \end{aligned}$$

Damit gilt dann $q_i \leq q_{i+1}$ für alle $i = 0, \dots, m-1$. Hat man nämlich eine zu q_i gehörende lineare Erweiterung L mit $b_i < a_n < b_{i+1}$, so muss a_n in L direkt vor b_{i+1} stehen. Weiterhin sind a_n und b_{i+1} unvergleichbar und wir können die

beiden Elemente in L vertauschen, um eine zu q_{i+1} gehörende lineare Erweiterung zu bekommen. Da die Vertauschung eine injektive Abbildung beschreibt, gilt folglich

$$q_0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_m < \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Es ist auch klar, dass $\sum_{i=0}^m q_i = 1$ gilt, da die Ereignisse in der Definition der q_i disjunkt sind und die Menge der linearen Erweiterungen von \mathbf{P} überdecken. Wir definieren nun $r \in \mathbb{N}$ als die größte Zahl, so dass $\sum_{i=0}^{r-1} q_i \leq 1/2$ ist. Da nun auch $\sum_{i=0}^{r-1} q_i = \mathbb{P}(a_n < b_r)$ gilt, folgt mit unserer Annahme sogar $\sum_{i=0}^{r-1} q_i < 1/3$. Nach Definition von r gilt $\sum_{i=0}^r q_i > 1/2$ und es folgt analog wie eben $\sum_{i=0}^r q_i > 2/3$, was aber $q_r > 1/3$ bedeutet. Dies ist ein Widerspruch zu Ungleichung (1) und wir sind fertig. \square

Linial beschäftigt sich in seinem Artikel auch noch mit der Frage, wie schnell wir hier ein balanciertes Paar finden können. Er zeigt, dass dies in polynomialer Zeit geschehen kann. Wir wollen hier aber nicht näher darauf eingehen, da wir dieses Thema in dem Kapitel über das Sortieren unter partiellen Informationen ausführlich behandeln.

2.2 N-freie Ordnungen

Die gleiche Technik, die wir im vorigen Abschnitt benutzt haben, kann man für einen Beweis verwenden, der die $1/3$ - $2/3$ Vermutung für eine weitere Klasse von Partialordnungen zeigt. Die Klasse wird durch folgende Definition beschrieben.

Definition 2.1. Eine Partialordnung \mathbf{P} heißt *N-frei*, wenn es keine unterschiedlichen Elemente $a, b, c, d \in \mathbf{P}$ gibt, so dass $a \leq b$, $c \leq b$ und $c \leq d$ in \mathbf{P} Coverrelationen sind und es keine weiteren Vergleichbarkeiten zwischen diesen Elementen gibt.

Erfüllen vier Elemente die Bedingungen aus der Definition, so sagen wir auch, dass sie ein N bilden. Wir nennen diese Ordnungen N -frei, da wir andernfalls im Hasse-Diagramm der Partialordnung ein gezeichnetes „ N “ finden würden. Abbildung 2.1 zeigt links eine Partialordnung, die ein N bildet, und rechts eine N -freie Ordnung. Dabei ist zu beachten, dass man im rechten Beispiel zwar Elemente a, b, c, d findet, die die Vergleichbarkeiten der Definition einhalten, aber die zugehörigen Relationen nicht allesamt Coverrelationen sein können.

In einem relativ aktuellen Artikel aus dem Jahr 2012 zeigt Imed Zaguia folgendes Theorem.



Abbildung 2.1: Ein N und eine N -freie Ordnung

Theorem 2.2 ([30]). *Ist \mathbf{P} eine N-freie Partialordnung und keine Kette, so ist \mathbf{P} balanciert.*

Es war nach längerer Pause wieder ein Resultat zum Thema $1/3$ - $2/3$ Vermutung. Dabei ist es auch etwas verblüffend, dass eigentlich „nur“ elementare strukturelle Eigenschaften von N-freien Ordnungen und die Beweisidee vom Weite-2-Fall benutzt wurden. Wie wir später sehen werden, wenn wir Antimatroide behandeln, besitzen Partialordnungen der Weite 2 sogenannte Doppelleitern, die unter anderem die Existenz von balancierten Paaren implizieren. Zaguia zeigt eigentlich, dass N-freie Partialordnungen ebenfalls Doppelleitern besitzen. Wir wollen an dieser Stelle aber noch auf diese Begrifflichkeit verzichten.

Konzentrieren wir uns nun zuerst auf elementare Eigenschaften von N-freien Ordnungen. Dafür betrachten wir die kanonische Antikettenzerlegung einer Partialordnung \mathbf{P} , die durch folgende Vorschrift definiert ist:

$$A_1 = \text{Min}(\mathbf{P})$$

$$A_i = \text{Min}(\mathbf{P}_i) \quad \text{wobei} \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{P} \setminus \bigcup_{1 \leq l \leq i-1} A_l$$

Damit zerlegen wir \mathbf{P} in seine *Level*, die Antiketten sind. Für $x \in \mathbf{P}$ sei nun $N^+(x)$ (bzw. $N^-(x)$) die Menge der Elemente $y \in \mathbf{P}$, für die $x \leq y$ (bzw. $y \leq x$) eine Coverrelation in \mathbf{P} ist.

Lemma 2.1 ([30]). *Sei \mathbf{P} eine N-freie Partialordnung mit Antikettenzerlegung A_1, \dots, A_h . Für jedes $x \in \mathbf{P}$ existiert dann ein Level A_i , so dass $N^+(x) \subseteq A_i$ gilt.*

Beweis. Angenommen das Lemma gilt nicht, dann gibt es ein $x \in \mathbf{P}$ und Elemente $y, z \in N^+(x)$, die in unterschiedlichen Leveln liegen. Das heißt $y \in A_j$ und $z \in A_k$ für $j \neq k$. Sei o.B.d.A. j kleiner als k . Die Elemente y und z sind unvergleichbar, da andernfalls $x \leq z$ keine Coverrelation wäre. Weiterhin ist z nach Konstruktion der Level in $N^+(a)$ eines Elementes $a \in A_{k-1}$. Dieses a kann nicht kleiner als x oder y sein, da $k-1 \geq j$, und auch nicht größer als x oder y sein, da wir im ersten Fall dann wieder keine Coverrelation zwischen x und z hätten und im zweiten Fall y und z doch vergleichbar wären. Somit ist a unvergleichbar zu x bzw. y und die Elemente x, y, z, a bilden ein N im Widerspruch zur N-Freiheit von \mathbf{P} . \square

Lemma 2.2 ([30]). *Sei \mathbf{P} eine N-freie Partialordnung, und keine Kette, mit Antikettenzerlegung A_1, \dots, A_h und sei i maximal gewählt mit der Eigenschaft, dass das Level A_i zwei Elemente x, y mit $N^-(x) = N^-(y)$ besitzt. Für jedes $x \in A_i$ ist dann der Filter $F[x]$ eine Kette.*

Beweis. Dass so ein i wie in der Behauptung gewählt werden kann ist klar, da wir nach Bemerkung 1.2 annehmen können, dass A_0 mindestens zwei Elemente besitzt.

Angenommen es gibt nun ein $x \in A_i$, so dass $F[x]$ keine Kette ist. Dann gibt es ein $y \in F[x]$ mit verschiedenen $z_1, z_2 \in N^+(y)$. Diese liegen nach Lemma 2.1 im gleichen Level A_j für ein $j > i$ und sind somit unvergleichbar. Nun ist $N^-(z_1) \cap N^-(z_2) \neq \emptyset$

und nach Wahl von i muss es dann aber ein Element a geben, das in $N^-(z_1)$ liegt, aber nicht in $N^-(z_2)$ (oder umgekehrt). Die Elemente a und z_2 sind somit unvergleichbar. Weiterhin können aufgrund der bisherigen Coverrelationen auch a und y nicht vergleichbar sein und folglich bilden die Elemente a, z_1, y, z_2 ein N, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Beweis von Theorem 2.2. Sei \mathbf{P} eine N-freie Partialordnung. Wir wollen nun zeigen, dass \mathbf{P} balanciert ist. Wir können wieder annehmen, dass \mathbf{P} kein globales Minimum besitzt. Sei A_1, \dots, A_h die kanonische Antikettenzerlegung von \mathbf{P} und $i \in \{1, \dots, h\}$ so gewählt wie in Lemma 2.2. Das heißt also, dass es Elemente $a, b \in A_i$ gibt mit $N^-(a) = N^-(b)$ und dass die Filter $F[a]$ und $F[b]$ Ketten sind. Angenommen nun \mathbf{P} sei nicht balanciert, o.B.d.A. sei dann $\mathbb{P}(a \prec b) < 1/3$. Die Kette $F[b]$ bezeichnen wir mit $b = b_1 < b_2 < \dots < b_k$. Analog zu Theorem 2.1 definieren wir

$$\begin{aligned} q_0 &= \mathbb{P}(a \prec b_1) \\ q_j &= \mathbb{P}(b_j \prec a \prec b_{j+1}) \quad \text{für } 1 \leq j \leq k-1 \\ q_k &= \mathbb{P}(b_k \prec a). \end{aligned}$$

Die q_j summieren sich wieder zu 1 auf und es gilt, wie wir gleich begründen, die Ungleichungskette

$$q_k \leq q_{k-1} \leq \dots \leq q_0 < \frac{1}{3}.$$

Nehmen wir uns nämlich eine lineare Erweiterung L die zum Anteil q_j gehört, das heißt a liegt in L zwischen b_j und b_{j+1} , so kann man a und b_j vertauschen um eine lineare Erweiterung zu bekommen, die zum Anteil q_{j-1} gehört. Das funktioniert, da alle Elemente die sich in L zwischen b_j und a befinden, unvergleichbar zu b_j und a sind. Denn die Elemente, die größer als b_j sind, bilden die Kette $b_{j+1} < \dots < b_k$ und liegen in L über a . Und alle Elemente die kleiner als a sind, sind nach unserer Wahl von a und b auch kleiner als b und somit befinden sich diese vor b_j in L . Die beschriebene Vertauschung ist also wohldefiniert und auch injektiv. Folglich gilt $q_j \leq q_{j-1}$ für $j = k, \dots, 1$ und damit die behauptete Ungleichungskette.

Sei nun r maximal gewählt, so dass

$$\sum_{j=0}^{r-1} q_j < \frac{1}{3}.$$

Da nun aber $\sum_{j=0}^r q_j = \mathbb{P}(a \prec b_{r+1}) \geq 1/3$ ist und wir angenommen haben, dass \mathbf{P} nicht balanciert ist, haben wir sogar $\sum_{j=0}^r q_j > 2/3$, was aber auch $q_r > 1/3$ impliziert, im Widerspruch zur obigen Ungleichungskette. \square

2.3 Semiordnungen

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass Semiordnungen balanciert sind. Das ist ein wichtiges Resultat, denn alle bisher bekannten Partialordnungen mit Balance $1/3$ sind Semiordnungen und wie wir sehen werden erfüllen Semiordnungen Eigenschaften, die wir auch in einem Gegenbeispiel zur $1/3$ - $2/3$ Vermutung erwarten würden. Die

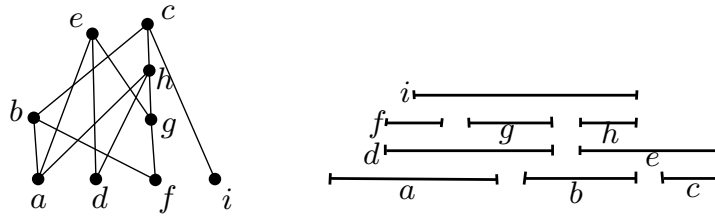


Abbildung 2.2: Diagramm einer Intervallordnung und eine zugehörige Intervallrepräsentation

vorgestellten Beweise und Ideen stammen von Brightwell und können in [4] gefunden werden.

Definition 2.2. Eine Partialordnung \mathbf{P} heißt *Intervallordnung*, wenn es eine *Intervallrepräsentation* von \mathbf{P} gibt. Das heißt wir können jedem $x \in \mathbf{P}$ ein Intervall $I_x = [a_x, b_x]$ auf der reellen Achse zuordnen, so dass folgendes erfüllt ist:

$$x < y \text{ in } \mathbf{P} \iff b_x < a_y \text{ in } \mathbb{R}$$

Abbildung 2.2 zeigt eine Intervallordnung mit einer Intervallrepräsentation. Existiert zu einer Intervallordnung sogar eine Intervallrepräsentation, in der alle Intervalle die gleiche Länge besitzen, so nennen wir die Ordnung eine *Semiordnung*. Äquivalent gilt, dass \mathbf{P} eine Semiordnung ist, genau dann, wenn \mathbf{P} keine der zwei Ordnungen aus Abbildung 2.3 als induzierte Teilordnung besitzt.

Wenn wir uns nun ein unvergleichbares Paar (x, y) einer Partialordnung \mathbf{P} nehmen, dann kann man sich fragen was es wahrscheinlicher macht, dass x vor y in einer linearen Erweiterung steht. Oder anders ausgedrückt, was „drückt“ x nach unten, aber nicht y , und was „drückt“ y nach oben, aber nicht x . Das sind zum Beispiel Elemente $z \in \mathbf{P}$, für die einer der folgenden Punkte gilt

- $x \leq z$ ist eine Coverrelation und $z \parallel y$
- $z \leq y$ ist eine Coverrelation und $z \parallel x$

Wir wollen solche Elemente z *gut* für das Paar (x, y) nennen. Ist (x, y) ein unvergleichbares Paar, das nicht oder sehr schlecht balanciert ist, so kann man erwarten, dass es viele gute Elemente nur für eines der Paare (x, y) und (y, x) gibt. Und erstaunlicherweise gibt es zu unvergleichbaren x, y von Semiordnungen immer nur gute Elemente zu genau einem der Paare (x, y) und (y, x) . Dies folgt unmittelbar aus der



Abbildung 2.3: Links die Partialordnung $\mathbf{2} + \mathbf{2}$ und rechts $\mathbf{3} + \mathbf{1}$.

Charakterisierung für Semiordnungen über die verbotenen induzierten Teilordnungen (siehe Bild 2.3). Somit kann man gewissermaßen erwarten, dass ein Gegenbeispiel für die Vermutung eine Semiordnung ist. Wie wir aber gleich sehen werden, sind Semiordnungen balanciert und dieses Resultat ist damit ein wichtiges Indiz für die Richtigkeit der $1/3$ - $2/3$ Vermutung. Der Beweis dafür geht zurück auf Brightwell. Zentrales Lemma dabei ist das folgende, das sich auf beliebige Partialordnungen \mathbf{P} bezieht. Es wird zur besseren Darstellung die Relation \ll aus Definition 1.7 benutzt.

Lemma 2.3 ([4]). *Seien $x, y \in \mathbf{P}$ unvergleichbar und sei $x \ll y$. Gilt weiterhin für jedes $z \in \mathbf{P} \setminus \{x, y\}$ entweder $z \ll x$ oder $y \ll z$, so gibt es mindestens zwei Elemente, die gut für (x, y) sind.*

Beweis. Für den Beweis partitionieren wir die Menge der linearen Erweiterungen $E(\mathbf{P})$ in drei Mengen E_1, E_2 und E_3 . In E_1 sind alle linearen Erweiterungen mit y vor x . In E_2 seien dann alle linearen Erweiterungen L , wo es ein gutes Element z für (x, y) gibt mit $x < z < y$ in L . In E_3 sind dann alle noch fehlenden linearen Erweiterungen. Zunächst zeigen wir $|E_3| \leq |E_1|$. Dazu nehmen wir uns eine lineare Erweiterung L aus E_3 und vertauschen einfach x und y , um eine lineare Erweiterung aus E_1 zu bekommen. Das ist möglich, denn alle Elemente zwischen x und y müssen zu den beiden unvergleichbar sein. Andernfalls gäbe es ein $z \neq x, y$ mit $x \leq z$ und $z \parallel y$ in \mathbf{P} oder ein $z \neq x, y$ mit $z \leq y$ und $x \parallel z$ in \mathbf{P} . In beiden Fällen können wir dann z so wählen, dass $x \leq z$ bzw. $z \leq y$ eine Coverrelation in \mathbf{P} ist und z wäre gut für (x, y) , entgegen der Annahme, dass L aus E_3 ist. Die Vertauschung beschreibt eine injektive Abbildung und somit gilt $|E_3| \leq |E_1|$.

Nach Voraussetzung ist nun $|E_1|/e(\mathbf{P}) < 1/3$, also auch $|E_3|/e(\mathbf{P}) < 1/3$ und es folgt $|E_2|/e(\mathbf{P}) > 1/3$. Angenommen nun es gibt nur ein gutes Element z für (x, y) . Nach Annahme haben wir entweder $\mathbb{P}(z \prec x) > 2/3$ oder $\mathbb{P}(y \prec z) > 2/3$. In beiden Fällen folgt für dieses z , dass $|E_2|/e(\mathbf{P}) = \mathbb{P}(x \prec z \prec y) < 1/3$ ist, was aber nicht sein kann und somit muss es noch ein weiteres gutes Element für (x, y) geben. \square

Mit dem gezeigten Lemma beweist Brightwell das versprochene Resultat.

Theorem 2.3 ([4]). *Ist \mathbf{P} eine Semiordnung, aber keine Kette, so ist \mathbf{P} balanciert.*

Beweis. Angenommen die Semiordnung \mathbf{P} ist nicht balanciert. Nach Bemerkung 1.2 und 1.3 können wir dann auch annehmen, dass \mathbf{P} nicht die lineare Summe von zwei Semiordnungen ist und damit insbesondere kein globales Minimum oder Maximum besitzt. Wir betrachten dann zunächst die Reihenfolge der Intervalle, die in einer Intervallrepräsentation mit Intervallen konstanter Länge vorkommen kann (von links nach rechts gelesen). Sei diese durch $x_1 \prec_0 x_2 \prec_0 \dots \prec_0 x_n$ gegeben (haben zwei Intervalle die gleichen Endpunkte, so wären die zugehörigen Elemente perfekt balanciert und wir wären fertig). Dann sind in \mathbf{P} alle Elemente, die kleiner als x_i sind, auch kleiner als x_{i+1} , und alle Elemente, die größer als x_{i+1} sind, auch größer als x_i . In einer linearen Erweiterung L mit x_{i+1} vor x_i sind somit alle Elemente zwischen x_i und x_{i+1} unvergleichbar zu x_i und x_{i+1} . Da nach Annahme $x_i \parallel x_{i+1}$ gilt, können wir folglich beide Elemente in L vertauschen um eine lineare Erweiterung mit x_i vor

x_{i+1} zu bekommen. Das zeigt $\mathbb{P}(x_i \prec x_{i+1}) \geq 1/2$. Da \mathbf{P} nicht balanciert ist, bekommen wir dann aber sogar $\mathbb{P}(x_i \prec x_{i+1}) > 2/3$, also $x_i \ll x_{i+1}$. Folglich stimmen \ll und \prec_0 überein. Wir brauchen das, da nun auch zwei konsekutive Elemente in der linearen Ordnung von \ll unvergleichbar sind.

Nun sind die Voraussetzungen von Lemma 2.3 für Paare (x_i, x_{i+1}) erfüllt und wir bekommen somit mindestens $2n - 2$ Instanzen der Form: z ist ein gutes Element für (x_i, x_{i+1}) . Schauen wir jetzt wie oft ein Element z gut für ein konsekutives Paar sein kann. Da \ll gleich \prec_0 ist, unterteilt z die Kette \ll in ein Intervall $x_1 \ll x_2 \ll \dots \ll x_i$ von Elementen, die in \mathbf{P} kleiner als z sind, in ein Intervall $x_{i+1} \ll \dots \ll x_j$ von Elementen, die unvergleichbar zu z sind, und in ein Intervall $x_{j+1} \ll \dots \ll x_n$ von Elementen, die größer als z sind. Nach Definition kann z nur gut für die Paare (x_i, x_{i+1}) und (x_j, x_{j+1}) sein, sofern diese existieren. Ist z ein Minimum, so wird \ll nur in zwei Intervalle geteilt und z kann nur gut für (x_j, x_{j+1}) sein. Analog kann ein Maximum ebenfalls nur gut für ein Paar sein.

Mit dieser Zählweise kommen wir auf höchstens $2n - |\text{Min}(\mathbf{P})| - |\text{Max}(\mathbf{P})| < 2n - 4$ Instanzen der Art: z ist gut für ein konsekutives Paar in \ll , ein Widerspruch und das Theorem ist bewiesen. \square

Brightwell verwendet obiges Lemma auch um die Balanciertheit von Weite-2 Ordnungen zu beweisen. Er verweist auch noch mal auf Linial's Beweis, da im Grunde genommen die gleiche Idee verwendet wurde, bloß in einem anderem Gewand. Für Intervallordnungen im Allgemeinen ist die $1/3$ - $2/3$ Vermutung noch ungelöst.

2.4 Partialordnungen mit Symmetrie

Hat eine Partialordnung viel Symmetrie, so erwartet man intuitiv, dass die $1/3$ - $2/3$ Vermutung in diesem Fall erfüllt ist. Es lohnt sich also, diesen Spezialfall mal näher zu betrachten. In [17] untersuchen Ganter, Häfner und Poguntke den Symmetriefall. Bevor wir die Ideen präsentieren, sollten wir allerdings klären, was unter Symmetrie zu verstehen ist.

Ein *Automorphismus* α ist eine ordnungserhaltende bijektive Abbildung auf der Ordnung \mathbf{P} , deren Umkehrabbildung ebenfalls ordnungserhaltend ist. Das heißt für alle $x, y \in \mathbf{P}$ gilt

$$x \leq y \iff \alpha(x) \leq \alpha(y).$$

Die identische Abbildung auf \mathbf{P} ist zum Beispiel ein Automorphismus. Jeder nicht-triviale Automorphismus ist dann anschaulich eine Umbenennung der Ordnungselemente, die ordnungserhaltend ist. Wir sagen jetzt, dass Symmetrie vorliegt, wenn es einen nicht-trivialen Automorphismus gibt. Das folgende Theorem wird in [17] bewiesen, wobei jedoch darauf hingewiesen wird, dass die Argumentation von Pouzet stammt.

Theorem 2.4. *Ist \mathbf{P} eine Partialordnung mit einem nicht-trivialen Automorphismus α , so ist \mathbf{P} balanciert.*

Beweis. Angenommen \mathbf{P} ist nicht balanciert. Nach Lemma 1.1 ist die Grundmenge von \mathbf{P} bezüglich \ll (siehe Definition 1.7) linear geordnet. Sei nun α ein nicht-trivialer

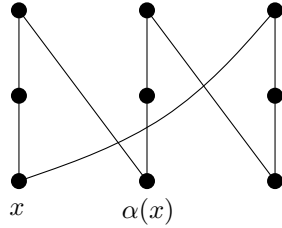


Abbildung 2.4: Beispiel von Fishburn

Automorphismus auf \mathbf{P} , dann definiert α auch eine Bijektion auf der Menge der linearen Erweiterungen von \mathbf{P} und erfüllt somit für alle $x, y \in \mathbf{P}$

$$\mathbb{P}(x \prec y) = \mathbb{P}(\alpha(x) \prec \alpha(y))$$

was aber sofort impliziert, dass $x \ll y$ gilt, genau dann, wenn $\alpha(x) \ll \alpha(y)$ ist. Der Automorphismus α erhält also die lineare Ordnung \ll und ist folglich die identische Abbildung, im Widerspruch zur Nicht-Trivialität. \square

Man könnte meinen, dass für einen Automorphismus α mit $\alpha(x) \neq x$ sogar $\mathbb{P}(x \prec \alpha(x)) = 1/2$ gilt, doch Abbildung 2.4 zeigt ein Beispiel von Fishburn [13], bei dem dies nicht der Fall ist. Tauscht man die drei längsten Ketten zyklisch, so erhält man einen Automorphismus. Sind dann x und $\alpha(x)$ wie in der Abbildung, so existieren 720 lineare Erweiterungen mit x vor $\alpha(x)$, bei insgesamt 1431 linearen Erweiterungen. Also ist $\mathbb{P}(x \prec \alpha(x)) \neq 1/2$ und tatsächlich existieren in diesem Beispiel keine x, y mit $\mathbb{P}(x \prec y) = 1/2$. Ganter et al. untersuchen in welchen Fällen so etwas auftreten kann und kommen zu folgendem Resultat.

Theorem 2.5 ([17]). *Sei \mathbf{P} eine endliche kreisfreie Partialordnung und α ein nicht-trivialer Automorphismus auf \mathbf{P} , dann gilt*

$$\mathbb{P}(x \prec \alpha(x)) = \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbf{P} \text{ mit } x \neq \alpha(x).$$

Kreisfrei heißt hier, dass die Ordnung \mathbf{P} keine induzierte *Crown* C_n für ein $n \geq 2$ besitzt. Abbildung 2.5 zeigt drei Crowns. Das Beispiel aus Abbildung 2.4 besitzt dann eine induzierte *Crown* C_3 .

Um das Theorem zu beweisen, definieren Ganter et al. eine Äquivalenzrelation auf den Elementen von \mathbf{P} . Dabei gilt $x \sim y$, wenn es im Covergraphen von \mathbf{P} einen Pfad zwischen x und y gibt, der *fixpunktfrei* bezüglich α ist, das heißt für alle Elemente z auf dem Pfad gilt $z \neq \alpha(z)$. Sei dann $[x]$ die Äquivalenzklasse von x . Ist x ein Fixpunkt von α , so besteht $[x]$ also nur aus dem Element x . Wir zeigen zunächst

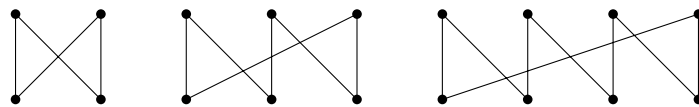


Abbildung 2.5: C_2 , C_3 und C_4

Lemma 2.4 ([17]). *Gilt $x \neq \alpha(x)$, so folgt $[x] \neq [\alpha(x)]$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jeder Pfad zwischen x und $\alpha(x)$ im Covergraph einen Fixpunkt besitzt. Sei S also so ein Pfad. Das Bild von S unter α ist wieder ein Pfad im Covergraphen, der zudem über $\alpha(x)$ mit S verbunden ist. Der Teilgraph $T = \bigcup_{i \geq 0} \alpha^i(S)$ ist folglich zusammenhängend und nach Voraussetzung kreisfrei. Schränken wir die Elemente der Ordnung \mathbf{P} auf die Elemente aus T ein, so bekommen wir eine zusammenhängende Ordnung und einen Automorphismus α_T darauf, der nach Rival [27] einen Fixpunkt z besitzt. Dieses z muss bereits in S sein, da sonst die Abbildung α nicht injektiv sein kann und wir sind fertig. \square

Im Beweis zum Theorem wird es sich anbieten, eine lineare Erweiterung σ als Abbildung von \mathbf{P} nach $\{1, 2, \dots, |\mathbf{P}|\}$ aufzufassen. Dabei wird einfach jedem Element aus \mathbf{P} seine Position in L zugewiesen.

Beweis von Theorem 2.5. Sei mit $E(\mathbf{P}(y < z))$ wieder die Menge der linearen Erweiterungen mit y vor z bezeichnet. Wir definieren dann eine Abbildung

$$\Phi: E(\mathbf{P}(x < \alpha(x))) \rightarrow E(\mathbf{P}(\alpha(x) < x))$$

durch

$$\Phi(\sigma)(p) = \begin{cases} \sigma(\alpha(p)) & \text{wenn } p \in [x] \\ \sigma(\alpha^{-1}(p)) & \text{wenn } p \in [\alpha(x)] \\ \sigma(p) & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit Lemma 2.4 ist klar, dass wirklich nur ein Fall in der Konstruktionsvorschrift eintritt. Wir müssen uns nun überzeugen, dass $\Phi(\sigma)$ eine lineare Erweiterung ist. Sei dazu $p \in [x]$, das heißt es gibt einen fixpunktfreien Pfad, der x und p verbindet. Nach Anwenden von α bekommen wir einen fixpunktfreien Pfad, der $\alpha(x)$ und $\alpha(p)$ verbindet, also $\alpha(p) \in [\alpha(x)]$. Analog gilt $\alpha^{-1}(p) \in [x]$ wenn $p \in [\alpha(x)]$ und folglich ist $\Phi(\sigma)$ nach Konstruktionsvorschrift bijektiv. Anschaulich sind in $\Phi(\sigma)$ im Vergleich zu σ die Elemente $p \in [x]$ mit $\alpha(p)$ vertauscht.

Um zu sehen, dass $\Phi(\sigma)$ ordnungserhaltend ist, nehmen wir $p < q$ in \mathbf{P} an. Gilt nun $p, q \notin [x] \cup [\alpha(x)]$ so nutzen wir einfach aus, dass σ ordnungserhaltend ist. Sind p und q beide aus $[x]$ oder beide aus $[\alpha(x)]$, so folgt die Ordnungserhaltung aus den Eigenschaften von α und σ . Sei also $p \in [x]$ und $q \in [\alpha(x)]$. Nach Lemma 2.4 ist $[x] \neq [\alpha(x)]$ und somit existiert ein Fixpunkt f von α mit

$$p \leq f \leq q.$$

Durch Anwenden von α auf die linke und α^{-1} auf die rechte Ungleichung, bekommen wir

$$\alpha(p) \leq f \leq \alpha^{-1}(q)$$

und folglich

$$\Phi(\sigma)(p) = \sigma(\alpha(p)) \leq \sigma(\alpha^{-1}(q)) = \Phi(\sigma)(q).$$

Analog behandelt man den Fall $p \in [\alpha(x)]$ und $q \in [x]$.

Damit ist nachgewiesen, dass $\Phi(\sigma)$ eine lineare Erweiterung aus $E(\mathbf{P}(\alpha(x) < x))$ ist und dass Φ wohldefiniert ist. Man kann nun auch leicht eine Umkehrabbildung angeben (gleiche Konstruktionsvorschrift wie oben) und es folgt die Bijektivität der Abbildung Φ und damit die Behauptung. \square

Wir haben also gesehen, dass es Ordnungen \mathbf{P} mit nicht-trivialen Automorphismen gibt, die nicht Balance $\delta(\mathbf{P}) = 0.5$ haben. Die Balance $\delta(\mathbf{P})$ scheint jedoch in diesen Fällen sehr nah an 0.5 zu sein und es wäre deshalb interessant zu sehen, ob es bessere untere Schranken als $1/3$ gibt. Das Beispiel von Fishburn aus Abbildung 2.4 hat Balance $\delta(\mathbf{P}) \approx 0.4969$ und möglicherweise ist dies bereits die Ordnung in dieser Klasse von Partialordnungen, die am wenigsten balanciert ist.

3 Ein geometrischer Ansatz mit Brunn-Minkowski

In diesem Kapitel wollen wir uns eine geometrische Formulierung der $1/3$ - $2/3$ Vermutung und der schwächeren Variante anschauen. Das dies erfolgsversprechend ist, zeigten 1991 Jeff Kahn und Nathan Linial in ihrem Artikel [22], wo sie einen eleganten Beweis für die Existenz von $1/2e$ -balancierten Paaren in Partialordnungen geben. Dass Partialordnungen eine Balance von $1/2e$ haben, war 1991 bereits bekannt, da Kahn und Saks schon 1984 die Balance $3/11$ nachgewiesen hatten (siehe Kapitel 4). Der Ansatz von Kahn und Linial besticht aber durch Eleganz und Kreativität. So verwenden sie unter anderem Brunns Ungleichung aus der Konvexgeometrie, die eine Folgerung der Ungleichung von Brunn-Minkowski ist. Dies sind natürlich Gründe, sich den Beweis des folgenden Resultats näher anzuschauen.

Theorem 3.1 ([22]). *Ist \mathbf{P} eine endliche Partialordnung, die keine Kette ist, so existieren Elemente $x, y \in \mathbf{P}$ mit*

$$\frac{1}{2e} < \mathbb{P}(x \prec y) < 1 - \frac{1}{2e}$$

Wir brauchen an dieser Stelle noch ein paar geometrische Grundlagen. Das zentrale Objekt des Beweises des obigen Theorems ist das *Ordnungspolytop*. Eine ausführliche Beschreibung hiervon gibt Richard P. Stanley in [29], wo er ebenfalls das sogenannte *Kettenpolytop* untersucht und Verbindungen zwischen den beiden Polytopen aufzeigt.

Definition 3.1. Sei \mathbf{P} eine Partialordnung, deren Elemente mit $1, \dots, n$ bezeichnet werden. Das *Ordnungspolytop* $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ ist die Teilmenge des \mathbb{R}^n , die durch folgende Ungleichungen beschrieben wird:

- $0 \leq v_i \leq 1$ für alle $i \in \mathbf{P}$
- $v_i \leq v_j$ wenn $i \leq j$ in \mathbf{P}

Da dies einem endlichen System von linearen Ungleichungen entspricht, ist $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ klarerweise ein konvexes Polytop. Üblicherweise lässt man die redundanten Ungleichungen in der Definition noch weg. Aufgrund der Transitivität genügt es nämlich $v_i \leq v_j$ für Coverrelationen $i \leq j$ in \mathbf{P} zu fordern.

Wir wollen $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ nun in volldimensionale Simplex zerlegen. Nehmen wir uns eine Permutation $\sigma \in S_n$, so ist die Menge

$$\{v \in [0, 1]^n \mid v_{\sigma^{-1}(1)} \leq \dots \leq v_{\sigma^{-1}(n)}\}$$

ein n -dimensionaler Simplex. Durch Permutieren der Koordinaten können wir eine Bijektion zwischen zwei Simplex dieser Art angeben, die zudem volumenerhaltend ist. Der Einheitswürfel zerlegt sich so in $n!$ Simplex mit Volumen jeweils $1/n!$. Bezogen auf unsere Partialordnung, kann jede lineare Erweiterung als Permutation σ aufgefasst werden. Dann entspricht $\sigma(i)$ einfach der Position von i in der linearen Erweiterung σ . Den dazu korrespondierenden Simplex bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$. Dieser ist in $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ komplett enthalten und umgekehrt gibt es zu jedem Punkt $x \in$

$\mathcal{O}(\mathbf{P})$ eine lineare Erweiterung σ , so dass $x \in \mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$. Ist $E(\mathbf{P})$ wieder die Menge der linearen Erweiterungen von \mathbf{P} und $e(\mathbf{P})$ die Kardinalität davon, so folgt

$$\mathcal{O}(\mathbf{P}) = \bigcup_{\sigma \in E(\mathbf{P})} \mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma) \quad \text{und} \quad \text{Vol}(\mathcal{O}(\mathbf{P})) = \frac{e(\mathbf{P})}{n!}.$$

Als nächstes wollen wir eine kombinatorische Beschreibung für den Schwerpunkt des Ordnungspolytops finden. Sei dazu wieder $h(x)$ die durchschnittliche Höhe von x in einer linearen Erweiterung und bezeichne h den Vektor $(h(x))_{x \in \mathbf{P}}$, sowie h_σ den Vektor $(h_\sigma(x))_{x \in \mathbf{P}}$. Damit gilt

Lemma 3.1 ([25]). *Der Schwerpunkt des Ordnungspolytops ist $\frac{1}{n+1}h$*

Beweis. Üblicherweise berechnet sich der Schwerpunkt eines konvexen Polytops als Durchschnitt der Ecken. Wir wollen stattdessen die oben beschriebene Triangulierung nutzen. Der Schwerpunkt ist dann nämlich der Durchschnitt der Schwerpunkte der Simplexe $\mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$.

Sei also $\mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$ so ein Simplex. Wir können dabei annehmen, dass σ die Identität ist. Dann gibt uns jedes Element aus $\mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$ eine Menge von n Punkten im Intervall $[0, 1]$ und damit eine Partition des Intervalls in $n + 1$ Intervalle, und umgekehrt. Bei einem zufälligen Element ist zu erwarten, dass alle Intervalle gleich groß sind und folglich ist $\frac{1}{n+1}(1, 2, \dots, n) = \frac{1}{n+1}h_\sigma$ der Schwerpunkt von $\mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$. Insgesamt entspricht der Schwerpunkt von $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ dem Vektor

$$\frac{1}{e(\mathbf{P})} \sum_{\sigma \in E(\mathbf{P})} \frac{1}{n+1} h_\sigma = \frac{1}{n+1} h$$

□

Eine weitere Beobachtung ist nun, dass die Einträge des Vektors h das Intervall $[0, 1]$ in $n + 1$ Teilintervalle unterteilen. Da wir nach Bemerkung 1.2 zusätzlich annehmen können, dass wir kein globales Minimum oder Maximum haben, geschieht dies sogar für das offene Intervall. Nach dem Schubfachprinzip muss es dann $x, y \in \mathbf{P}$ geben mit $|h(x) - h(y)| < 1$. Kahn und Linial zeigen das folgende

Theorem 3.2 ([22]). *Erfüllen verschiedene Elemente $x, y \in \mathbf{P}$ die Ungleichung $|h(y) - h(x)| < 1$, so gilt*

$$\frac{1}{2e} < \mathbb{P}(x \prec y) < 1 - \frac{1}{2e}$$

Dieses Theorem impliziert Theorem 3.1. Wie es der Artikel der beiden schon ankündigt, wird die Brunn-Minkowski Ungleichung benutzt. Wir wollen hier noch ein wenig genauer darauf eingehen als im Artikel. Zunächst formulieren wir die Ungleichung, da sie nicht jedem Leser geläufig sein wird. Für $A, B \in \mathbb{R}^n$ sei $A + B$ die Minkowski-Summe, das heißt

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^n \mid a \in A, b \in B\}.$$

Theorem 3.3 (Brunn-Minkowski Ungleichung). *Seien A und B nichtleere kompakte Mengen im \mathbb{R}^n . Dann gilt*

$$\text{Vol}(A + B)^{1/n} \geq \text{Vol}(A)^{1/n} + \text{Vol}(B)^{1/n}$$

Mit dieser Ungleichung lässt sich eine Ungleichung von Brunn über geschnittene Volumen beweisen. Man kann sich diese wie folgt vorstellen. Haben wir ein Laib Brot gegeben, das keine Dellen besitzt, mathematisch also konvex ist, so schneiden wir es mit einem Messer mit drei parallelen Schnitten in vier Stücke. Die Aussage von Brunn ist dann, dass die Fläche des mittleren Schnittes mindestens so groß ist, wie die kleinere der beiden anderen Flächen.

Für größere Dimensionen sieht das wie folgt aus. Sei C ein kompakter, konvexer Körper im \mathbb{R}^{n+1} . Unsere Schnitte seien definiert über Hyperebenen, die senkrecht zur Koordinatenachse von x_1 liegen, das heißt sie haben die Form $x_1 = t$. Mit $v(t)$ bezeichnen wir dann das n -dimensionale Volumen der Schnittfläche von C mit der Hyperebene. Sei außerdem das Intervall $[t_{\min}, t_{\max}]$ die Projektion von C auf die x_1 -Koordinate. Dann gilt

Theorem 3.4 (Brunns Ungleichung). *Die Funktion $v(t)^{1/n}$ ist konkav auf $[t_{\min}, t_{\max}]$. Insbesondere gilt also für $t_1 < t < t_2$, dass $v(t) \geq v(t_1)$ oder $v(t) \geq v(t_2)$ ist.*

Brunns Ungleichung kann mit der Ungleichung von Brunn-Minkowski bewiesen werden. Einen Beweis dafür findet man zum Beispiel in [26]. Damit kann man nun auch zeigen, dass jede Partialordnung $1/2e$ -balanciert ist.

Beweis von Theorem 3.2. Seien also $x, y \in \mathbf{P}$ Elemente mit $|h(y) - h(x)| < 1$. Die Hyperebene $H = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v_x = v_y\}$ schneidet das Ordnungspolytop in zwei Teile, so dass ein Simplex $\mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$ entweder komplett auf der Seite zum Halbraum $v_x \leq v_y$ liegt oder eben auf der anderen Seite. Auf der einen Seite der Hyperebene befinden sich also alle Simplizes, die zu linearen Erweiterungen gehören, in denen $x < y$ ist, und auf der anderen Seite befinden sich diejenigen mit $x > y$ in der Erweiterung. Da alle Simplizes das gleiche Volumen besitzen, müssen wir also nur zeigen, dass die Hyperebene $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ so in zwei Polytope schneidet, dass das kleinere davon ein Volumen von mindestens $1/2e \cdot \text{Vol}(\mathcal{O}(\mathbf{P}))$ besitzt.

Wir beginnen mit einer Anpassung des Koordinatensystems. Sei $w_1 = v_x - v_y$ die erste Koordinate des neuen Systems und w_2, \dots, w_n so gewählt, dass $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ eine orthogonale Basis des \mathbb{R}^n bildet. Die Hyperebene H ist dann durch $w_1 = 0$ beschrieben. Sei nun c der Schwerpunkt von $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ im neuen Koordinatensystem. Nach Lemma 3.1 ist $\frac{1}{n+1}h$ der Schwerpunkt im alten System und dementsprechend bekommen wir für die erste Koordinate von c

$$c_1 = \frac{1}{n+1}(h(x) - h(y))$$

und zusammen mit $|h(x) - h(y)| < 1$ folgt dann

$$-\frac{1}{n+1} < c_1 < \frac{1}{n+1}.$$

Die Projektion von $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ auf die erste Koordinate ist das Intervall $[-1, 1]$, denn nehmen wir uns die in $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ enthaltenen Inzidenzvektoren der Filter $F[x]$ und $F[y]$, so bekommen wir für die neue erste Koordinate die Werte 1 und -1 . Ziel ist es nun zu zeigen, dass jeder konvexe Körper P mit den gleichen Eigenschaften an den Schwerpunkt, die Ungleichungen

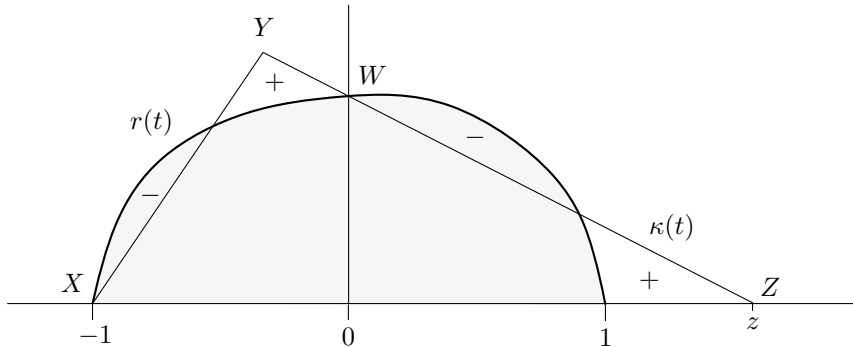
$$\text{Vol}(P_{\leq}) \geq \frac{1}{2e} \text{Vol}(P) \quad \text{Vol}(P_{\geq}) \geq \frac{1}{2e} \text{Vol}(P)$$

erfüllt, wobei hier $P_{\leq} = \{x \in P \mid x_1 \leq 0\}$ bezeichnet und P_{\geq} analog definiert ist.

Für ein $t \in [-1, 1]$ sei das Polytop P_t definiert als der Schnitt von P mit der Hyperebene $w_1 = t$. Die erste Koordinate des Schwerpunktes lässt sich dann wie folgt ausdrücken:

$$c_1 = \frac{1}{\text{Vol}(P)} \int_{-1}^1 t \text{Vol}_{n-1}(P_t) dt.$$

Wir sehen, dass c_1 nur von den Volumina der P_t abhängt, und nicht von deren Form. Wir dürfen daher annehmen, dass P_t eine $(n-1)$ -dimensionale Kugel in der Hyperebene $w_1 = t$ ist und somit auch, dass P ein Rotationskörper um die Achse w_1 ist. Sei $r(t)$ dann der Radius dieser Kugel. Es gilt die Beziehung $r(t) = R_n \cdot (\text{Vol}_{n-1}(P_t))^{1/n}$, wobei R_n das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n ist. Mit Brunns Ungleichung folgt dann die Konkavität von $r(t)$. Das folgende Bild zeigt eine mögliche Situation.



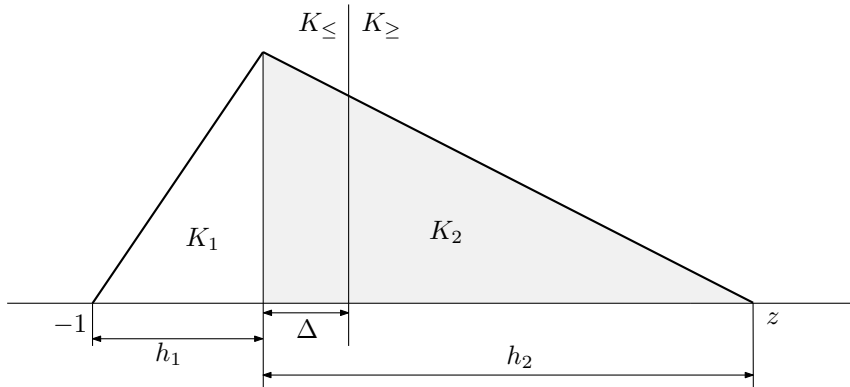
Das Bild zeigt eine weitere Funktion $\kappa(t)$, die die Radien eines Rotationskörpers K um die w_1 -Achse angibt. Dabei wird $\kappa(t)$, bestehend aus zwei linearen Teilabschnitten, in Abhängigkeit von $r(t)$ konstruiert. Dazu sei $\kappa(0) = r(0)$, $\kappa(-1) = 0$ und man wähle den Punkt Z auf der positiven w_1 -Achse so, dass $\text{Vol}(K_{\geq}) = \text{Vol}(P_{\geq})$ gilt. Ist z die w_1 -Koordinate von Z , so ist aufgrund der Konkavität $1 \leq z$. Die Gerade durch Z und W verlängern wir bis zum Punkt Y , wobei dieser so gewählt ist, dass $\text{Vol}(K_{\leq}) = \text{Vol}(P_{\leq})$ gilt. Betrachten wir nun wieder die w_1 -Koordinate des Schwerpunktes von K . Dazu bemerken wir zunächst, dass nach Konstruktion auf der linken Seite bei -1 beginnend erst $r(t) \geq \kappa(t)$ gilt und ab einem Zeitpunkt stets $r(t) \leq \kappa(t)$ ist. Auf der rechten Seite starten wir ebenfalls mit $r(t) \geq \kappa(t)$ und finden einen Zeitpunkt, ab dem $r(t) \leq \kappa(t)$ gilt. Für die Rotationskörper P und K bedeutet das folgendes. Wollen wir aus P den Körper K formen, so müssen wir Masse von P abtragen (im Bereich $-$) und auf der gleichen Seite weiter rechts wieder hinzufügen (im Bereich $+$). Auf beiden Seiten verschiebt sich der Schwerpunkt nach

rechts, also gilt auch insgesamt für die erste Koordinate des Schwerpunkts von K

$$-\frac{1}{n+1} < c_1(P) \leq c_1(K)$$

Ziel ist es jetzt aus dieser Ungleichung zu folgern, dass $\text{Vol}(K_{\geq}) \geq \frac{1}{2e} \text{Vol}(K)$ gilt. Die gleiche Aussage muss dann auch für den Rotationskörper P gelten und folglich auch für unser $\mathcal{O}(\mathbf{P})$.

Die weiteren Rechnungen werden sich an folgende schematische Zeichnung von K orientieren.



Zunächst teilen wir K in zwei Kegel K_1 und K_2 wie im Bild angedeutet. Es ist bekannt, dass der Schwerpunkt eines Kegels auf $\frac{1}{n+1}$ der Höhe liegt und so bekommen wir

$$c_1(K_1) = -\frac{h_1}{n+1} - \Delta \quad c_1(K_2) = \frac{h_2}{n+1} - \Delta.$$

Der Schwerpunkt von K ist dann das gewichtete Mittel der Schwerpunkte von K_1 und K_2 . Da das Volumen eines Kegels linear von seiner Höhe abhängt, verhält sich $\text{Vol}(K_1)$ zu $\text{Vol}(K_2)$ wie h_1 zu h_2 und es ergibt sich

$$c_1(K) = \frac{h_1 \left(-\frac{h_1}{n+1} - \Delta \right) + h_2 \left(\frac{h_2}{n+1} - \Delta \right)}{h_1 + h_2} = \frac{h_2 - h_1}{n+1} - \Delta.$$

Jetzt nutzen wir die oben aufgestellte Ungleichung $-1/(n+1) \leq c_1(K)$ und $\Delta = 1 - h_1$. Es folgt

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{h_2 - h_1}{n+1} - \Delta = \frac{h_2 + nh_1 - n - 1}{n+1}$$

und wir bekommen nach Vereinfachen $n \leq h_2 + nh_1$. Schreiben wir nun noch $h_1 = z - h_2 + 1$, so ist dies äquivalent zu

$$\frac{z}{h_2} \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Bevor wir dies verwenden, brauchen wir noch eine Beschreibung des Volumens von K_{\geq} . Der Rotationskörper K_2 ist proportional zu K_{\geq} um den Faktor z/h_2 . Mit

elementarer Geometrie folgt

$$\begin{aligned}\text{Vol}(K_{\geq}) &= \left(\frac{z}{h_2}\right)^n \text{Vol}(K_2) = \left(\frac{z}{h_2}\right)^n \frac{h_2}{h_1 + h_2} \text{Vol}(K) \\ &= \frac{z}{z+1} \left(\frac{z}{h_2}\right)^{n-1} \text{Vol}(K).\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Gleichung benutzt, dass $h_1 + h_2 = 1 + z$ ist. Mit obiger Abschätzung an z/h_2 bekommen wir dann eine untere Schranke für das Volumen:

$$\text{Vol}(K_{\geq}) \geq \frac{z}{z+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \text{Vol}(K).$$

Beachtet man nun noch $z \geq 1$, womit $z/(z+1) \geq 1/2$ folgt, und dass $(1 - 1/n)^{n-1} > e^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so erhalten wir

$$\text{Vol}(K_{\geq}) \geq \frac{1}{2e} \text{Vol}(K).$$

Die gleiche Ungleichung bekommen wir nach Konstruktion also auch für P_{\geq} . Analog zeigt man dies für P_{\leq} und das Theorem ist bewiesen. □

4 Der Ansatz von Kahn und Saks

In diesem Abschnitt werden wir den Ansatz von Kahn und Saks präsentieren und auch auf den Ausbau ihrer Techniken durch Brightwell, Felsner und Trotter eingehen. Sie waren die ersten, die überhaupt eine Konstante im Sinne der $1/3$ - $2/3$ Vermutung nachweisen und somit die Vermutung über die Anzahl von Vergleichen beim Sortieren beweisen konnten. Dabei wurde folgender Ansatz verfolgt. Schauen wir auf die durchschnittlichen Positionen der Elemente in den linearen Erweiterungen und nehmen uns dann zwei Elemente x, y heraus, die ungefähr die gleiche zu erwartende Position in einer linearen Erweiterung haben, so kann man ebenfalls erwarten, dass es ungefähr genauso viele lineare Erweiterungen mit x vor y gibt wie umgekehrt. Dieser recht intuitive Ansatz ist tatsächlich zielführend, für den Beweis bedarf es aber ein wenig Arbeit.

Wir haben uns entschieden diesen aufwendigen Ansatz näher zu beleuchten, da er historisch gesehen sehr wichtig war und da, wie wir denken, es auch zu einer Masterarbeit gehört sich mit den kniffligen und vielleicht unliebsamen Dingen zu beschäftigen. Hauptresultat von Kahn und Saks ist

Theorem 4.1 ([21]). *Sei \mathbf{P} eine Partialordnung, nicht total geordnet, dann existieren Elemente $x, y \in \mathbf{P}$, so dass*

$$\frac{3}{11} < \mathbb{P}(x \prec y) < \frac{8}{11}.$$

Wir wollen nun näher auf den Beweis eingehen. Dazu benutzen wir unter anderem die durchschnittliche Höhe $h(x)$ eines Elementes $x \in \mathbf{P}$ in einer linearen Erweiterung, worauf wir bereits im ersten Kapitel eingegangen sind. Hat \mathbf{P} genau n Elemente, so gilt $1 \leq h(x) \leq n$. Nach Bemerkung 1.2 können wir wieder annehmen, dass kein globales Minimum oder Maximum existiert, so dass sogar die strikte Ungleichung $1 < h(x) < n$ erfüllt ist. Die Punkte $h(x)$ für $x \in \mathbf{P}$ liegen somit im offenen Intervall $(1, n)$ und mit dem Schubfachprinzip folgt dann die Existenz von verschiedenen Elementen $x, y \in \mathbf{P}$ mit $|h(x) - h(y)| < 1$. Die Elemente x und y haben also ungefähr die gleiche zu erwartende Höhe in einer linearen Erweiterung. Was Kahn und Saks tatsächlich zeigen ist das folgende Theorem, mit dem dann auch Theorem 4.1 folgt.

Theorem 4.2 ([21]). *Gilt für verschiedene Elemente $x, y \in \mathbf{P}$ die Ungleichung $|h(x) - h(y)| < 1$, so folgt*

$$\frac{3}{11} < \mathbb{P}(x \prec y) < \frac{8}{11}.$$

Kahn und Saks zeigen in ihrem Artikel auch, dass aus der Bedingung $|h(y) - h(x)| < 1$ im Allgemeinen nicht folgt, dass das Paar (x, y) $1/3$ -balanciert ist. Abbildung 4.1 zeigt ihr Beispiel für diese Behauptung.

4.1 Höhensequenzen

Sei nun (x, y) ein unvergleichbares Paar einer Partialordnung \mathbf{P} . Wir wollen dieses Paar im folgenden fixieren und einige Quantitäten in Abhängigkeit von x und y definieren. Für ein $i \in \mathbb{N}$ bezeichne a_i die Wahrscheinlichkeit, dass $h_\sigma(y) - h_\sigma(x) = i$

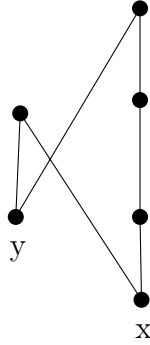


Abbildung 4.1: $h(y) - h(x) = \frac{12}{13}$ aber $\mathbb{P}(y \prec x) = \frac{4}{13} < \frac{1}{3}$

in einer zufällig gezogenen linearen Erweiterung σ gilt, und analog bezeichne b_i die Wahrscheinlichkeit, dass $h_\sigma(x) - h_\sigma(y) = i$ ist. Damit folgt sofort $\mathbb{P}(x \prec y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ und $\mathbb{P}(y \prec x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i$. Außerdem lässt sich die erwartete Höhendifferenz schreiben als

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= \frac{1}{e(\mathbf{P})} \sum_{\sigma \in E(\mathbf{P})} h_\sigma(y) - h_\sigma(x) \\ &= \frac{1}{e(\mathbf{P})} \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \#\{\sigma \in E(\mathbf{P}) \mid h_\sigma(y) - h_\sigma(x) = i\} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} i a_i - \sum_{i \in \mathbb{N}} i b_i. \end{aligned}$$

Kahn und Saks beweisen folgende Punkte.

Lemma 4.1 ([21]).

$$a_1 = b_1 \tag{1}$$

$$a_i = 0 \implies a_{i+1} = 0 \quad \text{und} \quad b_i = 0 \implies b_{i+1} = 0 \quad \text{für } i \geq 1 \tag{2}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i + \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i = 1 \tag{3}$$

$$a_2 + b_2 \leq a_1 + b_1 \tag{4}$$

$$a_{i+1} \leq a_i + a_{i+2} \quad \text{und} \quad b_{i+1} \leq b_i + b_{i+2} \quad \text{für } i \geq 1 \tag{5}$$

$$a_{i+1}^2 \geq a_i a_{i+2} \quad \text{und} \quad b_{i+1}^2 \geq b_i b_{i+2} \quad \text{für } i \geq 1 \tag{6}$$

Wir werden uns nun nach und nach die Beweise dieser Punkte anschauen. Die a_i und b_i sind zwar diskrete Wahrscheinlichkeiten, aber durch Multiplikation mit $e(\mathbf{P})$ in (1)-(5) bzw. $e(\mathbf{P})^2$ in (6) bekommen wir analoge Aussagen über Anzahlen von linearen Erweiterungen. Darüber werden wir dann auch in den Beweisen argumentieren. Sei für $k \in \mathbb{Z}$ deshalb im folgenden E_k die Menge der linearen Erweiterungen, in denen y genau k Positionen über x liegt.

Beweis von (1)-(3). Zunächst sei darauf hingewiesen, dass x und y unvergleichbar sein müssen. Andernfalls wäre eins der beiden Elemente in jeder linearen Erweiterung

über dem anderen Element, so dass auch die Höhendifferenz immer mindestens 1 beträgt. Doch dann gilt auch für die erwartete Höhendifferenz $|h(y) - h(x)| \geq 1$ im Widerspruch zu unserer Auswahl von x und y .

Da nun also $x \parallel y$ gilt, können wir in einer linearen Erweiterung aus E_1 die beiden Elemente x und y vertauschen und bekommen eine lineare Erweiterung aus E_{-1} . Diese Abbildung ist injektiv und umkehrbar und Punkt (1) damit bewiesen.

Für (2) nehmen wir $a_{i+1} \neq 0$ an und zeigen $a_i \neq 0$ (falls $i \geq 1$). Sei also $\sigma \in E_{i+1}$ und sei das Intervall zwischen x und y in σ beschrieben durch $x = z_0 < z_1 < \dots < z_{i+1} = y$. Wähle dann t maximal, so dass $z_t \not\prec y$ in \mathbf{P} . Ist $t > 0$, so ist z_t unvergleichbar zu allen Elementen z_j mit $i + 1 \geq j > t$ und wir können z_t in σ direkt hinter y positionieren und bekommen dann eine lineare Erweiterung σ' aus E_i . Ist $t = 0$, so können wir x mit z_1 vertauschen und bekommen wieder eine lineare Erweiterung mit Abstand i zwischen x und y wie gewünscht. Punkt (3) ist klar. \square

Statt nur Punkt (4) zu beweisen, zeigen wir eine auf Felsner und Trotter [12] zurückgehende Verallgemeinerung. Die Beweistechnik wird uns auch helfen einen einfacheren Beweis für Punkt (5) wiederzugeben, als den zuerst von Kahn und Saks gegebenen Beweis. Die Verallgemeinerung lautet

Lemma 4.2 ([12]). *Sind x und y unvergleichbar, so gilt für jedes $i \geq 2$*

$$b_2 + a_i \leq b_1 + a_1 + \dots + a_{i-1}.$$

Beweis. Wir werden das Lemma beweisen indem wir eine injektive Abbildung Φ von $E_{-2} \cup E_i$ nach $E_{-1} \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{i-1}$ angeben. Sei σ eine lineare Erweiterung aus E_{-2} . Sei S die geordnete Menge von Elementen, die in σ vor y liegt und analog T die Menge, die hinter x liegt. Dann gibt es noch ein Element u zwischen y und x und σ lässt sich schreiben als

$$\sigma = S < y < u < x < T.$$

Gilt nun $u < x$ in \mathbf{P} , so sei $\Phi(\sigma) = S < u < y < x < T \in E_{-1}$ und andernfalls $\Phi(\sigma) = S < x < y < u < T \in E_1$.

Sei nun σ eine lineare Erweiterung aus E_i und angenommen es gibt ein Element zwischen x und y in σ , das in \mathbf{P} größer als x ist. Seien dann $\{u_1, \dots, u_r\}$ die Elemente aus dem Filter $F(x)$, die in σ zwischen x und y liegen und in der Reihenfolge $u_1 < u_2 < \dots < u_r$ vorkommen. Bezeichnen wir weiterhin x als u_0 und y als u_{r+1} sowie R_i als die geordneten Mengen, die in σ zwischen u_i und u_{i+1} liegen, so lässt sich σ schreiben als

$$\sigma = S < x < R_0 < u_1 < R_1 < u_2 < \dots < u_r < R_r < y < T.$$

Man beachte, dass alle Elemente aus R_i unvergleichbar zu u_i sein müssen, so dass es möglich ist u_i in σ hinter R_i zu schieben. Wir definieren dann

$$\Phi(\sigma) = S < R_0 < x < R_1 < u_1 < R_2 < \dots < u_{r-1} < R_r < y < u_r < T.$$

Da mindestens das Element u_r nicht mehr zwischen x und y liegt, haben wir $\Phi(\sigma) \in E_1 \cup \dots \cup E_{i-1}$.

Bleibt noch der Fall, dass $\sigma \in E_i$ ist und dass alle Elemente zwischen x und y in σ zu x unvergleichbar sind. Bezeichne R diese Menge, dann ist $\sigma = S < x < R < y < T$ und wir setzen $\Phi(\sigma) = S < R < y < x < T \in E_{-1}$. Mit ein paar Fallunterscheidungen sieht man leicht, dass Φ injektiv ist und die Behauptung folgt. \square

Mit gleichen Techniken können wir auf einfache Weise Punkt (5) von Lemma 4.1 beweisen und greifen wie schon erwähnt auf Felsner und Trotter zurück. Es sei aber darauf hingewiesen, dass auch der Beweis von Kahn und Saks lesenswert ist. Sie gehen vom Gegenteil aus und nehmen sich ein Gegenbeispiel mit so wenig Elementen wie möglich. Weiterhin habe dieses Beispiel unter einer festen Elementanzahl so viele Coverrelationen wie möglich. Kahn und Saks zeigen dann, dass dieses Beispiel eine Weite-2 Ordnung mit bestimmten Eigenschaften sein muss und dass die Bedingung in Punkt (5) im Widerspruch zur Annahme doch erfüllt ist.

Beweis von (5) aus Lemma 4.1. Wir beginnen mit einer linearen Erweiterung σ aus E_{i+1} und beschreiben eine injektive Abbildung Φ in die Menge $E_i \cup E_{i+2}$. Ist das unmittelbar über x stehende Element u in σ unvergleichbar zu x , so vertauscht Φ diese beiden Elemente und wir erhalten eine lineare Erweiterung aus E_i . Gilt nun $x < u$ in \mathbf{P} , so unterscheiden wir, ob das Element, das sich in σ direkt vor x befindet, unvergleichbar zu x ist oder nicht. Im ersten Fall vertauscht Φ wieder einfach x mit seinem Vorgänger und wir bekommen eine lineare Erweiterung aus E_{i+2} . Im zweiten Fall definieren wir u_1, \dots, u_r und die Mengen S, R_0, \dots, R_r, T wie im Beweis von Lemma 4.2. Man beachte, dass R_0 hier die leere Menge ist, da u_1 direkt über x in σ steht. Nun wenden wir die gleiche Regel für

$$\sigma = S < x < u_1 < R_1 < u_2 < R_2 < \dots < u_r < R_r < y < T$$

wie im vorigen Lemma an und erhalten mit

$$\Phi(\sigma) = S < x < R_1 < u_1 < R_2 < \dots < u_{r-1} < R_r < y < u_r < T$$

eine lineare Erweiterung aus E_i . Man überprüft wieder leicht die Injektivität von Φ und geht für die Aussage über die b_i analog vor. \square

Da Punkt (6) des Lemmas eine gesonderte Stellung hat, werden wir diesen separat im folgenden Unterkapitel behandeln.

4.2 Logkonkavität und die Aleksandrov-Fenchel Ungleichungen

Seien a_i und b_i wieder wie im vorigen Abschnitt definiert. Ziel des Abschnitts ist es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung 1 ([21]). *Die Folgen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ sind logkonkav, das heißt es gilt*

$$a_{i+1}^2 \geq a_i a_{i+2} \quad \text{und} \quad b_{i+1}^2 \geq b_i b_{i+2} \quad \text{für } i \geq 1.$$

Diese Behauptung entspricht Punkt (6) von Lemma 4.1 und hat eine gesonderte Stellung, da noch kein elementarer kombinatorischer Beweis dafür bekannt ist und da die Behauptung ein zentraler Bestandteil des Beweises für die 3/11-Balance von Partialordnungen ist. Kahn und Saks beweisen sie mit Theoremen aus der Geometrie und benutzen genauer gesagt einen Spezialfall der Aleksandrov-Fenchel Ungleichungen.

Seien K_0 und K_1 konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n und $0 < \lambda < 1$. Wir definieren dann $K_\lambda := \{(1 - \lambda)v_0 + \lambda v_1 \mid v_0 \in K_0, v_1 \in K_1\}$, was mit der Notation der Minkowski-Summe äquivalent zu $K_\lambda = (1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1$ ist. Sei nun d die Dimension der affinen Hülle von K_λ und $\text{Vol}_d(K_\lambda)$ das d -dimensionale Volumen von K_λ . Man beachte, dass d unabhängig von λ ist.

Lemma 4.3 (Spezialfall der Aleksandrov-Fenchel Ungleichungen). *Es gibt eine eindeutige Folge von Zahlen c_0, \dots, c_d , so dass für alle $0 < \lambda < 1$ gilt:*

$$\text{Vol}_d(K_\lambda) = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} c_k (1 - \lambda)^{d-k} \lambda^k.$$

Diese Folge ist logkonkav.

Die c_i werden auch gemischte Volumen von K_0 und K_1 genannt. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [6].

Wir wollen jetzt schauen wie Kahn und Saks dieses Lemma anwenden. Sei dazu \mathbf{P} eine Partialordnung mit n Elementen und $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ wieder das Ordnungspolytop. $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ kann in die Simplizes $\mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$ zerlegt werden, die über die linearen Erweiterungen $\sigma \in E(\mathbf{P})$ definiert sind (siehe voriges Kapitel). Mit diesen Notationen geht der Beweis von Kahn und Saks wie folgt.

Beweis von Behauptung 1, ([21]). Seien x und y die beiden Elemente von \mathbf{P} zu den Folgen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$. Wir betrachten die konvexen Körper $K_0 = \{v \in \mathcal{O}(\mathbf{P}) \mid v_y - v_x = 0\}$ und $K_1 = \{v \in \mathcal{O}(\mathbf{P}) \mid v_y - v_x = 1\}$ und die entsprechenden K_λ . Jedes $v \in K_\lambda$ erfüllt dann die Gleichung $v_y - v_x = \lambda$. Für $0 < \lambda < 1$ hat K_λ Dimension $n - 1$ und wir wollen nun das $(n - 1)$ -dimensionale Volumen davon berechnen. Dazu schauen wir uns die Zerlegung von K_λ an, die durch die Simplizes $\mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$ mit x vor y in σ induziert wird. Ist also $\Delta_\sigma = K_\lambda \cap \mathcal{O}(\mathbf{P}_\sigma)$, so gilt

$$K_\lambda = \bigcup_{\substack{\sigma \in E(\mathbf{P}) \\ x < y \text{ in } \sigma}} \Delta_\sigma \quad \text{und} \quad \text{Vol}_{n-1}(K_\lambda) = \sum_{\substack{\sigma \in E(\mathbf{P}) \\ x < y \text{ in } \sigma}} \text{Vol}_{n-1}(\Delta_\sigma).$$

Letzteres gilt, da das Innere der Simplizes disjunkt ist. Es genügt somit, das $(n - 1)$ -dimensionale Volumen der Δ_σ zu bestimmen. Sei also σ eine lineare Erweiterung mit x vor y . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Elemente von \mathbf{P} so bezeichnen, dass $\sigma = 1 < 2 < \dots < n$ und $x = i$ sowie $y = j$ ist. Der Simplex Δ_σ schreibt sich dann als

$$\Delta_\sigma = \{v \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n \leq 1 \text{ und } v_j - v_i = \lambda\}.$$

Für die leichtere Berechnung des Volumens machen wir eine affin lineare Transformation $Ax + b$, definiert durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} v_k &\rightarrow v_k && \text{für } k \leq i \\ v_k &\rightarrow v_k - v_i && \text{für } i < k \leq j \\ v_k &\rightarrow v_k - \lambda && \text{für } j < k. \end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix A ist eine untere Dreiecksmatrix und hat auf der Diagonalen nur Einsen zu stehen. Deshalb ist $\det(A) = 1$ und folglich erhält die Abbildung das Volumen. Das Bild von Δ_σ unter dieser Abbildung ist dann der Simplex

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_i \leq v_{j+1} \leq \dots \leq v_n \leq 1 - \lambda, \text{ und} \\ 0 \leq v_{i+1} \leq \dots \leq v_j = \lambda\}.$$

Die einzelnen Variablen v_k kommen immer entweder in der oberen oder der unteren Ungleichungskette vor und folglich ist dieser Simplex ein Produkt von zwei Simplizes kleinerer Dimension. Das Volumen von Δ_σ ist somit das Produkt der Volumina dieser zwei Simplizes, nämlich

$$\frac{(1 - \lambda)^{n-(j-i)}}{(n - (j - i))!} \frac{\lambda^{j-i-1}}{(j - i - 1)!}.$$

Wir haben also das Volumen von Δ_σ in Abhängigkeit von der Position von x und y in σ ausgedrückt. Hier kommen auch die a_k wieder ins Spiel. Bezeichne nun $\sigma(x)$ die Position von x in σ . Wir können jetzt das Volumen von K_λ berechnen:

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{n-1}(K_\lambda) &= \sum_{\substack{\sigma \in E(\mathbf{P}) \\ x < y \text{ in } \sigma}} \text{Vol}_{n-1}(\Delta_\sigma) \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in E(\mathbf{P}) \\ x < y \text{ in } \sigma}} \frac{(1 - \lambda)^{n-(\sigma(y)-\sigma(x))}}{(n - (\sigma(y) - \sigma(x)))!} \frac{\lambda^{\sigma(y)-\sigma(x)-1}}{(\sigma(y) - \sigma(x) - 1)!} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k \geq 1} e(\mathbf{P})a_k \frac{(1 - \lambda)^{(n-k)}}{(n - k)!} \frac{\lambda^{k-1}}{(k - 1)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{e(\mathbf{P})a_{k+1}}{(n - 1)!} \binom{n - 1}{k} (1 - \lambda)^{(n-k-1)} \lambda^k. \end{aligned}$$

Dabei gilt Gleichheit in (*), weil $e(\mathbf{P})a_k$ gerade der Anzahl der linearen Erweiterungen σ mit $\sigma(y) - \sigma(x) = k$ entspricht. Mit Lemma 4.3 folgt nun aber sofort, dass die Folge $(e(\mathbf{P})a_i / (n - 1)!)_i$ logkonkav ist. Damit ist insbesondere auch die Logkonkavität von $(a_i)_i$ und analog von $(b_i)_i$ gezeigt. \square

Damit sind alle Punkte von Lemma 4.1 bewiesen und wir wollen im folgenden ganz allgemein positive reelle Folgen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ betrachten, die die kommenden

Eigenschaften besitzen.

$$a_1 = b_1 \tag{7}$$

$$a_i = 0 \implies a_{i+1} = 0 \quad \text{und} \quad b_i = 0 \implies b_{i+1} = 0 \quad \text{für } i \geq 1 \tag{8}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i + \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i = 1 \tag{9}$$

$$a_2 + b_2 \leq a_1 + b_1 \tag{10}$$

$$a_{i+1} \leq a_i + a_{i+2} \quad \text{und} \quad b_{i+1} \leq b_i + b_{i+2} \quad \text{für } i \geq 1 \tag{11}$$

$$a_{i+1}^2 \geq a_i a_{i+2} \quad \text{und} \quad b_{i+1}^2 \geq b_i b_{i+2} \quad \text{für } i \geq 1 \tag{12}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} i a_i - \sum_{i \in \mathbb{N}} i b_i < 1 \tag{13}$$

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass Punkt (13) zu der Eigenschaft $|h(x) - h(y)| < 1$ korrespondiert. Theorem 4.1 ist bewiesen, wenn wir folgendes Theorem zeigen.

Theorem 4.3 ([21]). *Erfüllen die Folgen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ die Punkte (7)-(13), so ist $\sum_{i \in \mathbb{N}} b_i > \frac{3}{11}$.*

Da der Beweis recht technisch ist und sich auch in die Länge zieht, widmen wir ihm ein eigenes Kapitel.

4.3 Beweis von Theorem 4.3

Zunächst schildern wir kurz unsere Vorgehensweise. Wir nehmen an, dass es Folgen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ gibt, die Theorem 4.3 nicht erfüllen und es somit

$$B := \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i \leq \frac{3}{11} \tag{14}$$

gilt. Setzen wir $b := b_1$ und fixieren b und B , so betrachten wir unter allen Paaren von Folgen, die (7)-(12) und die Gleichungen $b_1 = b$ sowie $B = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i$ erfüllen, diejenigen, die den Term $\sum_{i \in \mathbb{N}} i a_i - \sum_{i \in \mathbb{N}} i b_i$ minimieren. Wir zeigen, dass diese Folgen eindeutig sind und beschreiben sie. Für diese wird schlussendlich Punkt (13) nicht erfüllt sein, womit die Behauptung folgt.

Wir beginnen nun damit, zu dem fixierten b und B konkrete Folgen zu definieren, die die Punkte (7)-(12) und (14) erfüllen werden. Es sei für $\epsilon = b/B$

$$b_i := b(1 - \epsilon)^{i-1} \quad \text{für } i \geq 1.$$

Damit gilt $b_1 = b$ und auch

$$\sum_{i \geq 1} b_i = b \sum_{i \geq 1} (1 - \epsilon)^{i-1} = \frac{b}{1 - (1 - \epsilon)} = B.$$

Nun zur Folge $(a_i)_i$. Klarerweise muss $a_1 := b$ sein, damit (7) erfüllt ist. Die natürliche Zahl k soll im folgenden angeben, bis zu welchem Index wir die a_i wie folgt definieren:

$$a_i := b(1 + \epsilon)^{i-1} \quad \text{für } 1 \leq i \leq k.$$

Ist $\sum_i b_i + b + b(1 + \epsilon) > 1$, so muss $k = 1$ gewählt werden, da sonst (9) verletzt wird. Ist dies nicht der Fall, so wählen wir k maximal, so dass

$$s_k := 1 - \left(\sum_{i \geq 1} b_i + b + b(1 + \epsilon) + \dots + b(1 + \epsilon)^{k-1} \right) > 0$$

erfüllt ist und zusätzlich auch

$$s_k + b(1 + \epsilon)^{k-2} \geq b(1 + \epsilon)^{k-1}$$

gilt. Die erste Bedingung brauchen wir wegen (9) und die zweite wegen Bedingung (11). Setze nun $a_i = 0$ für $i \geq k + 3$ und

$$\left. \begin{array}{l} a_{k+1} = s_k \\ a_{k+2} = 0 \end{array} \right\} \text{ falls } s_k \leq a_k, \quad \left. \begin{array}{l} a_{k+1} = (s_k + a_k)/2 \\ a_{k+2} = (s_k - a_k)/2 \end{array} \right\} \text{ falls } s_k > a_k.$$

Behauptung 2 ([21]). *Die konstruierten Folgen erfüllen (7)-(12) und (14).*

Beweis. Nach Konstruktion gelten für die Folgen unmittelbar die Punkte (7)-(9). Kommen wir zu (10). Es ist zu zeigen, dass $a_2 + b_2 \leq 2b$ erfüllt ist. Betrachten wir dabei zuerst den Fall $k > 1$. Dann ist $a_2 = b(1 + \epsilon)$ und wir erhalten $a_2 + b_2 = b(1 + \epsilon) + b(1 - \epsilon) = 2b$. Im Fall $k = 1$ gilt dann $s_1 = 1 - B - b$ und wir müssen unterscheiden zwischen $s_1 \leq a_1$ und $s_1 > a_1$. Im ersten Fall ist nach Konstruktion $a_2 = s_1 \leq a_1$ und zusammen mit $b_2 < b_1$ gilt (10). Im zweiten Fall ist $a_2 = (s_1 + a_1)/2 = (1 - B)/2$. Außerdem nutzen wir aus, dass $k = 1$ gewählt wurde, das heißt wir haben

$$\begin{aligned} B + b + b(1 + \epsilon) &> 1 \\ \iff 2b + b\epsilon &> 1 - B. \quad (*) \end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$a_2 + b_2 = \frac{1 - B}{2} + b(1 - \epsilon) \stackrel{(*)}{<} \frac{2b + b\epsilon}{2} + b - b\epsilon = 2b - \frac{b\epsilon}{2} < 2b$$

wie gewünscht.

Kommen wir nun zu Punkt (11). Für die Folge $(b_i)_i$ ist dies einfach aus der folgenden Ungleichung herzuleiten.

$$\begin{aligned} 1 - \epsilon &\leq 1 + (1 - \epsilon)^2 \\ \iff b(1 - \epsilon)^{i-1} &\leq b(1 - \epsilon)^{i-2} + b(1 - \epsilon)^i \\ \iff b_i &\leq b_{i-1} + b_{i+1}. \end{aligned}$$

Analog bekommen wir die Ungleichung $a_i \leq a_{i-1} + a_{i+1}$, wenn $i < k$ ist. Der Fall $i = k$ gilt, da dann $a_{k+1} \geq a_k$ erfüllt ist. Ist $i = k + 1$, so müssen wir wieder unterscheiden, ob $s_k \leq a_k$ oder $s_k > a_k$ gilt. Im ersten Fall haben wir $a_{k+1} = a_k$ und folglich ist insbesondere $a_{k+1} \leq a_k + a_{k+2}$. Im zweiten Fall ist nach Konstruktion $a_{k+1} = (s_k + a_k)/2$ und $a_{k+2} = (s_k - a_k)/2$. Es folgt

$$a_{k+1} = \frac{s_k + a_k}{2} = a_k + \frac{s_k - a_k}{2} = a_k + a_{k+2}. \quad (15)$$

Nun bleibt nur noch die Logkonkavität aus Punkt (12) zu zeigen. Für die b_i ist dies wieder sofort ersichtlich und ebenso für die a_i , wenn $i < k-1$. Sei also $i = k-1$ und angenommen wir haben $a_k^2 < a_{k-1}a_{k+1}$. Dies ist äquivalent zu $a_{k+1} > b(1+\epsilon)^k$ und es gilt insbesondere $a_{k+1} > a_k$ und $s_k > a_k$. Damit bekommen wir

$$a_{k+2} \stackrel{(15)}{=} a_{k+1} - a_k > b(1+\epsilon)^k - b(1+\epsilon)^{k-1}.$$

Andererseits gilt aber nun nach der Wahl von k

$$a_{k+2} = 1 - B - \sum_{i=1}^{k+1} a_i = s_{k+1} < b(1+\epsilon)^k - b(1+\epsilon)^{k-1}$$

und wir haben einen Widerspruch.

Ist $i = k$, so ist nur der Fall interessant, wenn $a_{k+2} \neq 0$. Das heißt $s_k > a_k$, doch dann ist trivialerweise nach Konstruktion $a_{k+1} > a_k$ und auch $a_{k+1} > a_{k+2}$ und es folgt die Ungleichung $a_{k+1}^2 > a_k a_{k+2}$. □

Seien im folgenden $(a'_i)_i$ und $(b'_i)_i$ Folgen, die die Punkte (7)-(12) erfüllen und ebenso die Bedingungen $\sum_{i \geq 1} b'_i = B$ und $b'_1 = b$. Kahn und Saks machen die folgende zentrale Beobachtung:

Behauptung 3 ([21]). *Für unsere konstruierten Folgen gilt*

$$\sum_{i \geq 1} ia_i - \sum_{i \geq 1} ib_i \leq \sum_{i \geq 1} ia'_i - \sum_{i \geq 1} ib'_i.$$

Beweis. Im weiteren genügt es

$$\sum_{i \leq j} a_i \geq \sum_{i \leq j} a'_i \quad \text{für } j \geq 1 \tag{16}$$

und

$$\sum_{i \leq j} b_i \leq \sum_{i \leq j} b'_i \quad \text{für } j \geq 1 \tag{17}$$

zu zeigen, denn dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} ib_i &= \sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i \geq j} b_i \right) = \sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i \geq 1} b_i - \sum_{i \leq j-1} b_i \right) \\ &\geq \sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i \geq 1} b'_i - \sum_{i \leq j-1} b'_i \right) \\ &= \sum_{i \geq 1} ib'_i \end{aligned}$$

und analog

$$\sum_{i \geq 1} ia_i \leq \sum_{i \geq 1} ia'_i.$$

Mit diesen beiden Ungleichungen folgt dann insbesondere die Behauptung.

Beginnen wir damit, Bedingung (17) zu zeigen. Dazu definieren wir $r_i = b'_i/b'_{i-1}$ für $i \geq 2$ und setzen r_i auf Null, wenn Zähler und Nenner Null sind. Eigenschaft (8) garantiert uns, dass wir nur durch Null teilen, wenn auch der Zähler Null ist. Die Folge der r_i ist dann eine absteigende Folge aufgrund von Eigenschaft (12). Gilt nun $b'_i \geq b_i$ für alle $i \geq 1$, so ist (17) klarerweise erfüllt. Andernfalls sei l der kleinste Index, so dass $b'_l < b_l$ gilt. Es folgt

$$r_l = \frac{b'_l}{b'_{l-1}} < \frac{b_l}{b_{l-1}} = 1 - \epsilon$$

und mit der Monotonie der r_i dann auch für alle $j > l$ die Ungleichung

$$b'_j = r_j r_{j-1} \cdots r_{l+1} b'_l < (1 - \epsilon)^{j-l} b_l = b_j.$$

Angenommen (17) ist nun nicht erfüllt und wir finden einen Index j mit $\sum_{i \leq j} b_i > \sum_{i \leq j} b'_i$, dann muss zumindest $j \geq l$ sein. Doch da alle b'_i mit Index $i > j$ kleiner als b_i sind, ist dann auch die Summe über alle b'_i kleiner als die Summe über die b_i . Dies ist ein Widerspruch und (17) somit gezeigt.

Für die a'_i definieren wir analog die (wegen (12)) absteigende Folge $t_i = a'_i/a'_{i-1}$ und wollen zeigen, dass die t_i durch $1 + \epsilon$ nach oben beschränkt sind. Zunächst bemerken wir, dass aufgrund von (17) im Fall $j = 2$ und $b'_1 = b_1$ die Ungleichung $b_2 \leq b'_2$ folgt. Damit erhalten wir

$$a'_2 \stackrel{(10)}{\leq} a'_1 + b'_1 - b'_2 = 2b - b'_2 \leq 2b - b_2 = a_2$$

und es folgt $t_2 \leq a_2/a_1$. Wurde bei der Konstruktion der Folge $(a_i)_i$ die Zahl $k > 1$ gewählt, so ist $a_2/a_1 = 1 + \epsilon$ und damit $t_2 \leq 1 + \epsilon$. Ist $k = 1$, so unterscheiden wir die Fälle $s_2 \leq a_2$ und $s_2 > a_2$. Im ersten Fall ist $a_2 \leq a_1$ und die Ungleichung folgt trivialerweise. Im anderen Fall ist wieder $a_2 = (1 - B)/2$ und wegen der Wahl von k gilt $B + b + b(1 + \epsilon) > 1$. Damit folgt unmittelbar

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1 - B}{2b} < 1 + \epsilon.$$

Also gilt in jedem Fall $t_2 \leq 1 + \epsilon$ und aufgrund der Monotonie auch $t_i \leq 1 + \epsilon$ für alle $i \geq 2$. Diese Tatsache benutzen wir für folgende Ungleichung:

$$a'_i = t_i t_{i-1} \cdots t_2 a'_1 < (1 + \epsilon)^{i-1} b = a_i \quad \text{für } i \leq k.$$

Damit folgt nämlich unmittelbar (16) für $j \leq k$. Für $j \geq k + 2$ ist (16) ebenfalls klar, da die Summe der a_i dann schon $1 - B$ entspricht. Bleibt der Fall $j = k + 1$. Angenommen wir haben $\sum_{i \leq k+1} a'_i > \sum_{i \leq k+1} a_i$, dann gilt aufgrund von voriger Beobachtung, dass $a'_{k+1} > a_{k+1}$ sein muss. Weiterhin ist die Summe der a_i noch nicht $1 - B$ und da sich das Ungleichheitszeichen bei $j = k + 2$ umdreht, ist $a'_{k+2} < a_{k+2}$ (insbesondere $a_{k+2} > 0$). Doch dann bekommen wir mit

$$a'_{k+1} \stackrel{(11)}{\leq} a'_k + a'_{k+2} < a_k + a_{k+2} = a_{k+1}$$

einen Widerspruch und somit gilt (16). □

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass unsere Folgen minimierend sind, bleibt folgendes zu beweisen.

Behauptung 4 ([21]). *Für die konstruierten Folgen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ gilt*

$$\sum_{i \geq 1} ia_i - \sum_{i \geq 1} ib_i \geq 1.$$

Beweis. Zunächst definieren wir $\alpha = a_{k+1}/a_k$ und $\beta = a_{k+2}/a_k$ und drücken die beiden Folgen nur mit den Parametern B, ϵ, k, α und β aus:

$$\begin{aligned} b_i &= B\epsilon(1 - \epsilon)^{i-1} & \text{und} & & a_i &= B\epsilon(1 + \epsilon)^{i-1} & \text{für } i \leq k \\ & & & & a_{k+1} &= \alpha a_k \\ & & & & a_{k+2} &= \beta a_k \\ & & & & a_i &= 0 & \text{für } i \geq k + 3. \end{aligned}$$

Je nachdem ob bei der Konstruktion der Folge $s_k \leq a_k$ oder $s_k > a_k$ gilt, bekommen wir entweder

$$(i) \quad \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \leq \alpha \leq 1 \quad \text{und} \quad \beta = 0$$

oder

$$(ii) \quad 1 + \epsilon \geq \alpha \geq 1 \quad \text{und} \quad \beta = \alpha - 1.$$

Die zweite Ungleichung in (i) ist klar und die erste bekommen wir durch die Bedingung (11) für $i = k - 1$, denn

$$\begin{aligned} a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1} &\iff \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k} \leq \frac{a_{k+1}}{a_k} \\ &\iff \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \leq \alpha. \end{aligned}$$

Die Ungleichungskette in (ii) wurde bereits gezeigt und die Gleichung folgt aus $a_{k+1} - a_k = a_{k+2}$ im Fall $s_k > a_k$. Nun gilt weiterhin für beide Fälle

$$\alpha + \beta = \frac{1}{B\epsilon}(1 + \epsilon)^{1-k} - 1 - \frac{1}{\epsilon}. \quad (18)$$

Um das zu sehen benutzen wir $\alpha + \beta = s_k/a_k$ und multiplizieren in (18) auf beiden Seiten mit a_k . Es bleibt dann

$$s_k = 1 - a_k - \frac{a_k}{\epsilon}$$

zu zeigen, doch das gilt wegen

$$\begin{aligned} s_k &= 1 - B - b \sum_{i \leq k-1} (1 + \epsilon)^i = 1 - B + b \frac{1 - (1 + \epsilon)^k}{\epsilon} \\ &= 1 - B + \frac{b}{\epsilon} - \frac{a_k(1 + \epsilon)}{\epsilon} \\ &= 1 - \frac{a_k}{\epsilon} - a_k. \end{aligned}$$

Es geht nun weiter damit, dass wir $\sum_i ia_i - \sum_i ib_i$ mit den Parametern B, ϵ, k, α und β ausdrücken wollen. Mit einer Identität für geometrische Reihen folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i \geq 1} ib_i &= B\epsilon \sum_{i \geq 1} i(1-\epsilon)^{i-1} = B\epsilon \left(\sum_{i \geq 1} (1-\epsilon)^{i-1} \right)^2 \\ &= B\epsilon \frac{1}{(1-(1-\epsilon))^2} = \frac{B}{\epsilon}.\end{aligned}$$

Für die a_i sieht das etwas technischer aus und wir wollen deswegen auch nicht zu kleinschrittig vorgehen. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i \geq 1} ia_i &= B\epsilon \left(\sum_{i=1}^k i(1+\epsilon)^{i-1} + (k+1)\alpha(1+\epsilon)^{k-1} + (k+2)\beta(1+\epsilon)^{k-1} \right) \\ &= \frac{B}{\epsilon} \left(1 + (1+\epsilon)^{k-1}(k\epsilon - \epsilon - 1 + k\epsilon^2(\alpha + \beta + 1) + \epsilon^2(\alpha + 2\beta)) \right).\end{aligned}$$

Fügen wir beides zusammen und nutzen dabei Gleichung (18) umgestellt nach $B/\epsilon \cdot (1+\epsilon)^{k-1}$, so erhalten wir

$$\sum_{i \geq 1} ia_i - \sum_{i \geq 1} ib_i = \frac{1}{\epsilon + \epsilon^2(\alpha + \beta + 1)} \left(k\epsilon - \epsilon - 1 + \epsilon^2 k(\alpha + \beta + 1) + \epsilon^2(\alpha + 2\beta) \right).$$

Da wir zeigen wollen, dass dieser Term größer gleich 1 ist, ist nach einer kleinen Umformung folgendes nachzuweisen:

$$\epsilon k + \epsilon^2 k(1 + \alpha + \beta) + \epsilon^2 \beta \geq (1 + \epsilon)^2.$$

Ersetzen wir $\alpha + \beta$ wie in (18), so erhalten wir äquivalent

$$\frac{1}{B} + \frac{\epsilon\beta}{k}(1+\epsilon)^{k-1} \geq \frac{(1+\epsilon)^{k+1}}{k\epsilon}. \quad (19)$$

Von nun an müssen wir zwischen den Fällen (i) und (ii) unterscheiden. Wir beginnen mit Fall (i) und wir sehen, dass sich (19) vereinfacht zu

$$\frac{1}{B} \geq \frac{(1+\epsilon)^{k+1}}{k\epsilon}. \quad (20)$$

Nun stellen wir zunächst zwei Ungleichungen für $1/B$ auf. Dazu ersetzen wir α in den Ungleichungen von (i) durch den Ausdruck in (18) (man beachte $\beta = 0$ hier). Wir erhalten

$$\frac{1}{B} \geq (1+\epsilon)^{k-2}(2\epsilon^2 + 2\epsilon + 1) \quad (21)$$

$$\frac{1}{B} \leq (1+\epsilon)^{k-1}(2\epsilon + 1). \quad (22)$$

Ist $k \geq 1 + 1/\epsilon$, so folgt mit (21)

$$\frac{(1+\epsilon)^{k+1}}{k\epsilon} \leq (1+\epsilon)^k < (1+\epsilon)^{k-2}(2\epsilon^2 + 2\epsilon + 1) \leq \frac{1}{B}$$

und (20) ist somit gezeigt. Angenommen also $k < 1 + 1/\epsilon$, das heißt für ϵ gilt

$$\epsilon < \frac{1}{k-1}.$$

Außerdem bekommen wir $1/k < \epsilon$ als untere Schranke, denn andernfalls wäre mit (22)

$$\begin{aligned} \frac{11}{3} &\leq \frac{1}{B} \leq (1+\epsilon)^{k-1}(2\epsilon+1) \\ &\leq (1+\epsilon)^{k+1} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

was aber nur für $k = 1$ erfüllt ist. Doch da Fall (i) aufgrund von $B \leq 3/11$ nicht bei $k = 1$ eintreten kann, ist auch dies nicht möglich.

Betrachten wir $(1+\epsilon)^{k+1}/k\epsilon$ als Funktion, so sehen wir durch Ableiten nach ϵ , dass diese Funktion einen positiven Anstieg für $\epsilon > 1/k$ hat. Es genügt also Ungleichung (20) zu zeigen, wenn wir ϵ auf $1/(k-1)$ setzen. Es ist dann

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^k \leq \frac{1}{B}$$

nachzuweisen. Dies ist mit ein wenig Analysis ersichtlich für $k \geq 3$. Im Fall $k = 2$ ist (20) für $\epsilon \leq 0.8$ erfüllt. Ist $\epsilon > 0.8$, so gilt wiederum

$$\frac{(1+\epsilon)^3}{2\epsilon} \leq 2\epsilon^2 + 2\epsilon + 1 \stackrel{(21)}{\leq} \frac{1}{B}$$

und folglich ist (20) gezeigt, da $k = 1$ im Fall (i) wie oben bereits erwähnt nicht eintreten kann.

Kommen wir zu Fall (ii) und damit zu (19). Wir haben dann $\alpha = 1 + \beta$ und ersetzen α damit in (18) um folgendes zu bekommen

$$\beta = \frac{1}{2B\epsilon(1+\epsilon)^{k-1}} - \frac{1}{2\epsilon} - 1. \quad (23)$$

Damit ändert sich (19) durch einfache Umformungen äquivalent zu

$$\frac{1}{B} \geq \frac{(4\epsilon^2 + 5\epsilon + 2)(1+\epsilon)^{k-1}}{(2k+1)\epsilon}. \quad (24)$$

Bevor wir hier weitermachen, stellen wir wie im Fall (i) zwei Schranken für $1/B$ auf. Die Ungleichung aus (ii) ist wegen $\alpha = 1 + \beta$ äquivalent zu $0 \leq \beta \leq \epsilon$ und mit (23) bekommen wir daraus die Ungleichungen

$$\frac{1}{B} \geq (2\epsilon+1)(1+\epsilon)^{k-1} \quad (25)$$

$$\frac{1}{B} \leq (2\epsilon^2 + 2\epsilon + 1)(1+\epsilon)^{k-1}. \quad (26)$$

Gilt nun $k \geq 1/\epsilon + 1/2$, so folgt bereits (24):

$$\begin{aligned} \frac{(4\epsilon^2 + 5\epsilon + 2)(1 + \epsilon)^{k-1}}{(2k + 1)\epsilon} &\leq \frac{(4\epsilon^2 + 5\epsilon + 2)(1 + \epsilon)^{k-1}}{(2 + 2\epsilon)} \\ &< (2\epsilon + 1)(1 + \epsilon)^{k-1} \\ &\stackrel{(25)}{\leq} \frac{1}{B}. \end{aligned}$$

Angenommen also wir haben $k < 1/\epsilon + 1/2$, beziehungsweise äquivalent

$$\epsilon < \frac{2}{2k - 1}. \quad (27)$$

Als nächstes nehmen wir $\epsilon \leq 3/(3k + 1)$ an und sehen dann aber mit $B \leq 3/11$ in (26), dass

$$\frac{11}{3} \leq \left(1 + \frac{3}{3k + 1}\right)^{k-1} \left(\frac{18}{(3k + 1)^2} + \frac{6}{3k + 1} + 1\right)$$

sein müsste. Doch man verifiziert schnell, dass dies für kein natürliches k gültig ist. Somit ist also

$$\epsilon > \frac{3}{3k + 1}.$$

Diese Ungleichung brauchen wir, da in diesen Fällen die rechte Seite von (24) in Abhängigkeit von ϵ monoton wachsend ist. Um das zu sehen kann man wieder nach ϵ differenzieren. Folglich reicht es hier wieder (24) für obere Schranken von ϵ zu zeigen. Ist $k \geq 2$ und nehmen wir die obere Schranke aus (27), so folgt

$$\begin{aligned} \frac{(4\epsilon^2 + 5\epsilon + 2)(1 + \epsilon)^{k-1}}{(2k + 1)\epsilon} &< \left(\frac{8}{(2k - 1)^2} + \frac{5}{2k - 1} + 1\right) \left(1 + \frac{2}{2k - 1}\right)^{k-2} \\ &< \frac{11}{3} \leq \frac{1}{B}. \end{aligned}$$

Ist nun $k = 1$, so können wir sogar 1 als obere Schranke für ϵ nehmen und bekommen

$$\frac{(4\epsilon^2 + 5\epsilon + 2)}{3\epsilon} \leq \frac{11}{3} \leq \frac{1}{B}.$$

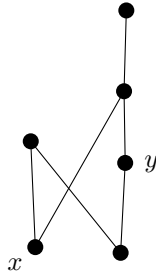
Dies zeigt (24) und damit auch die Behauptung. \square

4.4 Ansatzanalyse

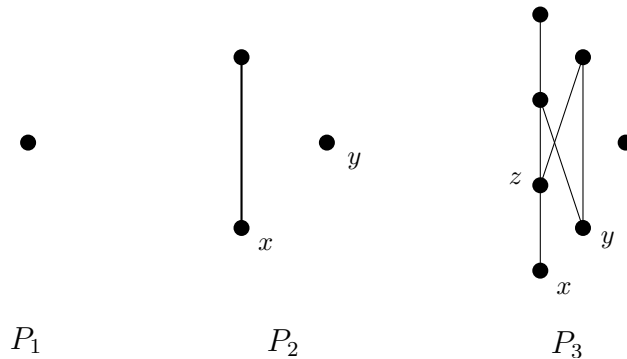
Kahn und Saks erwähnen in ihrer Arbeit, dass in der Ungleichung aus Behauptung 4 Gleichheit angenommen werden kann, allerdings nur im Fall $a_1 = b_1 = B = 3/11, a_2 = 4/11, a_3 = 1/11$. Ein Beweis wird nicht gegeben, was aber Brightwell, Felsner und Trotter in [5] nachholen. Da diese Werte nicht von einer Partialordnung angenommen werden können, hat man sogar eine strikte Ungleichung in Behauptung 4, wenn die Folgen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ über Elemente von Partialordnungen definiert sind. Also wurde damit auch gezeigt, dass für unvergleichbare Elemente x, y folgende Implikation gilt:

$$|h(y) - h(x)| \leq 1 \implies \frac{3}{11} \leq \mathbb{P}(x \prec y) \leq \frac{8}{11}.$$

Dass dies bestmöglich ist, zeigt das Beispiel von Trotter [19]:



Hier gilt $h(y) - h(x) = 1$ und $\mathbb{P}(y \prec x) = 3/11$. Und wie wir bereits weiter oben erwähnt haben, genügt auch die strikte Ungleichung $h(y) - h(x) < 1$ nicht, um garantieren zu können, dass x und y balanciert sind. Zumindest weisen Kahn und Saks aber darauf hin, dass wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass jede Partialordnung (keine Kette) verschiedene Elemente x, y besitzt mit $|h(y) - h(x)| \leq 1 - \delta$, sich auch die Konstante $3/11$ verbessern ließe. Die Existenz eines solchen δ konnte allerdings bis heute nicht gezeigt werden. In der Notiz [28] begründet Saks anhand eines Beispiels, dass $\delta < 0.134$ sein muss. Er konstruiert rekursiv eine Partialordnung P_n , wobei P_1 nur aus einem Element besteht und P_n die disjunkte Vereinigung von einem Element und der linearen Summe zweier Kopien von P_{n-1} ist. Das folgende Bild veranschaulicht die ersten Beispiele.



Sei $d(P)$ die minimale Differenz $|h(y) - h(x)|$ von unvergleichbaren Paaren (x, y) in einer Partialordnung P . In P_2 haben wir $d(P_2) = 2/3$, das von den Elementen x und y im Bild angenommen wird. Übertragen wir die Bezeichnung auf die rekursive Konstruktion wie im Bild angedeutet, so wollen wir zeigen, dass $d(P_n)$ vom Paar (x, y) angenommen wird. Sei dazu Q_n die lineare Summe in P_n und betrachten wir ein Element z , das in der unteren Kopie von P_{n-1} in Q_n vorkommt. Die durchschnittliche Höhe von z in P_{n-1} sei $h_{n-1}(z)$. Nehmen wir uns jetzt eine lineare Erweiterung von Q_n , so ist diese zusammengesetzt aus einer linearen Erweiterung der unteren Kopie von P_{n-1} und aus einer der oberen Kopie. Dabei bekommen wir jede lineare Erweiterung von P_{n-1} gleich oft als ersten Teil und folglich hat z in Q_n ebenfalls die durchschnittliche Höhe $h_{n-1}(z)$. Hat z nun in einer linearen Erweiterung L von Q_n die Höhe i , so können wir, da Q_n genau $2^n - 2$ Elemente hat, das fehlende Element

von P_n an $2^n - 1$ verschiedenen Positionen von L einfügen, um eine lineare Erweiterung von P_n zu bekommen. In i von diesen hat z die Höhe $i + 1$ und in den anderen weiterhin Höhe i . Das heißt

$$\begin{aligned} h_n(z) &= \frac{1}{e(Q_n)2^n - 1} \left(\sum_{\sigma \in E(Q_n)} h_\sigma(z)(h_\sigma(z) + 1) + (2^n - 1 - h_\sigma)h_\sigma(z) \right) \\ &= \frac{1}{e(Q_n)2^n - 1} \left(\sum_{\sigma \in E(Q_n)} 2^n h_\sigma(z) \right) \\ &= \frac{2^n}{2^n - 1} \frac{1}{e(Q_n)} \left(\sum_{\sigma \in E(Q_n)} h_\sigma(z) \right) \\ &= \frac{2^n}{2^n - 1} h_{n-1}(z) \end{aligned}$$

und damit folgt insbesondere

$$\begin{aligned} |h_n(y) - h_n(x)| &= \left(\frac{2^n}{2^n - 1} \right) \cdot |h_{n-1}(y) - h_{n-1}(x)| \\ &= \left(\prod_{k=3}^n \frac{2^k}{2^k - 1} \right) \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass sich die Differenzen in der oberen Kopie von Q_n um denselben Faktor ändern. Hatten also x und y den Term $|h(y) - h(x)|$ in P_{n-1} minimiert, so tun sie dies auch in P_n eingeschränkt auf die Elemente aus Q_n . Wir müssen also nur noch zeigen, dass das einzelne Element s in P_n zusammen mit anderen Elementen größere Höhendifferenzen besitzt. Klar ist, dass s in P_n die durchschnittliche Höhe 2^{n-1} hat. Betrachten wir also das Element z aus Q_n , dessen Höhe $h(z)$ sich diesem Wert am meisten nähert. Es ist leicht zu sehen, dass dies (unter anderem) das Element in der unteren Kopie von P_{n-1} ist, das in P_{n-1} das Maximum der längsten Kette ist. Obiges Bild zeigt z in P_3 . Wir benutzen jetzt wieder die rekursive Beschreibung von $h_n(z)$ und bekommen

$$h_n(s) - h_n(z) = 2^{n-1} - \frac{8}{3} \prod_{k=3}^n \frac{2^k}{2^k - 1}.$$

Damit ist $h_n(y) - h_n(x) < h_n(s) - h_n(z)$ äquivalent zu

$$\frac{10}{3} \prod_{k=3}^n \frac{2^k}{2^k - 1} < 2^{n-1}$$

und dies ist für alle $n \geq 3$ erfüllt. Somit wird $d(P_n)$ bei x und y angenommen und wir erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n) = \frac{2}{3} \prod_{k=3}^{\infty} \frac{2^k}{2^k - 1} \approx 0.866.$$

Saks stellt in seiner Notiz auch die Vermutung auf, dass $d(\mathbf{P}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n)$ für alle Partialordnungen \mathbf{P} gilt. Bei Richtigkeit dieser Vermutung könnte man dann mit

den Kahn-Saks-Methoden eine bessere Balance als $3/11$ für Partialordnungen zeigen. Wie Saks aber auch erwähnt, würde dies immer noch nicht für die $1/3$ - $2/3$ Vermutung reichen. Es wäre deshalb interessant zu wissen, wie groß $|h(x) - h(y)|$ sein kann, um folgern zu können, dass das Paar (x, y) balanciert ist. Felsner und Trotter zeigen in diesem Sinne folgendes Theorem.

Theorem 4.4 ([12]). *Sind x, y verschiedene Elemente der Partialordnung \mathbf{P} , so gilt die Implikation*

$$|h(y) - h(x)| \leq \frac{2}{3} \implies \frac{1}{3} \leq \mathbb{P}(y \prec x) \leq \frac{2}{3}.$$

Felsner und Trotter weisen in [12] aber jediglich darauf hin, dass man dieses Theorem relativ leicht mit den Kahn-Saks-Methoden bekommt, und verzichten auf einen Beweis. Wir wollen an dieser Stelle noch eine weitere wichtige Bemerkung machen.

Bemerkung 4.1. Theorem 4.2 und Theorem 4.4 sind Aussagen, die symmetrisch in x und y sind. Schaut man sich aber die Kahn-Saks-Methode an, so sehen wir, dass dort mehr bewiesen wird. Kahn und Saks zeigen die Implikation

$$\mathbb{P}(y \prec x) < \frac{3}{11} \implies h(y) - h(x) > 1$$

und das bedeutet insbesondere $h(y) > h(x)$. Überträgt man das auf die modifizierte Variante von Felsner und Trotter, so folgt aus $\mathbb{P}(y \prec x) < 1/3$ dann $h(y) - h(x) > 2/3$ und wieder insbesondere $h(y) > h(x)$.

4.5 Die Cross Product Conjecture

In diesem Abschnitt wollen wir über die Ergebnisse des Artikels [5] von Brightwell, Felsner und Trotter berichten. Die Autoren nutzen die Erkenntnisse des Kahn-Saks-Artikels und knüpfen daran an. Dabei entwickeln sie neue Techniken und stellen eine interessante Vermutung auf, die als *Cross Product Conjecture* bezeichnet wird. Ein Spezialfall dieser Vermutung ist dann essentiell für ihr Hauptresultat:

Theorem 4.5 ([5]). *Ist \mathbf{P} eine Partialordnung, die keine Kette ist, so gibt es Elemente $x, y \in \mathbf{P}$ mit*

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \leq \mathbb{P}(x \prec y) \leq \frac{5 + \sqrt{5}}{10}.$$

Wir wollen uns im folgenden anschauen mit welchen Mitteln die Autoren das Theorem beweisen, dabei aber nicht so detailliert vorgehen wie beim Kahn-Saks-Beweis. Brightwell, Felsner und Trotter betrachten nun auch die relativen Höhen von drei (statt nur zwei) Elementen einer Partialordnung. Sehr nützlich ist dabei

Lemma 4.4 ([5]). *Jede Partialordnung \mathbf{P} (keine Kette und mit mindestens drei Elementen) besitzt verschiedene Elemente $x, y, z \in \mathbf{P}$ mit der Eigenschaft*

$$h(x) \leq h(y) \leq h(z) \leq h(x) + 2.$$

Beweis. Sei n die Anzahl der Elemente von \mathbf{P} . Betrachten wir zunächst den Fall, dass n ungerade ist. Wir können wieder annehmen, dass \mathbf{P} kein globales Minimum oder Maximum besitzt, denn das Entfernen eines solchen Elements ändert nicht die Höhendifferenzen. Die durchschnittlichen Höhen $h(x)$ liegen dann im offenen Intervall $(1, n)$. Zerlegen wir das Intervall in die $(n-1)/2$ Teilintervalle $(1, 3], (3, 5], \dots, (n-2, n)$, so liegen nach dem Schubfachprinzip in einem Teilintervall mindestens drei Punkte $h(x), h(y), h(z)$. Diese erfüllen dann die Ungleichung aus der Behauptung.

Ist n gerade, so können wir $(1, n)$ nicht in Intervalle der Länge 2 zerlegen. Seien die Elemente von \mathbf{P} so bezeichnet, dass

$$1 < h(x_1) \leq h(x_2) \leq \dots \leq h(x_n) < n$$

gilt. Aufgrund der Symmetrie können wir annehmen, dass $s := h(x_1) - 1 \leq n - h(x_n)$ ist. Da nun $h(x_1) + h(x_2) \geq 3$ gilt, befinden sich dann die $n-1$ Punkte $h(x_2), \dots, h(x_n)$ im Intervall $[2-s, n-s]$ der Länge $n-2$ und wir können wie im ersten Fall vorgehen. \square

Wollen wir Theorem 4.5 beweisen, so können wir nach Bemerkung 1.3 annehmen, dass \mathbf{P} keine lineare Summe ist. In diesem Fall ist es nicht möglich, dass die Elemente x, y, z aus dem Lemma eine Kette $x < y < z$ in \mathbf{P} bilden. Gilt nämlich $x < y$, so hat y in jeder linearen Erweiterung eine Höhe, die sich mindestens um eins von der Höhe von x unterscheidet. Das heißt $h(y) \geq h(x) + 1$. Man überlegt sich leicht, dass sogar die strikte Ungleichung gilt. Folglich ist $h(z) > h(y) + 1 > h(x) + 2$ und die drei Elemente können nicht die Ungleichung des Lemmas erfüllen.

Auf das Lemma aufbauend beweisen Brightwell, Felsner und Trotter folgendes Theorem.

Theorem 4.6 ([5]). *Seien x, y, z verschiedene Elemente von \mathbf{P} mit der Eigenschaft $h(x) \leq h(y) \leq h(z) \leq h(x) + 2$, dann gilt*

- *ist $x < y$ in \mathbf{P} , so gilt $\mathbb{P}(z \prec y) \geq \frac{1}{3}$*
- *ist $y < z$ in \mathbf{P} , so gilt $\mathbb{P}(y \prec x) \geq \frac{1}{3}$*
- *ist $x \parallel y$ und $y \parallel z$ in \mathbf{P} , dann gilt entweder*
 - $\mathbb{P}(y \prec x) \geq \frac{1}{3}$ oder $\mathbb{P}(z \prec y) \geq \frac{1}{3}$, oder
 - $\mathbb{P}(y \prec x) + \mathbb{P}(z \prec y) \geq (5 - \sqrt{5})/5$.

Nach Bemerkung 4.1 gilt dann im ersten Fall auch $\mathbb{P}(z \prec y) \leq 2/3$, so dass das Paar (y, z) balanciert ist. Analoges trifft für die anderen Fälle zu. Mit Bemerkung 4.1 gilt dann also, dass dieses Theorem das Haupttheorem 4.5 impliziert, denn der einzige kritische Fall ist der dritte mit $\mathbb{P}(y \prec x) + \mathbb{P}(z \prec y) \geq (5 - \sqrt{5})/5$, doch auch hier ist klar, dass der größere der beiden Summanden größer gleich $(5 - \sqrt{5})/10$ sein muss. Für den Beweis nutzen die Autoren einen Spezialfall der schon erwähnten *Cross Product Conjecture*. Um diese zu formulieren, seien x, y, z drei verschiedene Elemente von \mathbf{P} und für $i, j \geq 1$ bezeichne $L(i, j)$ die Anzahl der linearen Erweiterungen σ von \mathbf{P} mit $h_\sigma(y) - h_\sigma(x) = i$ und $h_\sigma(z) - h_\sigma(y) = j$. Die Vermutung lautet dann wie folgt.

Vermutung (Cross Product Conjecture [12]). *Für alle $i, j \geq 1$ gilt*

$$L(i, j)L(i + 1, j + 1) \leq L(i, j + 1)L(i + 1, j).$$

Der für das Theorem relevante Spezialfall ist dann

Theorem 4.7 ([5]).

$$L(1, 1)L(2, 2) \leq L(1, 2)L(2, 1).$$

Gewissermaßen spielt diese Ungleichung für Theorem 4.5 die gleiche Rolle, wie die Logkonkavität der Sequenzen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ für das Resultat von Kahn und Saks. Bewiesen wird sie mit Hilfe des *Ahlsvede-Daykin Four Functions Theorem* (FFT) [1], das wir uns gleich näher anschauen wollen. Wir brauchen dafür folgende Struktur.

Definition 4.1. Eine Partialordnung \mathbf{P} heißt *distributiver Verband*, wenn es Abbildungen $\vee, \wedge: \mathbf{P} \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ gibt, die folgende Eigenschaften erfüllen.

- für $x, y \in \mathbf{P}$ und $z := x \vee y$ gilt $x \leq z, y \leq z$ und die Implikation

$$x \leq z' \text{ und } y \leq z' \implies z \leq z'$$

- für $x, y \in \mathbf{P}$ und $z := x \wedge y$ gilt $z \leq x, z \leq y$ und die Implikation

$$z' \leq x \text{ und } z' \leq y \implies z' \leq z$$

- für alle $x, y, z \in \mathbf{P}$ gilt

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Anschaulich ist $x \vee y$ die eindeutige kleinste obere Schranke von x und y . Analog ist dann $x \wedge y$ die eindeutige größte untere Schranke. Als Beispiel für einen distributiven Verband sei hier der *Boolesche Verband* B_n genannt. Dieser hat die Potenzmenge von $[n]$ als Grundmenge und die Mengeninklusion als Relation. Für zwei Mengen $A, B \in B_n$ entspricht dann $A \vee B$ gerade der Menge $A \cup B$ und $A \wedge B$ der Menge $A \cap B$.

Das FFT macht nun eine Aussage über einen distributiven Verband L und Abbildungen der Art $f: L \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei im folgenden $f(X) = \sum_{x \in X} f(x)$ für eine Teilmenge X des Verbandes und

$$X \wedge Y = \{x \wedge y \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$X \vee Y = \{x \vee y \mid x \in X, y \in Y\}$$

für Teilmengen X und Y . Mit dieser Notation können wir das FFT wie folgt formulieren.

Theorem 4.8 (Ahlswede-Daykin Four Functions Theorem [1]). *Sind α, β, γ und δ Abbildungen von L nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die die Ungleichung*

$$\alpha(x)\beta(y) \leq \gamma(x \wedge y)\delta(x \vee y) \quad \text{für alle } x, y \in L$$

erfüllen, so gilt

$$\alpha(X)\beta(Y) \leq \gamma(X \wedge Y)\delta(X \vee Y) \quad \text{für alle nichtleeren } X, Y \subseteq L.$$

Dieses Theorem konnte schon mehrfach sinnvoll eingesetzt werden. Einen interessanten Spezialfall bekommen wir, wenn man alle vier Abbildungen als konstante Funktion nimmt, die alles auf die 1 abbildet. Nach dem Theorem folgt dann für alle Teilmengen X und Y :

$$|X||Y| \leq |X \wedge Y||X \vee Y|.$$

Diese Ungleichung nutzen unter anderem Biró und Trotter [2] für den Beweis der Logkonkavität der Höhensequenz $(h_i)_i$ in einigen Spezialfällen, wobei h_i die Anzahl der linearen Erweiterungen angibt, in denen ein festes Element der Ordnung die Höhe i besitzt. Dabei ist zu beachten, dass dies ein rein kombinatorischer Beweis ist, der nicht die Aleksandrov-Fenchel Ungleichungen braucht. Biró und Trotter erhoffen sich auch, dass man mit dieser Methode die Fälle bestimmen kann, in denen die Ungleichung $h_{i+1}^2 \geq h_i h_{i+2}$ strikt ist. Kann man dann den Fehlerterm bestimmen, so würde dies möglicherweise bedeuten, dass eine verfeinerte Analyse der Kahn-Saks Methode zu besseren Schranken für die Balance von Partialordnungen führt.

Eine weitere Anwendung des Theorems ist die folgende Ungleichung von Fishburn, die wir auch gleich benutzen werden.

Theorem 4.9 (Fishburn Ungleichung [14]). *Sind V und W Filter der Partialordnung \mathbf{P} , so gilt*

$$\frac{e(V)e(W)}{e(V \cup W)e(V \cap W)} \leq \frac{|V|!|W|!}{|V \cup W|!|V \cap W|!} \leq 1.$$

Damit können wir nun endlich den Spezialfall der *Cross Product Conjecture* beweisen.

Beweis von Theorem 4.7. Für den Beweis der Ungleichung

$$L(1, 1)L(2, 2) \leq L(1, 2)L(2, 1)$$

sind nur lineare Erweiterungen relevant, in denen die drei Elemente x, y, z auch in genau dieser Reihenfolge (also $x - y - z$) vorkommen. Dementsprechend können wir $x < y < z$ in \mathbf{P} annehmen. Weiterhin ist die Ungleichung trivial, wenn $x < y$ oder $y < z$ keine Coverrelation ist, da dann $L(1, 1) = 0$ gilt.

Sei nun $U := F(y)$ der von y induzierte Filter, $D := I(y)$ das von y induzierte Ideal und I die Menge der zu y unvergleichbaren Elemente. Sei weiterhin \mathcal{U} die Menge der Filter in der von I induzierten Ordnung. Dann ist \mathcal{U} , geordnet nach Inklusion, ein distributiver Verband. Ist $A \in \mathcal{U}$, so bezeichne A^c das Komplement von A in I .

Wir wollen nun zunächst eine weitere Beschreibung für $L(i, j)$ finden. Dazu nehmen wir uns eine lineare Erweiterung σ mit $h_\sigma(y) - h_\sigma(x) = i$ und $h_\sigma(z) - h_\sigma(y) = j$. Sei dann A die Menge der Elemente aus I , die in σ hinter y stehen. Beachte, dass $A \in \mathcal{U}$ gilt. Schränken wir σ auf die Elemente nach y ein, so bekommen wir also eine lineare Erweiterung von der auf $A \cup U$ induzierten Ordnung, in der z an j -ter Position steht. Sei $f_j(A)$ die Anzahl solcher linearer Erweiterungen. Analog bilden die Elemente in σ vor y eine lineare Erweiterung von der auf $A^c \cup D$ induzierten Ordnung, in der x an Position $|A^c \cup D| - i + 1$ steht. Die Anzahl davon sei wiederum mit $g_i(A^c)$ bezeichnet. Hat man umgekehrt zwei lineare Erweiterungen dieser Art, so können wir diese eindeutig zusammensetzen um eine lineare Erweiterung von $L(i, j)$ zu bekommen. Es folgt

$$L(i, j) = \sum_{A \in \mathcal{U}} f_j(A) g_i(A^c).$$

Wir wollen das *Four Functions Theorem* auf \mathcal{U} und folgende Abbildungen anwenden:

$$\begin{aligned} \alpha(A) &= f_1(A) g_1(A^c) \\ \beta(A) &= f_2(A) g_2(A^c) \\ \gamma(A) &= f_2(A) g_1(A^c) \\ \delta(A) &= f_1(A) g_2(A^c). \end{aligned}$$

Sind nämlich die geforderten Ungleichungen erfüllt, so gilt insbesondere

$$\begin{aligned} &\alpha(\mathcal{U})\beta(\mathcal{U}) \leq \gamma(\mathcal{U})\delta(\mathcal{U}) \\ \iff &\sum_{A \in \mathcal{U}} \alpha(A) \sum_{A \in \mathcal{U}} \beta(A) \leq \sum_{A \in \mathcal{U}} \gamma(A) \sum_{A \in \mathcal{U}} \delta(A) \\ \iff &\sum_{A \in \mathcal{U}} f_1(A) g_1(A^c) \sum_{A \in \mathcal{U}} f_2(A) g_2(A^c) \leq \sum_{A \in \mathcal{U}} f_2(A) g_1(A^c) \sum_{A \in \mathcal{U}} f_1(A) g_2(A^c) \\ \iff &L(1, 1)L(2, 2) \leq L(1, 2)L(2, 1) \end{aligned}$$

und wir wären fertig. Die nun nachzuweisenden Ungleichungen sind dann

$$f_1(A) g_1(A^c) f_2(B) g_2(B^c) \leq f_2(A \cup B) g_1(A^c \cap B^c) f_1(A \cap B) g_2(A^c \cup B^c)$$

für alle $A, B \in \mathcal{U}$. Dafür zeigen wir

$$f_1(A) f_2(B) \leq f_2(A \cup B) f_1(A \cap B) \tag{28}$$

für alle $A, B \in \mathcal{U}$, denn dann folgt aus Gründen der Symmetrie die analoge Ungleichung der g_j und damit auch insgesamt obige Ungleichung. Gibt es in B mindestens zwei Elemente, die kleiner als z sind, so ist $f_2(B) = 0$ und (28) ist erfüllt. Betrachten wir also zunächst den Fall, dass es genau ein Element v in B gibt mit $v < z$. Trivial ist wieder der Fall, wenn A ein Element besitzt, das kleiner z ist, da dann $f_1(A) = 0$ gilt. Wir nehmen also an, dass so ein Element nicht existiert. Jede lineare Erweiterung, die zu $f_1(A)$ gehört, beginnt mit z und wir zählen somit eigentlich lineare Erweiterungen von $V := A \cup U \setminus \{z\}$. In $f_2(B)$ werden ähnlich dazu die linearen Erweiterungen von $W := B \cup U \setminus \{v, z\}$ gezählt. Analog bekommen wir

$f_2(A \cup B) = e(V \cup W)$ und $f_1(A \cap B) = e(V \cap W)$. Da V und W Filter von \mathbf{P} sind, folgt dann mit der Fishburn Ungleichung (28).

Es bleibt der Fall, dass es kein $v \in B$ mit $v < z$ gibt. Das Element z ist dann ein Minimum von $A \cup B \cup U$ und unvergleichbar zu allen Elementen aus $A \cup B$. Wir hatten eben schon $f_1(C) = e(C \cup U \setminus \{z\})$ für beliebige $C \in \mathcal{U}$ begründet und bekommen deshalb wieder mit der Fishburn Ungleichung

$$f_1(A)f_1(B) \leq f_1(A \cup B)f_1(A \cap B).$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit

$$f_2(B)/f_1(B) \leq f_2(A \cup B)/f_1(A \cup B) \quad (29)$$

so bekommen wir sofort (28). Bleibt also (29) zu zeigen. $f_2(B)$ zählt anders betrachtet genau die linearen Erweiterungen auf der durch $B \cup U \setminus \{z\}$ induzierten Ordnung, deren erstes Element nach Annahme unvergleichbar zu z ist. Da $f_1(B) = e(B \cup U \setminus \{z\})$ gilt, ist die linke Seite von (29) einfach die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gezogene lineare Erweiterung von $B \cup U \setminus \{z\}$ mit einem zu z unvergleichbaren Element beginnt. Bezeichnet $V(B, U)$ die Menge der Elemente aus U , die z in $B \cup U$ als einziges Element unter sich haben, so lässt sich dies auch schreiben als

$$\frac{f_2(B)}{f_1(B)} = 1 - \sum_{v \in V(B, U)} \frac{e(B \cup U \setminus \{z, v\})}{e(B \cup U \setminus \{z\})}.$$

Analog können wir dies für $A \cup B$ machen und es bleibt

$$\sum_{v \in V(A \cup B, U)} \frac{e(A \cup B \cup U \setminus \{z, v\})}{e(A \cup B \cup U \setminus \{z\})} \leq \sum_{v \in V(B, U)} \frac{e(B \cup U \setminus \{z, v\})}{e(B \cup U \setminus \{z\})}$$

zu zeigen. Da außerdem $V(A \cup B, U) \subseteq V(B, U)$ gilt, genügt es

$$\frac{e(A \cup B \cup U \setminus \{z, v\})}{e(A \cup B \cup U \setminus \{z\})} \leq \frac{e(B \cup U \setminus \{z, v\})}{e(B \cup U \setminus \{z\})}$$

für beliebige $v \in V(A \cup B, U)$ zu beweisen. Dies bekommen wir jedoch wieder mit der Fishburn Ungleichung, wenn wir $V = B \cup U \setminus \{z\}$ und $W = A \cup B \cup U \setminus \{z\}$ wählen. \square

Kommen wir nun zu Theorem 4.5. Wir nehmen uns dafür die drei Elemente x, y und z aus Lemma 4.4, die die Ungleichung $h(x) \leq h(y) \leq h(z) \leq h(x) + 2$ erfüllen. Für den Beweis des Theorems unterscheiden die Autoren folgende Fälle:

- Fall A: $x < z$ und $y < z$ in \mathbf{P}
- Fall B: $y < z$, $x \parallel y$ und $x \parallel z$ in \mathbf{P}
- Fall C: x, y, z sind paarweise unvergleichbar
- Fall D: $x < z$, $x \parallel y$ und $y \parallel z$ in \mathbf{P} .

Es genügt diese Fälle zu betrachten, da wir alle weiteren Fälle über Dualität bekommen, das heißt durch Umdrehen der Partialordnung. Wir wollen uns nun anschauen, wie die Autoren die Fälle abarbeiten und wo die *Cross Product Conjecture* eingeht. Da einige Beweise sehr technisch sind und teilweise Computerprogramme benutzt wurden, gehen wir eher skizzenhaft vor. An einigen Stellen werden wir aber auch ausführlicher als die Autoren argumentieren, da sie desöfteren etwas knapp begründen. Außerdem werden wir die Bezeichnungen B, b, b_i, a_i und ϵ aus dem Kahn-Saks Ansatz übernehmen.

Behauptung ([5]). *Im Fall A gilt*

$$\mathbb{P}(y \prec x) \geq \frac{1}{3}.$$

Beweis. Sei c_i die Wahrscheinlichkeit, dass z genau i Positionen über x in einer linearen Erweiterung liegt. Es ist $h_\sigma(z) - h_\sigma(x) \geq 1$ für alle linearen Erweiterungen σ , da wir $x < z$ in \mathbf{P} haben, und somit $\sum_{i \geq 1} c_i = 1$. Liegt x direkt unter z , so muss wegen $y < z$ das Element y vor x stehen, das heißt $c_1 \leq \mathbb{P}(y \prec x) = B$. Liegt x höchstens zwei Positionen unter z , so ist entweder y vor x oder die drei Elemente kommen hintereinander in der Reihenfolge $x - y - z$ vor und wir sind im Fall $h_\sigma(y) - h_\sigma(x) = 1$. Das heißt also $c_1 + c_2 \leq B + b$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} 2 \geq h(z) - h(x) &= \sum_{i \geq 1} i c_i \geq c_1 + 2c_2 + 3 \sum_{i \geq 3} c_i \\ &= c_1 + 2c_2 + 3(1 - c_1 - c_2) = 3 - c_1 - (c_1 + c_2) \\ &\geq 3 - B - (B + b) = 3 - 2B - b \end{aligned}$$

und es folgt $1 \leq 2B + b \leq 3B$ und somit $B \geq 1/3$. □

Fall B ist schon etwas interessanter, da im Beweis Ungleichungen für die Werte $L(i, j)$ benutzt werden. Sei von nun an $p(i, j) = L(i, j)/e(\mathbf{P})$ die zu $L(i, j)$ zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Behauptung ([5]). *In Fall B gilt*

$$\mathbb{P}(y \prec x) \geq \frac{1}{3}.$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass $p(-1, 2) = p(1, 1) = p(-2, 1) \leq b_2$ und

$$\sum_{j \geq 1} p(1, j) = \sum_{j \geq 2} p(-1, j) = b_1$$

gilt. Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} h(z) - h(y) &= \sum_{i, j} j p(i, j) = 1 + \sum_{i, j} (j - 1) p(i, j) \\ &\geq 1 + p(-1, 2) + 2 \sum_{j \geq 3} p(-1, j) + \sum_{j \geq 2} p(1, j) \\ &= 1 + 2 \sum_{j \geq 2} p(-1, j) - p(-1, 2) + \sum_{j \geq 1} p(1, j) - p(1, 1) \\ &\geq 1 + 2b_1 - b_2 + b_1 - b_2 = 1 + 3b_1 - 2b_2. \end{aligned}$$

Das können wir benutzen, um die Höhen von x und y in Beziehung zu setzen:

$$h(y) - h(x) \leq 2 - (h(z) - h(y)) \leq 1 - 3b_1 + 2b_2.$$

Da dies wegen $h(y) - h(x) = \sum_{i \geq 1} i(a_i - b_i)$ als Bedingung an die Sequenzen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ betrachtet werden kann, ist es möglich hier wieder mit den Kahn-Saks Methoden weiterzuarbeiten. Das heißt man kann auch hier wieder die konstruierten Folgen von Kahn und Saks benutzen und zeigen, dass selbst im schlimmsten Fall $B \geq 0.3355$ gilt. Auf diese Rechnungen wollen wir hier aber verzichten. \square

Fall C wollen wir nicht behandeln. Brightwell, Felsner und Trotter beweisen diesen Fall indem sie die Kahn-Saks Methoden erweitern und ausbauen. Dabei benutzen sie nicht den Spezialfall der *Cross Product Conjecture*. Der Beweis ist recht technisch und analytisch und wird im Stil des Kahn-Saks Artikels bewiesen.

Behauptung ([5]). *In Fall D gilt*

$$\mathbb{P}(y \prec x) + \mathbb{P}(z \prec y) \geq \frac{5 - \sqrt{5}}{5}.$$

Beweis. Sei $B = \mathbb{P}(y \prec x)$ und $B' = \mathbb{P}(z \prec y)$, zu zeigen ist dann $X := B + B' \geq (5 - \sqrt{5})/5$. Weiterhin sei $x_1 = p(1, 1)$, $x_2 = p(1, 2) + p(2, 1)$, $x_3 = p(2, 2)$, $x_4 = p(1, 3) + p(3, 1)$, $x_5 = p(2, 3) + p(3, 2)$ und $x_6 = p(1, 4) + p(4, 1)$. Die Autoren stellen nun einige Ungleichungen für die Variablen X, x_1, \dots, x_6 auf. Erwähnt sei hier, dass sie mit Computerprogrammen ermitteln konnten, welche Ungleichungen hier relevant erscheinen. Interessant ist, dass durch diese Suche mit dem Computer erst die Idee der *Cross Product Conjecture* aufkam, da man sah, dass diese Ungleichung im Fall $i = j = 1$ sozusagen der fehlende Schlüssel zum Beweis war. Die anderen wichtigen Ungleichungen sind linear und man bekommt sie durch elementare Überlegungen an die $p(i, j)$, wie zum Beispiel $p(j, -1) = p(j - 1, 1)$ für $j \geq 2$ oder $p(i, j) = 0$ wenn $i + j \leq 0$ (da $x < z$). Zusammen mit $h(z) - h(x) \leq 2$ kann man dann folgende Ungleichung herleiten:

$$4 \leq 5X + 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5. \quad (30)$$

Die anderen linearen Ungleichungen, die hergeleitet werden, sind

$$2x_1 + x_2 \leq X \quad (31)$$

$$x_5 \leq x_4 + x_6 \quad (32)$$

$$X + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1. \quad (33)$$

Mit dem Spezialfall der *Cross Product Conjecture* aus Theorem 4.7 folgt dann

$$p(1, 1)p(2, 2) \leq p(1, 2)p(2, 1) \leq \frac{(p(1, 2) + p(2, 1))^2}{4}$$

wobei die zweite Ungleichung die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ist. Damit folgt

$$x_1 x_3 \leq \frac{x_2^2}{4}. \quad (34)$$

Mit ein paar Umformungen und etwas Analysis zeigen die Autoren dann, dass aus den Ungleichungen (30)-(34) die geforderte Beziehung $X \geq (5 - \sqrt{5})/5$ folgt. \square

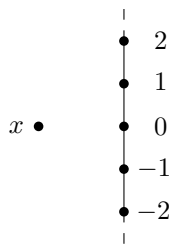
Damit sind alle Fälle von Theorem 4.6 abgearbeitet und das Hauptresultat von Brightwell, Felsner und Trotter ist bewiesen. Die Autoren zeigen auch, dass man ihre Techniken auf den unendlichen Fall anwenden kann. Mehr dazu aber im nächsten Kapitel.

Die Kahn-Saks Methoden werden auch noch in einer weiteren Arbeit von Fishburn, Gehrlein und Trotter [15] benutzt. Die Autoren zeigen, dass Partialordnungen der Höhe 2 balanciert sind. Da der Beweis aber recht technisch ist, wollen wir ihn in dieser Masterarbeit nicht behandeln. Wir denken auch, dass es in diesem Fall eigentlich möglich sein sollte, einen kombinatorischen Beweis dafür zu finden. Auf die Kahn-Saks Methoden oder sogar auf Konvexgeometrie zu verzichten, wäre natürlich auch bei den anderen Beweisen wünschenswert. Denn so wichtig auch die Resultate sein mögen, der Beweis von Kahn und Saks wird wohl nie im BUCH der Beweise landen. Andererseits sind durch diese Techniken natürlich viele neue interessante Probleme in den Fokus gerückt, wie zum Beispiel die *Cross Product Conjecture*, um abschließend noch mal zu betonen, wie wichtig die zwei behandelten Arbeiten sind.

5 Unendliche Partialordnungen

In diesem Kapitel wollen wir uns anschauen, inwieweit wir die Theorie der balancierten Paare auf Partialordnungen unendlicher Größe ausweiten können. Fraglich ist dabei, wie wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(x \prec y)$ definieren wollen, denn die Definition aus dem endlichen Fall kann hier nicht übernommen werden, da es hier unendlich viele lineare Erweiterungen zu einer Ordnung geben wird.

Betrachten wir folgenden Ansatz. Sei $\mathbf{P} = (X, \leq)$ eine unendliche Partialordnung und sei $(X_i)_i$ eine bezüglich Inklusion aufsteigende Folge von endlichen konvexen Teilmengen von X mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$. Konvexe Teilmenge meint hier, dass wenn $x, y \in X_n$ ist und $x \leq z \leq y$ gilt, dann auch $z \in X_n$ folgt. Die Restriktion von \mathbf{P} auf die Elemente aus X_n bezeichnen wir mit \mathbf{P}_n . Für Elemente $x, y \in X$ finden wir dann immer einen Index k , so dass $x, y \in X_k$ und wir können für alle $n \geq k$ die Wahrscheinlichkeit definieren, dass x in einer linearen Erweiterung von \mathbf{P}_n vor y steht. Sei dies mit $\mathbb{P}(x \prec y \mid \mathbf{P}_n)$ bezeichnet. Existiert nun der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x \prec y \mid \mathbf{P}_n)$, so könnte man darüber $\mathbb{P}(x \prec y)$ definieren. Aber dies ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn dieser Grenzwert unabhängig von der Folge der X_i ist. Dies ist im allgemeinen nicht so, wie folgendes Beispiel von Brightwell [3] zeigt:



Das Beispiel zeigt die linear angeordneten ganzen Zahlen und ein einzelnes Element x , das zu allen anderen unvergleichbar ist. Ist dann $X_n = \{-n, \dots, 2n\} \cup \{x\}$ für $n \geq 1$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(x \prec 0 \mid \mathbf{P}_n) = 1/3$. Für $Y_n = \{-2n, \dots, n\} \cup \{x\}$ würde man dann aber $2/3$ als Grenzwert bekommen.

Wie Brightwell anhand eines weiteren Beispiels zeigt, genügt es auch nicht zu fordern, dass jedes Element nur endlich (aber beliebig) viele Unvergleichbarkeiten besitzt. Das heißt wir brauchen ein k , so dass jedes Element zu höchstens k anderen Elementen unvergleichbar ist. Eine Partialordnung, die diese Eigenschaft besitzt, wird k -dünn genannt, beziehungsweise auch einfach nur dünn, wenn ein solches k mit dieser Eigenschaft existiert. Wie im endlichen Fall wollen wir annehmen, dass \mathbf{P} keine lineare Summe ist, das heißt der Graph der Unvergleichbarkeiten (bezeichnet mit $\overline{G}(\mathbf{P})$) ist zusammenhängend. Zusammenhang für einen unendlichen Graphen soll bedeuten, dass je zwei Knoten über einen Pfad endlicher Länge verbunden sind. Somit erreichen wir mit einer Breitensuche jeden Knoten nach einer endlichen Anzahl von Schritten und es ist klar, dass \mathbf{P} abzählbar viele Elemente hat. Weiterhin gilt mit diesen Bedingungen folgende

Behauptung. \mathbf{P} ist lokal endlich, das heißt zu je zwei Elementen x, y von \mathbf{P} mit $x \leq y$ gibt es nur endlich viele $z \in \mathbf{P}$ mit $x \leq z \leq y$.

Beweis. Angenommen es gibt $x, y \in \mathbf{P}$ mit $x \leq y$ und die Menge $Z = \{z \in \mathbf{P} \mid x < z < y\}$ ist unendlich groß. Da $\overline{G}(\mathbf{P})$ zusammenhängend ist, existiert ein endlicher Pfad $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ in $\overline{G}(\mathbf{P})$. Nun ist x_1 unvergleichbar zu x und somit gilt $z \not\leq x_1$ für alle $z \in Z$. Da \mathbf{P} dünn ist, hat x_1 nur endlich viele Unvergleichbarkeiten und folglich ist $Z' = \{z \in \mathbf{P} \mid x_1 < z < y\}$ unendlich groß. Wiederholen wir dies mit x_2 und gehen dann induktiv weiter, so gelangen wir an den Punkt, dass $x_{n-1} < z < y$ für unendlich viele z gilt. Dies widerspricht jedoch der Unvergleichbarkeit von x_{n-1} und y . \square

Dass \mathbf{P} lokal endlich ist, garantiert uns die Existenz einer aufsteigenden Folge von endlichen konvexen Mengen X_i , deren Vereinigung X entspricht. Das bedeutendste Resultat von Brightwell in [3] ist dann, dass die genannten Bedingungen ausreichend für die Wohldefiniertheit von $\mathbb{P}(x \prec y)$ sind. Und wie wir sehen werden ist die Betrachtung von unendlichen Partialordnungen auch sinnvoll, da es ein paar überraschende Resultate gibt. So wollen wir uns als nächstes anschauen, warum die $1/3$ - $2/3$ Vermutung für unendliche Partialordnungen falsch ist. Dazu betrachten wir ein Beispiel von Brightwell aus [3] (unabhängig auch von Trotter betrachtet), dessen endliche Variante zuerst von Linial in [25] untersucht wurde. Die Partialordnung L habe die Elemente $\{x_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und es sei $x_i < x_j \iff i \leq j - 2$ in \mathbb{Z} . Abbildung 5.1 zeigt einen Ausschnitt von L . Ziel ist es die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(x_0 \prec x_1)$

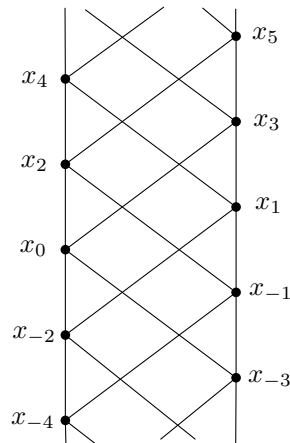


Abbildung 5.1: unendliche Partialordnung L

zu bestimmen. Aufgrund der Symmetrie wird dieser Wert auch die Balance von L sein. Wir fangen an, die Teilordnung L_n auf den Elementen $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ zu betrachten. Jede lineare Erweiterung von L_n hat x_n oder x_{n-1} als letztes Element. Im ersten Fall sehen wir, dass die linearen Erweiterungen durch Entfernen von x_n in Bijektion zu den linearen Erweiterungen von L_{n-1} stehen. Im zweiten Fall muss direkt unter x_{n-1} das Element x_n stehen und wir bekommen hier durch Entfernen von x_{n-1} und x_n eine Bijektion zu den linearen Erweiterungen von L_{n-2} . Folglich gilt

$$e(L_n) = e(L_{n-1}) + e(L_{n-2})$$

und dies entspricht bekanntlich der Fibonacci-Rekursion. Wegen $e(L_1) = 1$ und $e(L_2) = 2$ bekommen wir auch genau die Werte der Fibonacci-Folge.

Für unsere unendliche Ordnung L definieren wir nun die aufsteigende Folge von konvexen Teilmengen durch $X_n = \{x_i \mid -n \leq i \leq n\}$. Die induzierte Ordnung auf X_n ist isomorph zu L_{2n+1} und hat dementsprechend F_{2n+1} lineare Erweiterungen (wobei F_n die Fibonaccizahl bei Startwerten $F_0 = F_1 = 1$ ist). Nehmen wir uns eine lineare Erweiterung in der x_0 vor x_1 steht, so zerteilt sich diese in eine lineare Erweiterung auf der Menge $\{x_i \mid -n \leq i \leq 0\}$ gefolgt von einer linearen Erweiterung auf $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Somit gibt es $F_{n+1}F_n$ viele lineare Erweiterungen mit x_0 vor x_1 . Für den Grenzwert ergibt sich

$$\mathbb{P}(x_0 \prec x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}F_n}{F_{2n+1}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} > \frac{2}{3}.$$

Und das ist doch ganz erstaunlich, da dies genau der Balance entspricht, die wir im vorigen Kapitel, nach Brightwell, Felsner und Trotter, für endliche Partialordnungen bewiesen haben. Insbesondere ist damit auch gezeigt, dass die $1/3$ - $2/3$ Vermutung nicht für unendliche Partialordnungen gilt. Weiterhin ist zu beachten, dass das Beispiel Weite 2 hat und dass Linial [25] da im endlichen Fall die Balance $1/3$ bewiesen hat. Ein positives Resultat bekommt Brightwell aber für die Balance $3/11$:

Theorem 5.1 ([3]). *Ist \mathbf{P} dünn und hat einen zusammenhängenden $\overline{G}(\mathbf{P})$, so existieren $x, y \in \mathbf{P}$ mit*

$$\frac{3}{11} \leq \mathbb{P}(x \prec y) \leq \frac{8}{11}.$$

Für den Beweis übernimmt er prinzipiell die Kahn-Saks-Methoden. Damit man diese verwenden kann, zeigt Brightwell, dass es eine sinnvolle Definition für die Folgen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ gibt und dass diese mit dem endlichen Fall übereinstimmen. Das einzige was dann noch etwas Schwierigkeiten macht, sind die relativen Höhen. Diese kann man im unendlichen Fall sinnvollerweise über die Folgen $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ definieren, das heißt die relative Höhe $h(x, y)$ bezeichne den Term $\sum_{i \geq 1} i(a_i - b_i)$. Dies stimmt dann ja auch mit dem endlichen Fall überein, bloß dass wir hier nicht zunächst über die Höhen in einer linearen Erweiterung definieren. Im endlichen Fall war es einfach die Existenz zweier Elemente x, y mit $|h(y) - h(x)| < 1$ zu zeigen. Im unendlichen Fall stimmt diese Aussage nicht, wie obige Partialordnung L zeigt. Dort haben wir $h(x_n, x_{n+1}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Glücklicherweise funktionieren die Methoden von Kahn und Saks auch bei $h(x, y) \leq 1$ und die Existenz von Elementen x, y mit dieser Eigenschaft kann Brightwell in seinem Artikel beweisen. Wie schon erwähnt ist das aber nicht so einfach wie im endlichen Fall, so dass wir hier auf die nötigen Argumente verzichten wollen. Schlussendlich stellt Brightwell noch folgende Vermutung auf.

Vermutung ([3]). *Sei \mathbf{P} eine unendliche Partialordnung, die dünn ist und deren Graph $\overline{G}(\mathbf{P})$ zusammenhängend ist. Dann existieren Elemente $x, y \in \mathbf{P}$, so dass gilt:*

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \leq \mathbb{P}(x \prec y) \leq \frac{5 + \sqrt{5}}{10}.$$

Und tatsächlich zeigen Brightwell, Felsner und Trotter in [5] auch die Richtigkeit dieser Vermutung. Dazu benutzen sie einfach die entwickelten Methoden für den endlichen Fall. Einzige Schwierigkeit ist wieder die Existenz von Elementen x, y, z mit den nötigen Höhendifferenzen, das heißt mit $h(x, y) \geq 0, h(y, z) \geq 0$ und $h(x, z) \leq 2$. Die Autoren verzichten auf einen Beweis für die Existenz und weisen lediglich darauf hin, dass dies leicht mit den Methoden von Brightwell zu zeigen ist. Und mit obigem Beispiel L ist dieses Resultat auch bestmöglich.

In seinem Artikel über Semiordnungen [4] setzt Brightwell seine Forschung über unendliche Ordnungen fort. Er gibt zwei weitere Beispiele für nicht-balancierte Semiordnungen an, die sogar Weite 3 haben. Sie sind in Abbildung 5.2 zu sehen. Er vermutet auch, dass jede Semiordnung, die ein Gegenbeispiel zur $1/3$ - $2/3$ Vermutung ist, als lineare Summe dieser Beispiele und dem aus Abbildung 5.1 darstellbar ist.

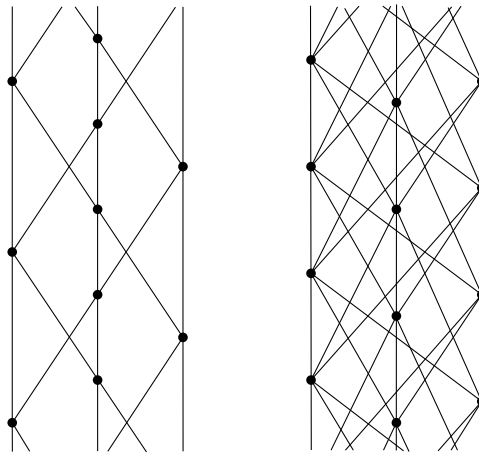


Abbildung 5.2: Beispiele von Brightwell

6 Sortieren mit partiellen Informationen

Kommen wir nun wieder zu dem bekannten kombinatorischen Problem zurück, das wir in der Einleitung beschrieben haben. Die Aufgabe ist, eine unbekannte lineare Erweiterung L einer Partialordnung \mathbf{P} zu finden. Es dürfen Fragen gestellt werden der Art: „Ist $x < y$ in L ?“. Ziel ist es nun, mit so wenig Fragen (bzw. Vergleichen) wie möglich L zu bestimmen.

Sei mit $\log(x)$ im folgenden der Logarithmus von x zur Basis 2 gemeint. Ist $g(\mathbf{P})$ die Anzahl der Fragen, die im Allgemeinen für das Bestimmen einer linearen Erweiterung nötig ist, so hatten wir mit der *Information Theoretic Lower Bound* (ITLB) bereits

$$g(\mathbf{P}) \geq \log(e(\mathbf{P}))$$

gesehen und es blieb die interessante Frage, ob

$$g(\mathbf{P}) = \mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))?$$

Wir hatten auch schon argumentiert, dass die Existenz von α -balancierten Paaren die Ungleichung

$$g(\mathbf{P}) \leq (\log(1/(1-\alpha)))^{-1} \log(e(\mathbf{P})) = \mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))$$

impliziert und damit die letzte Frage positiv beantwortet. Setzen wir nun mit unseren neuen Erkenntnissen α auf die bisher beste gefundene Balance $(5 - \sqrt{5})/10$ von Brightwell, Felsner und Trotter, so bekommen wir

$$g(\mathbf{P}) \leq 3.092 \cdot \log(e(\mathbf{P})).$$

Jetzt haben wir zwar gezeigt, dass wir nur $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))$ viele Vergleiche machen müssen, es bleibt aber die Frage, wie schnell wir denn die balancierten Paare finden können. Ziel soll es sein, einen polynomialen Algorithmus in $|\mathbf{P}|$ dafür anzugeben. Doch dies ist bis heute nicht gelungen. Trotzdem gibt es Erfolge zu vermelden. Kahn und Kim waren die ersten, denen es 1995 in [20] gelang einen Algorithmus zu finden, der $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))$ Vergleiche benötigt und die zu vergleichenden Paare in Polynomialzeit ermittelt. Dabei ist zu beachten, dass ihre zu vergleichenden Paare nicht notwendigerweise balanciert sind. Sie verfolgen also einen anderen Ansatz und suchen nach Paaren, die die Entropie der Partialordnung signifikant erhöhen. Was das genau bedeutet, wollen wir uns im nächsten Abschnitt anschauen.

6.1 Entropie

Der Begriff der Entropie geht zurück auf Körner [24], der diese zunächst für Graphen definiert hat. Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so heißt $S \subseteq V$ *stabile Menge*, wenn keine zwei Knoten aus S adjazent sind. Es bezeichne $\text{STAB}(G)$ das *Stabile Mengen Polytop* von G , das definiert ist durch

$$\text{STAB}(G) := \text{conv}\{\mathbf{1}_S \in \mathbb{R}^V \mid S \text{ ist stabile Menge in } G\}$$

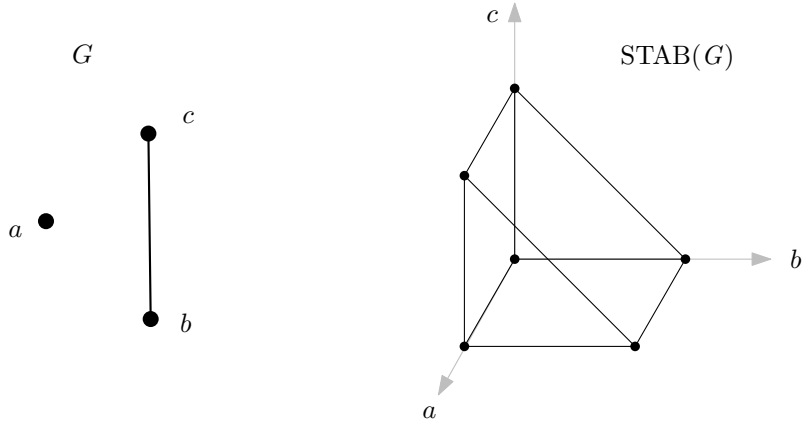


Abbildung 6.1: Ein Graph und sein Stabile Mengen Polytop

wobei

$$(\mathbb{1}_S)_v = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v \in S \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abbildung 6.1 zeigt ein Beispiel. Die Entropie $H(G)$ des Graphen G ist dann definiert als

$$H(G) := \min_{x \in \text{STAB}(G)} -\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \log x_v. \quad (1)$$

Wir wollen darauf hinweisen, dass Entropie üblicherweise für eine konvexe Ecke K in Abhängigkeit von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung p definiert wird, siehe zum Beispiel [9]. Uns genügt hier aber der Fall, dass $K = \text{STAB}(G)$ und p die Gleichverteilung ist. Eine erste kleine Beobachtung, die wir machen können ist die Monotonie der Entropie, das heißt ist F ein Subgraph bezüglich der Kantenmenge von G , so folgt

$$H(F) \leq H(G).$$

Sei die Funktion auf der rechten Seite von (1) bezeichnet mit $H(x)$. Wie man leicht sieht, ist $H(x)$ eine konvexe Funktion und nimmt das Minimum an. In unserem Beispiel bekommen wir $H(G) = 2/3$ im Punkt $x = (x_a, x_b, x_c) = (1, 1/2, 1/2)$. Da wir über ein Polytop minimieren, liegt hier ein konvexes Programm vor. Ist der Graph G perfekt, so können wir $H(G)$ in Polynomialzeit beliebig genau approximieren. Diese Tatsache wird für uns sehr wichtig sein.

Bezeichne $G(\mathbf{P})$ wieder den Vergleichbarkeitsgraphen von \mathbf{P} . Die Entropie von \mathbf{P} können wir dann sinnvoll definieren als $H(\mathbf{P}) := H(G(\mathbf{P}))$. Das Komplement $\overline{G(\mathbf{P})}$ von $G(\mathbf{P})$ ist dann der *Unvergleichbarkeitsgraph* von \mathbf{P} und wir setzen $H(\overline{\mathbf{P}}) := H(\overline{G(\mathbf{P})})$. Das Polytop $\text{STAB}(G(\mathbf{P}))$ wird auch Kettenpolytop genannt und wurde erstmals von Stanley [29] untersucht. Der Name macht hier Sinn aufgrund folgender Charakterisierung:

$$\text{STAB}(G(\mathbf{P})) = \{x \in [0, 1]^{\mathbf{P}} \mid \sum_{v \in C} x_v \leq 1 \text{ für alle Ketten } C \text{ in } \mathbf{P}\}. \quad (2)$$

Diese Charakterisierung durch Ungleichungen ist auch ein Grund dafür, dass wir $H(G(\mathbf{P}))$ effizient approximieren können. In [9] zeigen Csiszár et al., dass für perfekte Graphen G die Gleichung $H(G) + H(\overline{G}) = \log n$ gilt und da Vergleichbarkeitsgraphen perfekt sind (kanonische Antikettenzerlegung liefert geeignete Färbung), folgt damit insbesondere

$$H(\mathbf{P}) + H(\overline{\mathbf{P}}) = \log n. \quad (3)$$

Genau genommen charakterisieren Csiszár et al. sogar perfekte Graphen mittels Entropie. Kahn und Kim zeigen folgendes wichtige Resultat, das die Anzahl der linearen Erweiterungen mit der Entropie der Partialordnung in Beziehung setzt.

Theorem 6.1 ([20]). *Für jede Partialordnung \mathbf{P} gilt*

$$\begin{aligned} n(\log n - H(\mathbf{P})) &\geq \log(e(\mathbf{P})) \\ &\geq \max\{\log(n!) - nH(\mathbf{P}), Cn(\log n - H(\mathbf{P}))\} \end{aligned}$$

wobei $C = (1 + 7 \log e)^{-1} \approx 0.09$.

Mit (3) folgt dann insbesondere

$$nH(\overline{\mathbf{P}}) \leq \frac{1}{C} \log(e(\mathbf{P})).$$

Kahn und Kim können dann zeigen, dass es Paare gibt, die die Entropie $H(\overline{\mathbf{P}})$ signifikant verringern.

Lemma 6.1 ([20]). *Jede Partialordnung \mathbf{P} (keine Kette) besitzt unvergleichbare Elemente $x, y \in \mathbf{P}$, so dass*

$$\max\{nH(\overline{\mathbf{P}(x < y)}), nH(\overline{\mathbf{P}(y < x)})\} \leq nH(\overline{\mathbf{P}}) - c$$

wobei $c = \log(1 + 17/112) \approx 0.2$ ist.

Da die Entropie nichtnegativ ist, folgt mit Theorem 6.1, dass wir bei geeigneter Auswahl der unvergleichbaren Elemente höchstens $(c \cdot C)^{-1} \log(e(\mathbf{P}))$ oft die Entropie $H(\overline{\mathbf{P}})$ verringern können. Ist die Entropie $H(\overline{\mathbf{P}})$ gleich Null, so liegt eine Kette vor und wir haben somit die gesuchte lineare Erweiterung gefunden. Es ist also klar, dass man mit diesem Ansatz nur $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))$ viele Vergleiche zum Sortieren braucht.

Bleibt noch die Frage, wie effizient wir das zu vergleichende Paar finden können. Doch dazu können wir einfach $H(\overline{\mathbf{P}(x < y)})$ und $H(\overline{\mathbf{P}(y < x)})$ für alle unvergleichbaren Paare (x, y) genügend gut abschätzen (Abweichung kleiner als n^{-2} reicht aus). Wir hatten schon erwähnt, dass dies in Polynomialzeit möglich ist und folglich werden wir wegen Lemma 6.1 ein gutes Paar finden.

Wir wollen uns noch einmal Beispiele anschauen, in denen der Unterschied zwischen Entropie und Balanciertheit deutlich wird. Betrachten wir zuerst die Partialordnung \mathbf{P}_1 , die aus zwei disjunkten Ketten

$$a_1 < \dots < a_{2k} \quad \text{und} \quad b_1 < \dots < b_{2k}$$

besteht. Wollen wir $H(x)$ minimieren, so ist das äquivalent dazu, dass wir

$$\sum_{i=1}^{2k} (\log x_{a_i} + \log x_{b_i})$$

maximieren, und zwar unter den Bedingungen (siehe (2))

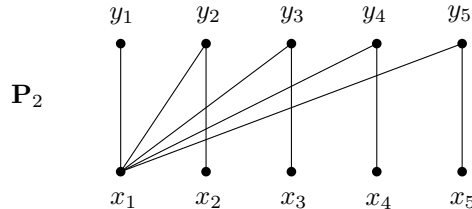
$$\sum_{i=1}^{2k} x_{a_i} \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{2k} x_{b_i} \leq 1.$$

Mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel folgt

$$\sum_{i=1}^{2k} \log x_{a_i} = \log \left(\prod_{i=1}^{2k} x_{a_i} \right) \leq 2k \log \left(\frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{2k} x_{a_i} \right) \leq -2k \log(2k).$$

Da die rechte Seite unabhängig von den x_{a_i} ist und man hier Gleichheit erhält, wenn man alle x_{a_i} auf $1/2k$ setzt, bekommen wir insgesamt $H(\mathbf{P}_1) = \log(2k)$. Betrachten wir nun $\mathbf{P}_1(a_k < b_{k+1})$, so gilt mit der Monotonie $H(\mathbf{P}_1) \leq H(\mathbf{P}_1(a_k < b_{k+1}))$, andererseits können wieder alle x_{a_i} und x_{b_i} mit $1/2k$ belegt werden und es sind immer noch alle Ungleichungen in (2) erfüllt. Somit sind beide Entropien gleich. Schaut man aber auf die Balance, so sehen wir, dass sich durch die Relation $a_k < b_{k+1}$ die Menge der linearen Erweiterungen fast halbiert. Das Paar (a_k, b_{k+1}) ist also fast perfekt balanciert, eignet sich aber überhaupt nicht für den Algorithmus von Kahn und Kim.

Interessanterweise geht das auch umgekehrt, wie Kahn und Kim zeigen. Sei \mathbf{P}_2 die Partialordnung auf den Elementen $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k\}$ mit $x_i < y_j$ genau dann, wenn $i = j$ oder $i = 1$ ist. Folgendes Bild zeigt die Ordnung.



Mit ähnlichen Überlegungen wie bei \mathbf{P}_1 sieht man, dass die Entropie minimiert wird, wenn alle Elemente den Wert $1/2$ zugewiesen bekommen. $H(\mathbf{P}_2)$ beträgt dann genau 1. Wir wollen jetzt das Paar (x_1, x_2) vergleichen. Man sieht leicht, dass die Entropie weniger steigen wird, wenn $x_1 < x_2$ ist. Für große k ist auch klar, dass es klug ist wieder alle x_i und y_i auf $1/2$ zu setzen, bis auf x_2 und y_2 . Wir müssen nämlich beachten, dass wegen der Kette $x_1 < x_2 < y_2$ die Summe $x_1 + x_2 + y_2$ kleiner gleich 1 sein muss. Die Elemente x_2 und y_2 bekommen die Werte $1/4$. Man rechnet leicht nach, dass dann $H(\mathbf{P}_2(x_1 < x_2)) = 1 + \Omega(1/k)$ gilt und somit steigt die Entropie signifikant. Das Paar eignet sich also im Ansatz von Kahn und Kim hervorragend. Allerdings ist es nicht sehr balanciert. Für große k wird $\mathbb{P}(x_2 < x_1)$ beliebig klein, da x_1 im Vergleich zu x_2 in einer linearen Erweiterung gewissermaßen durch $\{y_1, \dots, y_k\}$ herunter gedrückt wird. Die Frage, ob man balancierte Paare in Polynomialzeit finden kann, bleibt also offen.

6.2 Sortieren mit Kettenzerlegungen

Kahn und Kim benutzen bei ihrem Ansatz konvexe Programmierung. Für das Approximieren der Entropie verwendet man üblicherweise die sogenannte Ellipsoidmethode, die zwar theoretisch polynomiell ist, praktisch aber eher ineffizient. Hinzu kommt dann noch die Tatsache, dass wir für jedes unvergleichbare Paar approximieren müssen.

Möglicherweise war genau das die Motivation für Cardinal, Fiorini, Joret, Junger und Munro [8] nach einem Algorithmus zu suchen, der die zu vergleichenden Paare effizienter findet. Statt konvexer Programmierung verfolgen die Autoren Cardinal et al. in [8] den Ansatz eine *Greedy Kettenzerlegung* zu berechnen. Das heißt die Partialordnung \mathbf{P} wird in Ketten zerlegt, indem iterativ eine längste Kette entfernt wird (daher *greedy*). In [7] haben Cardinal et al. untersucht inwieweit Entropie verloren geht, wenn man die Relationen zwischen den Ketten der Zerlegung weglässt. Grundidee der Autoren ist es, die Ketten zu *mergen* (also zusammenzuführen) bis man eine lange Kette erhält, die der gesuchten linearen Erweiterung entspricht.

Insertion Sort

Beginnen wir nun zunächst mit einem einfachen und eleganten Ansatz der Autoren. Dabei wird erst eine längste Kette C in der Partialordnung \mathbf{P} gesucht (das geht in $\mathcal{O}(|\mathbf{P}|^2)$) und dann werden alle weiteren Elemente aus $\mathbf{P} \setminus C$ über ein binäre Suche Stück für Stück in die aktuelle Kette einsortiert. Dies ähnelt also einem *Insertion Sort*.

Algorithmus 1

- 1: Finde längste Kette C in \mathbf{P}
 - 2: **while** $\mathbf{P} \setminus C \neq \emptyset$ **do**
 - 3: Entferne ein x aus $\mathbf{P} \setminus C$ und füge es mit binärer Suche in C ein
 - 4: **end while**
 - 5: **return** C
-

Jedes Element kann mit $\mathcal{O}(\log n)$ Vergleichen einsortiert werden, doch die Frage ist natürlich für wie viele Elemente wir das machen müssen. Mit Hilfe der Entropie kann man nun zeigen, dass diese Anzahl in $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))$ liegt.

Lemma 6.2 ([8]). *Eine längste Kette C der n -elementigen Ordnung \mathbf{P} hat eine Länge $|C| \geq n2^{-H(\mathbf{P})}$*

Beweis. Wir zeigen zuerst folgende Behauptung. Hat ein Graph G auf n Knoten die Unabhängigkeitszahl α , so gilt für die Entropie

$$H(G) \geq -\log \frac{\alpha}{n}. \quad (4)$$

Wird das Minimum in $x^* \in \text{STAB}(G)$ angenommen, so ist dies äquivalent zu

$$\sum_{v \in V(G)} \log x_v^* \leq n \log \frac{\alpha}{n}. \quad (5)$$

Um (5) einzusehen schreiben wir x^* als Konvexkombination der Ecken von $\text{STAB}(G)$. Es gibt also stabile Mengen I_1, \dots, I_k und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda_i \leq 1$ für $i = 1, \dots, k$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, sodass

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{I_i}.$$

Mit dieser Darstellung folgt

$$\sum_{v \in V(G)} x_v^* = \mathbb{1}^\top x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}^\top \mathbb{1}_{I_i} \leq \alpha \sum_{i=1}^k \lambda_i = \alpha. \quad (6)$$

Damit und mit der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel können wir (5) zeigen:

$$\sum_{v \in V(G)} \log x_v^* = \log \left(\prod_{v \in V(G)} x_v^* \right) \leq n \log \left(\frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} x_v^* \right) \stackrel{(6)}{\leq} n \log \frac{\alpha}{n}.$$

Wenden wir nun (4) auf $G(\overline{\mathbf{P}})$ an, so entspricht α gerade der Länge einer längsten Kette und durch kleine Umformungen bekommen wir dann die behauptete Ungleichung. \square

Nun ist $n - |C|$ die Anzahl der Elemente, die wir noch einsortieren müssen, und folglich ist die Anzahl der Vergleiche nach oben beschränkt durch

$$\begin{aligned} \log n \cdot (n - |C|) &\leq \log n \cdot (n - n2^{-H(\overline{\mathbf{P}})}) \\ &\leq \log n \cdot \ln 2 \cdot nH(\overline{\mathbf{P}}) \\ &= \mathcal{O}(\log n \cdot \log(e(\mathbf{P}))). \end{aligned}$$

Bei der zweiten Ungleichung wurde benutzt, dass $1 - 2^{-x} \leq \ln 2 \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und bei der Gleichheit wieder Theorem 6.1. Mit dieser einfachen Methode bekommt man also noch nicht die gewünschte Anzahl von Vergleichen $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))$. Bedenkt man aber, dass wir von dem Wissen der Relationen zwischen Kettenelementen und Nicht-Kettenelementen keinen Gebrauch machen, so ist dies doch schon erstaunlich. Cardinal et al. verbessern diese Methode in ihrem Merge Sort Algorithmus.

Merge Sort

Bei dieser Variante kommt jetzt die Greedy Kettenzerlegung ins Spiel. Cardinal et al. zeigen in ihrem Artikel, dass man eine solche Zerlegung in $\mathcal{O}(n^{2.5})$ berechnen kann. Die Idee ist es nun, die Ketten nach und nach zusammenzuführen, also zu *mergen*.

Das Mergen kann mit linear vielen Vergleichen vollzogen werden, indem die minimalen Elemente der Ketten verglichen werden. Mit Hilfe von Entropie und Huffman-Codes zeigen die Autoren dann, dass die Anzahl der nötigen Vergleiche

Algorithmus 2

```
1: berechne Greedy Kettenzerlegung  $C_1, C_2, \dots, C_k$  von  $\mathbf{P}$ 
2:  $\mathcal{C} \leftarrow \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ 
3: while  $|\mathcal{C}| > 1$  do
4:   entferne die beiden kleinsten Ketten  $C$  und  $C'$  aus  $\mathcal{C}$ 
5:   merge  $C$  und  $C'$  zu  $C''$ 
6:   füge  $C''$  zu  $\mathcal{C}$  hinzu
7: end while
8: return einzige Kette in  $\mathcal{C}$ 
```

in $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})) + n)$ liegt (für die exakte Analyse siehe [8]). Da das Finden der Kettenzerlegung das Aufwendigste ist, läuft der Algorithmus insgesamt in $\mathcal{O}(n^{2.5})$. Aber auch hier werden die partiellen Informationen zwischen den Ketten nicht genutzt. Dies ist auch der Grund, warum die gewünschte obere Schranke noch nicht erreicht wird. Cardinal et al. entwickeln deshalb eine weitere Variante des Merge Sort.

Cautious Merge Sort

Dieser Algorithmus kombiniert gewissermaßen die ersten beiden Algorithmen. Zunächst wird wie beim Insertion Sort eine längste Kette C aus \mathbf{P} entfernt. Auf der Partialordnung $\mathbf{P} \setminus C$ wird dann Merge Sort angewendet um eine Kette B zu bekommen. Es müssen also nur noch die Ketten C und B zusammengeführt werden. Sei \mathbf{P}' die durch C und B definierte Weite-2 Ordnung. Cardinal et al. beschreiben einen $\mathcal{O}(n^2 \log^2 n)$ Algorithmus für das letzte Mergen, der $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P}')))$ Vergleiche braucht. Bereits Linial hatte in [25] gezeigt, dass man in diesem Fall balancierte Paare in Polynomialzeit finden kann und man folglich auch mit $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P}')))$ Vergleichen auskommt. Für das Finden der balancierten Paare benötigt Linial allerdings die Berechnung von einigen Determinanten, so dass seine Variante vergleichsweise ineffizient ist.

Interessanterweise genügt das Sortieren von \mathbf{P}' mit $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P}')))$ Vergleichen auch für das Sortieren von \mathbf{P} mit $\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))$ Vergleichen. Denn der lineare Term vom Merge Sort entspricht nun $n - |C|$, und wie im Abschnitt vom Insertion Sort gezeigt gilt $n - |C| = \mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))$. Insgesamt ist in dieser Variante die Anzahl der Vergleiche also durch

$$\mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P} \setminus C)) + (n - |C|)) + \mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P}')) = \mathcal{O}(\log(e(\mathbf{P})))$$

nach oben beschränkt. Für eine genauere Analyse siehe wieder [8], wo die Autoren auch zwischen Rechenzeit unterscheiden, die vor beziehungsweise nach dem ersten Vergleich benötigt wird.

Wir haben also gesehen wie man auch ohne konvexe Programmierung schnell sortieren kann. Interessant ist dabei, dass hier die zu vergleichenden Paare fast immer schon feststehen. Beim Mergen werden nämlich die beiden minimalen Elemente der Ketten verglichen. Ob diese die Entropie vergrößern ist eigentlich egal. Ganz im Gegensatz natürlich zum Ansatz von Kahn und Kim, wo das zu vergleichende Paar erst gesucht werden muss und dann aber die Eigenschaft hat, die Entropie signifikant

zu erhöhen. Trotzdem nutzen Cardinal et al. den Begriff der Entropie, nämlich für ihre Beweise. So wird damit die Größe einer längsten Kette mit der Anzahl der linearen Erweiterungen in Beziehung gesetzt. Interessant ist hier auch die Frage, inwieweit man dies rein kombinatorisch zeigen kann.

7 Verallgemeinerung für Antimatroide

Anfang 2013 veröffentlichte David Eppstein einen Artikel [11] zu balancierten Paaren, in dem er die $1/3$ - $2/3$ Vermutung auf Antimatroide verallgemeinert. Er zeigt die Richtigkeit der Vermutung für einige spezielle Klassen von Antimatroiden und begründet damit das Aufstellen der Vermutung. Wir wollen in diesem Abschnitt näher auf die Arbeit von Eppstein eingehen und sehen, welche neuen mathematischen Probleme damit verbunden sind.

Lineare Erweiterungen können als Reihenfolgen interpretiert werden, die angeben, wie man sukzessive minimale Elemente von einer Partialordnung abpflückt. Jedes Element hat die Eigenschaft, dass es ab einem bestimmten Moment wählbar ist (das heißt es ist zu diesem Zeitpunkt minimal) und das auch so bleibt, bis es tatsächlich gewählt und abgepflückt wird. Diese Eigenschaft haben auch die Elemente der Grundmenge von Antimatroiden, jedoch besteht ein Unterschied, ab wann ein Element abgepflückt werden darf. Bei Ordnungen müssen alle Vorgänger eines Elementes entfernt worden sein, bevor man es wählen kann. Bei Antimatroiden können wir allgemeinere Regeln festlegen. So kann es sein, dass ein Element genau dann wählbar ist, wenn die Elemente a, b, c oder die Elemente c, d bereits abgepflückt wurden. Dabei kann die Liste der „Oder“-Bedingungen beliebig lang werden. Weiterhin haben wir auch die Eigenschaft, dass immer mindestens ein Element wählbar ist, solange es noch Elemente gibt, die nicht entfernt wurden.

Das Schema (bzw. der Antimatroid nach Inklusion geordnet) in Abbildung 7.1 beschreibt zum Beispiel, wie wir die Elemente nach und nach auswählen dürfen. Und wie in der Abbildung angedeutet, wollen wir Antimatroide über ein System von endlichen Mengen beschreiben.

Definition 7.1. Ein endliches Mengensystem von endlichen Mengen \mathcal{A} heißt *Antimatroid*, wenn gilt:

- für alle nichtleeren $A \in \mathcal{A}$ existiert ein $x \in A$, so dass $A \setminus \{x\} \in \mathcal{A}$.
- für alle $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{A}$.

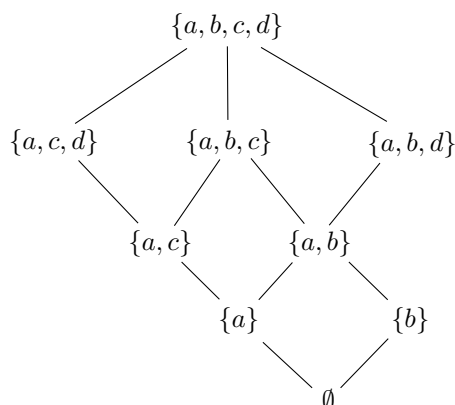


Abbildung 7.1: Antimatroid

Beispiel 7.1. Jede Partialordnung \mathbf{P} definiert über die Menge ihrer Ideale einen Antimatroiden $\mathcal{A}(\mathbf{P})$. Denn die Vereinigung zweier Ideale ist wieder ein Ideal und da jedes nichtleere Ideal ein maximales Element besitzt, kann man dieses entfernen um ein neues Ideal zu erhalten.

Bekanntlich bilden die Ideale, geordnet per Inklusion, einen distributiven Verband (siehe Definition 4.1) und nach Birkhoff ist jeder distributive Verband als Verband der Ideale einer Ordnung darstellbar. Somit können wir Antimatroide als Verallgemeinerung von distributiven Verbänden auffassen. Das Beispiel in Abbildung 7.1 zeigt zwar einen Antimatroiden, jedoch keinen distributiven Verband.

7.1 Balancierte Paare in Antimatroiden

Sei im folgenden M die Grundmenge des Antimatroiden \mathcal{A} , das heißt $M = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Nach Definition ist $M \in \mathcal{A}$ und wir können von M nach und nach Elemente entfernen bis wir die leere Menge erhalten. Umgekehrt können wir auch bei der leeren Menge starten und wie oben beschrieben wählbare Elemente abpflücken. Dies gibt mir eine lineare Ordnung auf den Elementen aus M und ist das Analogon zu einer linearen Erweiterung einer Partialordnung. Wir nennen so eine lineare Ordnung ein *Wort* von \mathcal{A} :

Definition 7.2. Sei \mathcal{A} ein Antimatroid und M seine n -elementige Grundmenge. Die lineare Ordnung $w = w_1 < \dots < w_n$ der Elemente aus M heißt *Wort* von \mathcal{A} , wenn gilt:

$$\{w_1, \dots, w_i\} \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

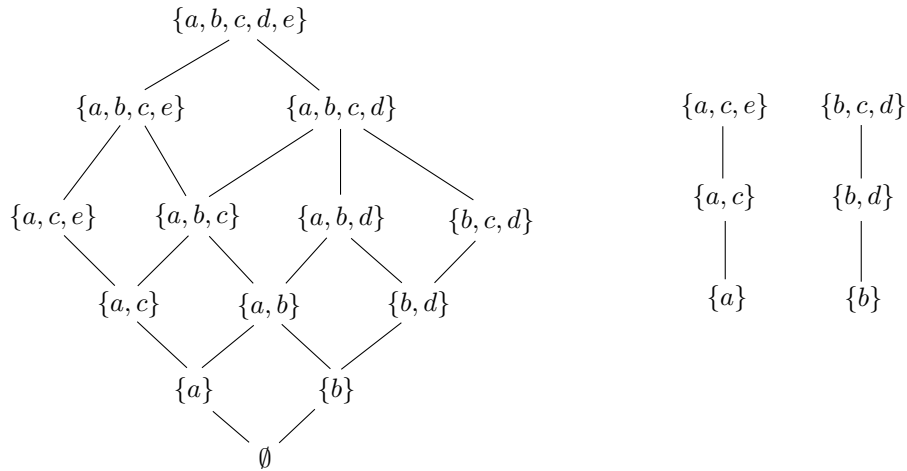
Dabei bezeichnen wir $\{w_1, \dots, w_i\}$ als *Präfixmenge* von w . Sei weiterhin $W(\mathcal{A})$ die Menge aller Wörter von \mathcal{A} .

Jede lineare Erweiterung L einer Ordnung \mathbf{P} entspricht dann genau einem Wort von $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ und umgekehrt. Zu beachten ist hierbei, dass die Präfixmengen von L Ideale von \mathbf{P} sind. Besitzt ein Antimatroid nur ein Wort, so ist dies der analoge Fall dazu, dass eine Partialordnung eine Kette ist (und somit nur eine lineare Erweiterung besitzt). Solche Antimatroide nennen wir *Kettenantimatroide* oder einfach nur *Ketten*.

Für verschiedene $x, y \in M$ können wir nun wieder die Anzahl der Wörter von \mathcal{A} bestimmen, in denen x vor y steht und dies durch die Gesamtanzahl der Wörter teilen. Dies kann dann beschrieben werden als die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufällig ausgewählten Wort x vor y steht, wobei jedes Wort mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Wir bezeichnen diesen Anteil wieder mit $\mathbb{P}(x \prec y)$ und sagen das Paar (x, y) ist α -balanciert für ein α mit $0 < \alpha \leq 0.5$, wenn gilt:

$$\alpha \leq \mathbb{P}(x \prec y) \leq 1 - \alpha.$$

Gilt sogar $\mathbb{P}(x \prec y) = 1/2$, so ist das Paar *perfekt* balanciert. Ein Antimatroid \mathcal{A} , der mehr als ein Wort besitzt, heißt entsprechend α -balanciert, wenn er ein α -balanciertes Paar besitzt. Reden wir vereinfacht davon, dass \mathcal{A} *balanciert* ist, so meinen wir $1/3$ -balanciert. Damit lässt sich die $1/3$ - $2/3$ Vermutung wie folgt auf Antimatroide verallgemeinern:



Abbildungung 7.2: Links der Antimatroid und rechts seine Pfadordnung

Vermutung (D. Eppstein [11]). *Jeder Antimatroid, der mehr als ein Wort besitzt, ist balanciert.*

Wir wollen uns nun anschauen, für welche Klassen von Antimatroiden Eppstein bereits die Vermutung bewiesen hat.

7.2 Konvexdimension 2

Wir hatten bereits gesehen, dass Partialordnungen mit Weite 2 balanciert sind. Für Antimatroide gibt es einen analogen Fall und D. Eppstein konnte hier die Richtigkeit seiner Vermutung beweisen. Er braucht dafür keine grundsätzlich neuen Ideen, denn es reicht Linials Beweis aus [25] auf die neuen Begrifflichkeiten anzuwenden. Trotz der Ähnlichkeit wollen wir nun den Beweis von Eppstein wiedergeben, da wir einige Notationen und Lemmata auch später benutzen wollen.

Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Antimatroide, dann ist die *Vereinigung* von \mathcal{A} und \mathcal{B} definiert als $\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Jeder Antimatroid ist nun darstellbar als die Vereinigung von Kettenantimatroiden, zum Beispiel indem wir die zu den Wörtern korrespondierenden Kettenantimatroiden wählen. Die *Konvexdimension* von \mathcal{A} ist dann die kleinste natürliche Zahl n , so dass \mathcal{A} als Vereinigung von n Kettenantimatroiden darstellbar ist. Wir sagen auch, dass diese Ketten den Antimatroiden *erzeugen*. Eine weitere Beschreibung von Konvexdimension bekommen wir über die sogenannten *Pfade*. Eine Menge $S \in \mathcal{A}$ ist ein *Pfad*, wenn es genau ein Element $x \in S$ gibt, mit $S \setminus \{x\} \in \mathcal{A}$. Dieses x wird auch *Endpunkt* des Pfades S genannt. Die *Pfadordnung* $P(\mathcal{A})$ von \mathcal{A} bekommen wir dann, indem wir die Pfade per Inklusion ordnen.

Beispiel 7.2. Schauen wir uns zum Verständnis das Beispiel in Abbildung 7.2 an. Die Mengen $\{a\}, \{a, c\}, \{a, c, e\}, \{b\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}$ sind Pfade des Antimatroiden und die Pfadordnung besteht nur aus den Ketten $\{a\} \subseteq \{a, c\} \subseteq \{a, c, e\}$ und $\{b\} \subseteq \{b, d\} \subseteq \{b, c, d\}$. Diese beiden Ketten erzeugen wiederum den Antimatroiden und da dieser selbst keine Kette ist, hat er also Konvexdimension 2.

Beispiel 7.3. Ist \mathbf{P} eine Partialordnung, so haben wir bereits erwähnt, dass die Ideale von \mathbf{P} einen Antimatroiden $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ definieren. Die Pfade von $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ entsprechen genau den Hauptidealen. Die Pfadordnung von $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ ist dann die Inklusionsordnung der Hauptideale, die bekanntermaßen eine zu \mathbf{P} isomorphe Partialordnung ist.

Die bereits angesprochene Verbindung zwischen Weite einer Ordnung und Konvexdimension eines Antimatroiden erklärt nun der folgende Satz. Dieser und die kommenden zwei Lemmata sind allgemein bekannt und kommen ohne Zitation aus.

Satz 7.1. *Die Konvexdimension eines Antimatroiden \mathcal{A} entspricht der Weite der Pfadordnung $P(\mathcal{A})$.*

Bevor wir dies beweisen, zeigen wir zunächst ein paar Hilfssätze, die auch zum Verständnis der Struktur eines Antimatroiden beitragen werden.

Lemma 7.1. *Sei \mathcal{A} ein Antimatroid, M seine Grundmenge und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subsetneq B$ gegeben. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_k \in M$, so dass*

- $B \setminus \{x_1, \dots, x_i\} \in \mathcal{A}$ für $i = 1, \dots, k$
- $B \setminus \{x_1, \dots, x_k\} = A$.

Das heißt wir finden einen aufsteigenden „Pfad“ von A nach B in \mathcal{A} .

Beweis. Nach Definition eines Antimatroiden können wir nach und nach Elemente aus B entfernen, so dass die resultierenden Mengen in \mathcal{A} liegen und wir irgendwann die leere Menge erhalten. Betrachten wir die Menge $B' \in \mathcal{A}$, die wir erhalten, wenn wir das erste mal ein Element aus $B \setminus A$ entfernen. Dann ist die Vereinigung $A \cup B' =: B''$ im Antimatroiden \mathcal{A} enthalten und es gilt $B'' \subsetneq B$ und $|B \setminus B''| = 1$. Sei x_1 das Element aus $B \setminus B''$. Ist dann $B'' = A$, so sind wir fertig, andernfalls gilt $A \subsetneq B''$ und wir können induktiv fortfahren. \square

Lemma 7.2. *Sei \mathcal{A} ein Antimatroid und K_1, \dots, K_n Ketten, die \mathcal{A} erzeugen. Dann überdecken die Ketten die Elemente der Pfadordnung, das heißt für alle $S \in P(\mathcal{A})$ existiert ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $S \in K_i$.*

Beweis. Angenommen dies gilt nicht für ein $S \in P(\mathcal{A})$. Da die Ketten den Antimatroiden erzeugen, existieren $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ und $Y_{i_j} \in K_{i_j}$ für $j = 1, \dots, k$, so dass

$$S = \bigcup_{j=1}^k Y_{i_j}.$$

Sei dann x der Endpunkt von S . Aus der Darstellung von S folgt, dass es ein $l \in \{1, \dots, k\}$ gibt mit $x \in Y_{i_l}$. Da S nicht von den Ketten überdeckt wird, ist $Y_{i_l} \subsetneq S$ und mit Lemma 7.1 folgt die Existenz von einem $z \in S$ mit

$$Y_{i_l} \subseteq S \setminus \{z\} \subseteq S \quad \text{und} \quad S \setminus \{z\} \in \mathcal{A}.$$

Da S nach Annahme ein Pfad ist, folgt $x = z$, im Widerspruch zu $x \in Y_{i_l}$. \square

Beweis von Satz 7.1. Sei \mathcal{A} ein Antimatroid mit Konvexdimension k und sei ω die Weite der Pfadordnung $P(\mathcal{A})$. Dann gibt es k Kettenantimatroide, die \mathcal{A} erzeugen. Schränken wir diese Ketten auf die Elemente der Pfadordnung $P(\mathcal{A})$ ein, so bekommen wir k Ketten von der Pfadordnung. Nach Lemma 7.2 wird jedes Element von $P(\mathcal{A})$ überdeckt und wir haben somit eine Kettenzerlegung von $P(\mathcal{A})$ in k Ketten vorliegen. Da die Weite einer Ordnung eine untere Schranke für die Anzahl von Ketten in einer Kettenzerlegung ist, haben wir $k \geq \omega$.

Mit Dilworth [10] folgt andererseits, dass es eine Kettenzerlegung von $P(\mathcal{A})$ in ω Ketten gibt. Wir zeigen nun, dass diese Ketten den Antimatroiden \mathcal{A} erzeugen. Sei dazu $A \in \mathcal{A}$ beliebig und nichtleer und betrachte ein $x \in A$. Wir können per Definition nach und nach Elemente aus A entfernen, so dass wir im Antimatroiden \mathcal{A} bleiben. Versuchen wir dabei x zu vermeiden, also x solange wie es geht nicht zu entfernen, so tritt irgendwann der Fall ein, dass wir nur x entfernen dürfen, um im Antimatroiden zu bleiben. Das heißt es gibt ein Element $A_x \subseteq A$ von \mathcal{A} , das ein Pfad mit Endpunkt x ist. Dieses A_x ist auch Element von $P(\mathcal{A})$ und somit in einer Kette der Zerlegung von $P(\mathcal{A})$. Mit dieser Notation ergibt sich dann

$$A = \bigcup_{x \in A} A_x.$$

Da die rechte Seite im Erzeugnis der Ketten liegt und A beliebig gewählt war, bekommen wir $k \leq \omega$ und sind fertig. \square

Korollar 7.1. *Ist \mathbf{P} eine Partialordnung der Weite ω , so hat der Antimatroid $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ die Konvexdimension ω .*

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 7.1 und der Tatsache, dass die Pfadordnung von $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ isomorph zu \mathbf{P} ist. \square

Antimatroide mit Konvexdimension 2 sind also eine Verallgemeinerung von Partialordnungen mit Weite 2. Eppstein zeigt in seinem Artikel, dass solche Antimatroide balanciert sind. Die wichtigsten Strukturen für den Beweis sind sogenannte *Leitern* und *Doppelleitern*. Kommen letztere vor, so sind die Antimatroide balanciert. Aber nicht nur Antimatroide mit Konvexdimension 2 besitzen eine Doppelleiter sondern noch einige weitere Klassen von Antimatroiden, wie wir später sehen werden. Im Gegensatz zu Eppstein definieren wir eine Leiter nicht auf einer Menge von linearen Ordnungen (*sets of orderings* bei Eppstein), sondern gleich auf den spezielleren Antimatroiden. Für die Definition bezeichnen wir zu einem Tupel $Y = (y_1, \dots, y_k)$ eine Menge der Art $\{y_1, \dots, y_i\}$ als *Präfixmenge* von Y .

Definition 7.3. Sei \mathcal{A} ein Antimatroid und M seine Grundmenge. Ist nun $Y = (y_0, \dots, y_{k-1})$ ein Tupel von verschiedenen Elementen aus M und $x \in M$, so bildet das Paar (x, Y) eine *Leiter* in \mathcal{A} , wenn für alle Wörter $\omega \in W(\mathcal{A})$ gilt:

- die Elemente aus Y , die in ω vor x stehen, bilden eine Präfixmenge von Y und kommen in ω auch in genau der gleichen Reihenfolge vor wie in Y .
- gibt es Elemente aus Y , die in ω vor x stehen und ist y_i von diesen das größte in w , so ist die lineare Ordnung, die wir durch Vertauschen von x und y_i erhalten, wieder ein Wort von \mathcal{A} .

Ein Paar von Sequenzen $X = (x_0, \dots, x_{k-1})$ und $Y = (y_0, \dots, y_{l-1})$ bildet dann eine *Doppelleiter*, wenn (x_0, Y) und (y_0, X) Leitern im Antimatroiden sind.

Beispiel 7.4. Sei \mathbf{P} eine Partialordnung der Weite 2. Diese hat eine Kettenzerlegung in 2 Ketten $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ und $y_0 < y_1 < \dots < y_l$. Sind x_0 und y_0 unvergleichbar, so bilden die Sequenzen $X = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ und $Y = (y_0, y_1, \dots, y_l)$ eine Doppelleiter (X, Y) . Denn nehmen wir uns eine beliebige lineare Erweiterung L von \mathbf{P} , so sind die Elemente von Y , die in L vor x_0 stehen, notwendigerweise so geordnet wie in der Kette $y_0 < y_1 < \dots < y_l$. Außerdem muss das unmittelbar vor x_0 liegende Element y_i unvergleichbar mit x_0 sein, so dass wir durch Vertauschen von x_0 und y_i wieder eine lineare Erweiterung von \mathbf{P} erhalten. Folglich ist (x_0, Y) eine Leiter und analog zeigt man dies für (y_0, X) .

Theorem 7.1 ([11]). *Ist \mathcal{A} ein Antimatroid mit einer Doppelleiter (X, Y) , so ist \mathcal{A} balanciert.*

Beweis. Seien die Sequenzen wieder durch $X = (x_0, x_1, \dots, x_{l-1})$ beziehungsweise $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ gegeben. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\mathbb{P}(x_0 \prec y_0) \leq 1/2$ ist. Wir werden das Theorem beweisen, indem wir zeigen, dass es ein $l \in \{0, \dots, k-1\}$ gibt mit

$$\frac{1}{3} \leq \mathbb{P}(x_0 \prec y_l) \leq \frac{2}{3}.$$

Wir können ganz analog wie in Theorem 2.1 vorgehen. Das heißt wir definieren wieder

$$\begin{aligned} q_0 &:= \mathbb{P}(x_0 \prec y_0) \\ q_i &:= \mathbb{P}(y_{i-1} \prec x_0 \prec y_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, k-1 \\ q_k &:= \mathbb{P}(y_{k-1} \prec x_0). \end{aligned}$$

Da (x_0, Y) eine Leiter ist, summieren sich die q_i zu 1 auf. Ist nun $q_0 \geq 1/3$, so wären wir fertig, da wir bereits $q_0 \leq 1/2$ vorausgesetzt hatten. Sei also $q_0 < 1/3$. Nehmen wir uns ein Wort von \mathcal{A} , wo der letzte Vorgänger von x_0 aus Y das Element y_i ist, so können wir x_0 und y_i im Wort vertauschen und bekommen ein neues Wort von \mathcal{A} , da (x_0, Y) eine Leiter ist. In diesem neuen Wort steht x_0 zwischen y_{i-1} (falls $i \geq 1$) und y_i . Die Vertauschung beschreibt eine injektive Abbildung und wir bekommen

$$q_k \leq q_{k-1} \leq \dots \leq q_0 < \frac{1}{3}. \quad (*)$$

Betrachtet man jetzt das größte $l \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{i=0}^{l-1} q_i < 1/3$ ist (so ein l existiert da die Summe aller q_i gleich 1 ist), so folgt

$$\mathbb{P}(x_0 \prec y_l) = \sum_{i=0}^l q_i \geq \frac{1}{3}$$

aber auch

$$\mathbb{P}(x_0 \prec y_l) = \sum_{i=0}^l q_i < \frac{1}{3} + q_l \stackrel{(*)}{<} \frac{2}{3}.$$

Folglich sind x_0 und y_l balanciert und wir sind fertig. \square

Als erste Anwendung von Theorem 7.1 haben wir folgendes

Theorem 7.2 ([11]). *Ist \mathcal{A} ein Antimatroid mit Konvexdimension 2, so ist \mathcal{A} balanciert.*

Beweis. Der Antimatroid \mathcal{A} wird durch zwei Kettenantimatroide erzeugt, die durch die Tupel $X = (x_0, x_1, \dots)$ und $Y = (y_0, y_1, \dots)$ beschrieben werden können. Wir dürfen annehmen, dass $x_0 \neq y_0$ ist, da sonst alle Wörter von \mathcal{A} mit dem gleichen Element beginnen und da die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(x \prec y)$ durch das Entfernen dieses Elementes aus allen Mengen von \mathcal{A} nicht verändert werden.

Sollte nun y_0 in X enthalten sein, so sei $X' = (x_0, \dots, x_l)$ das längste Präfix von X ohne y_0 und analog sei Y' definiert. Dann ist (X', Y') eine Doppelleiter. Denn betrachten wir ein Wort von \mathcal{A} und die Vorgänger von x_0 in diesem Wort, so müssen diese alle aus Y' kommen. Diese sind im Wort auch so geordnet wie in Y' , da jedes Präfix des Wortes bis x_0 ein Präfix von Y' sein muss. Weiterhin können x_0 und sein unmittelbarer Vorgänger y_i im Wort die Plätze tauschen, so dass wir wieder ein Wort von \mathcal{A} erhalten, da die Präfixmenge $\{y_0, \dots, y_{i-1}, x_0\}$ klarerweise von den Ketten X und Y erzeugt wird, und alle weiteren Präfixmengen bereits im alten Wort Präfixmengen waren

Analog folgt, dass (y_0, X') eine Leiter ist und da \mathcal{A} somit die Doppelleiter (X', Y') besitzt, folgt zusammen mit Theorem 7.1 die Behauptung. \square

7.3 Höhe-2 Antimatroide

Wir wollen im folgenden eine weitere Klasse von Antimatroiden auf Balanciertheit untersuchen. Diese Klasse verallgemeinert die Partialordnungen mit Höhe 2. Wir hatten bereits erwähnt, dass Fishburn, Gehrlein und Trotter in [15] die Richtigkeit der $1/3$ - $2/3$ Vermutung für Höhe-2 Ordnungen zeigen konnten. Ihr Beweis ist recht technisch und auch umfangreich. Eppstein behauptet in seinem Artikel, sogar einen einfachen Beweis für die Verallgemeinerung auf Antimatroiden gefunden zu haben. Doch wie wir zeigen werden, befindet sich ein Fehler in seiner Argumentation, der sich nicht einfach reparieren lässt.

Die *Höhe* eines Antimatroiden \mathcal{A} definieren wir als die Höhe der Pfadordnung $P(\mathcal{A})$. Betrachten wir eine Partialordnung \mathbf{P} und den durch den Verband der Ideale definierten Antimatroiden $\mathcal{A}(\mathbf{P})$, so hatten wir bereits erwähnt, dass die Pfadordnung von $\mathcal{A}(\mathbf{P})$ isomorph zu \mathbf{P} ist. Deshalb sind die Höhe-2 Antimatroide auch eine Verallgemeinerung der Höhe-2 Ordnungen.

Sei nun x ein Element der Grundmenge M eines Antimatroiden \mathcal{A} , dann nennen wir x ein *initiales* Element, wenn man x in jedem Wort von \mathcal{A} mit seinem unmittelbaren Vorgänger vertauschen kann, so dass man wieder ein Wort von \mathcal{A} bekommt. Das heißt insbesondere, dass die Menge $\{x\}$ in \mathcal{A} liegt. Analog definieren wir *finale* Elemente als die Elemente, die durch Vertauschen mit dem unmittelbaren Nachfolger in einem Wort ein neues Wort erzeugen. Dass ein Antimatroid Höhe 2 hat, ist dann äquivalent dazu, dass die Grundmenge nur aus initialen und finalen Elementen besteht. Ein Element, das initial und final ist, nennen wir auch *unabhängig*. Bei den Partialordnungen entspricht dies einem Element, das keine Vergleichbarkeit besitzt und Eppstein zeigt analog zu Theorem 1.1 folgendes

Theorem 7.3 ([11]). *Besitzt \mathcal{A} ein unabhängiges Element und hat mindestens zwei Elemente in der Grundmenge, so ist \mathcal{A} balanciert.*

Der Beweis von Theorem 1.1 lässt sich hier ganz einfach auf die neuen Begrifflichkeiten übertragen, so dass wir hier auf einen ausführlichen Beweis verzichten können.

Sei nun wieder $h(x)$ (analog wie bei den Partialordnungen) die zu erwartende Höhe des Elementes x in einem Wort von \mathcal{A} und $f_{x,y}(i, j)$ die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Wort das Element x die Höhe i und y die Höhe j hat.

Lemma 7.3 ([11]). *Sind x, y zwei unterschiedliche initiale Elemente von \mathcal{A} , so gilt*

$$(i) \quad f_{x,y}(i, i+1) = f_{x,y}(i+1, i) \quad \text{für alle } i \geq 1$$

$$(ii) \quad f_{x,y}(i, j-1) \geq f_{x,y}(i, j) \quad \text{für alle } i \geq 1, j \geq 2 \text{ und } j \neq i+1.$$

Beweis. Nehmen wir uns ein Wort von \mathcal{A} in dem x und y die Positionen i und $i+1$ besetzen. Da x und y initial sind, können wir x und y tauschen und bekommen wieder ein Wort von \mathcal{A} , womit bereits (i) folgt.

Bei (ii) können wir ähnlich vorgehen, denn haben wir ein Wort mit x an Position i und y an Position j , so erhalten wir durch Vertauschen von y mit seinem unmittelbaren Vorgänger ($\neq x$) ein Wort von \mathcal{A} mit x an gleicher Position und y an Position $j-1$. Dies beschreibt eine injektive Abbildung und zeigt (ii). \square

Wie bei den Partialordnungen wollen wir im folgenden wieder die Relation \ll benutzen, das heißt es ist $x \ll y$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(x \prec y) > 2/3$ gilt.

Lemma 7.4 ([11]). *Seien x und y verschiedene initiale Elemente von \mathcal{A} und sei $x \ll y$. Hat die Grundmenge von \mathcal{A} genau n Elemente, so gilt für die zu erwartende Höhe von x :*

$$h(x) < \frac{n+1}{3}.$$

Beweis. Wir definieren zunächst für natürliche Zahlen i folgende Abbildungen:

$$r(i) := \sum_{1 \leq j \leq i} f_{x,y}(i+1, j)$$

$$s(i) := \sum_{1 \leq j \leq i} f_{x,y}(i+1, j) + \sum_{i < j \leq n} f_{x,y}(i, j).$$

Alle Summanden von $r(i)$ kommen auch in $s(i)$ vor. Jeder weitere Summand von $s(i)$ ist nach Lemma 7.3 kleiner gleich jedem Summanden von $r(i)$. Das heißt aber, dass der Durchschnitt der Summanden in $s(i)$ kleiner gleich dem in $r(i)$ ist, also

$$\frac{s(i)}{n} \leq \frac{r(i)}{i}.$$

Weiterhin kann man nun die erwartete Höhe von x schreiben als

$$h(x) = \sum_{i,j} i f_{x,y}(i, j) = \sum_i r(i) + i s(i).$$

Man verifiziert die Gleichheit, indem man auf beiden Seiten das Vorkommen der Terme $f_{x,y}(i, j)$ zählt. Insgesamt folgt

$$h(x) = \sum_i r(i) + is(i) \leq \sum_i (n+1)r(i) = (n+1) \sum_i r(i) < \frac{n+1}{3}.$$

Die letzte Ungleichung gilt, da wir $x \ll y$ angenommen haben und deshalb $\sum_i r(i) = \mathbb{P}(y \prec x) < 1/3$ ist. \square

Eppstein versucht in einem Lemma die durchschnittliche Höhe eines initialen Elementes nach unten zu beschränken. Hier befindet sich der Fehler in seiner Argumentation. Er behauptet:

Lemma 7.5 ([11]). *Sei x ein initiales Element von \mathcal{A} . Angenommen \mathcal{A} ist bezüglich \ll totalgeordnet und x hat $i \geq 2$ initiale Vorgänger in \ll , dann gilt*

$$h(x) > \frac{2i+5}{3}.$$

Was man mit seinen Methoden aber nur beweisen kann, ist das nachfolgende Lemma. Es folgt direkt aus seinen Überlegungen.

Lemma 7.6 ([11]). *Sei x ein initiales Element von \mathcal{A} . Angenommen \mathcal{A} ist bezüglich \ll totalgeordnet und x hat $i \geq 1$ initiale Vorgänger in \ll , dann gilt*

$$h(x) > \frac{2i+4}{3}.$$

Beweis. Wir beginnen mit ähnlichen Argumenten wie in Theorem 1.1 und wollen deshalb hier nicht ganz so ausführlich werden. Sei M die Grundmenge von \mathcal{A} . Zunächst beschreiben wir die zu erwartende Höhe von x als die Anzahl der zu erwartenden Vorgänger von x in einem Wort plus 1. Jedes Element $y \in \mathcal{A}$ mit $y \ll x$ ist in mindestens $2/3$ der Wörter ein Vorgänger von x . Damit ergibt sich bereits

$$h(x) \geq 1 + \sum_{\substack{y \in M \\ y \ll x}} \mathbb{P}(y \prec x) > \frac{2i+3}{3}.$$

Für die fehlenden $1/3$ auf der rechten Seite zeigen wir, dass wir auch nicht-initiale Elemente als Vorgänger von x erwarten können. Sei dazu y der unmittelbare initiale Vorgänger von x bezüglich \ll . Dieses Element existiert da $i \geq 1$. Sei dann E das Ereignis, dass y vor x in einem Wort liegt und es ein nicht-initiales Element zwischen den beiden gibt. Tritt E nicht ein, so ist entweder x vor y oder y ist vor x ohne nicht-initiales Element dazwischen. Der erste Fall ist nach Annahme von $y \ll x$ nur in weniger als $1/3$ der Fälle möglich. Im zweiten Fall können wir x und y vertauschen, da x, y und alle zwischen y und x liegenden Elemente initial sind. So bekommen wir eine injektive Abbildung in die Menge der Wörter mit x vor y und folglich tritt der zweite Fall ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit kleiner $1/3$ ein. Damit gilt $\mathbb{P}(E) > 1/3$, was uns auch die fehlenden $1/3$ für die Behauptung liefert. \square

In Eppsteins Lemma 7.5 wird angenommen, dass wir mindestens zwei initiale Vorgänger y, z von x haben. Sei jetzt o.B.d.A. $z \ll y$. Eppstein definiert dann ein Ereignis F für y und z analog zum Ereignis E aus dem Beweis. Das heißt F tritt ein, wenn z vor y steht und es ein nicht-initiales Element zwischen den beiden gibt. Klarerweise gilt dann wieder $\mathbb{P}(F) > 1/3$, doch unglücklicherweise ist dieses nicht-initiale Element zwar ein Vorgänger von y , aber nicht unbedingt auch von x . Ereignis F kann im Allgemeinen also nicht genutzt werden, um $h(x)$ nach unten zu beschränken.

Eppstein konnte mit Hilfe seiner Lemmata zeigen, dass alle Höhe-2 Antimatroide balanciert sind. Mit dem hier korrigierten Lemma genügt es nur für folgendes Theorem und Korollar:

Theorem 7.4. *Hat ein Antimatroid \mathcal{A} mindestens $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ initiale (bzw. finale) Elemente, so ist er balanciert.*

Beweis. Die Fälle in denen \mathcal{A} höchstens 4 Elemente in der Grundmenge hat, lassen sich leicht per Hand erledigen. Sei also $n \geq 5$, so dass wir mindestens 3 initiale Elemente haben (der Fall für finale Elemente geht natürlich analog). Wir nehmen zum Beweis an, dass \mathcal{A} nicht balanciert ist. Dann ist die n -elementige Grundmenge von \mathcal{A} bezüglich \ll totalgeordnet. Sei nun x das vorletzte initiale Element in \ll . Es gibt also ein initiales Element y , sodass $x \ll y$ ist und mit Lemma 7.4 folgt

$$h(x) < \frac{n+1}{3}.$$

Andererseits hat x nach Annahme mindestens $\lceil \frac{n-3}{2} \rceil$ initiale Vorgänger (insbesondere mindestens einen) und mit Lemma 7.6 folgt

$$h(x) > \frac{2(\frac{n-3}{2}) + 4}{3} = \frac{n+1}{3}$$

im Widerspruch zur ersten Ungleichung. □

Korollar 7.2. *Sei \mathcal{A} ein Höhe-2 Antimatroid mit n -elementiger Grundmenge. Ist n ungerade, so ist \mathcal{A} balanciert. Ist n gerade und hat \mathcal{A} mehr initiale als finale Elemente (oder umgekehrt) so ist \mathcal{A} ebenfalls balanciert.*

Der einzige Fall, der offen bleibt, ist also der Fall, dass \mathcal{A} eine gerade Anzahl an Elementen in der Grundmenge hat und die Anzahl der initialen Elemente auch der Anzahl der finalen Elemente entspricht.

Damit hat Eppstein im Allgemeinen noch nicht die Balanciertheit der Höhe-2 Antimatroide bewiesen. Wir wollen aber zeigen, wie mit ein paar zusätzlichen Überlegungen ein weiterer Beweis für Höhe-2 Partialordnungen aussehen kann. Dieser benutzt zwar immer noch die Kahn-Saks Methoden, ist aber deutlich kürzer als der von Gehrlein, Fishburn und Trotter [15]. Wir zeigen sogar etwas mehr.

Theorem 7.5. *Ist \mathbf{P} eine n -elementige Partialordnung (keine Kette) mit mindestens $\lceil n/2 \rceil$ minimalen (oder maximalen) Elementen, so ist \mathbf{P} balanciert.*

Bevor wir dieses Theorem beweisen, zeigen wir noch ein hilfreiches Lemma.

Lemma 7.7. *Sei \mathbf{P} eine Partialordnung und angenommen \mathbf{P} ist nicht balanciert. Bezeichnen wir die Elemente von \mathbf{P} wieder so, dass für die erwarteten Höhen*

$$h(x_1) \leq h(x_2) \leq \dots \leq h(x_n)$$

gilt, so folgt

$$h(x_k) > \frac{5k+1}{6} \quad \text{für alle } k \in \{2, \dots, n\}.$$

Beweis. Ist $h(x_{i+1}) - h(x_i) \leq 2/3$ für ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$, so ist nach Theorem 4.4 von Felsner und Trotter das Paar (x_i, x_{i+1}) balanciert, im Widerspruch zur Annahme. Das heißt es gilt $h(x_i) < h(x_{i+1}) - 2/3$ und induktiv folgt für $i < j$

$$h(x_i) < h(x_j) - (j-i)\frac{2}{3}.$$

Damit ergibt sich dann für $k \in \{2, \dots, n\}$

$$\sum_{i=1}^k h(x_i) < \sum_{i=1}^k \left(h(x_k) - (k-i)\frac{2}{3} \right) = kh(x_k) - \frac{k(k-1)}{3}. \quad (1)$$

Weiterhin gilt für jede lineare Erweiterung σ von \mathbf{P} und jedes $k \in \{1, \dots, n\}$

$$1 + 2 + \dots + k \leq h_\sigma(x_1) + h_\sigma(x_2) + \dots + h_\sigma(x_k)$$

und dementsprechend bekommen wir die gleiche Ungleichung für die durchschnittlichen Höhen $h(x)$. Damit folgt dann insgesamt für jedes $k \in \{2, \dots, n\}$

$$\frac{k(k+1)}{2} = \sum_{i=1}^k i \leq \sum_{i=1}^k h(x_i) \stackrel{(1)}{<} kh(x_k) - \frac{k(k-1)}{3}$$

und nach Umformungen erhalten wir

$$h(x_k) > \frac{5k+1}{6}.$$

□

Beweis von Theorem 7.5. Die Fälle in denen \mathbf{P} weniger als 11 Elemente hat, kann man leicht mit Hand und Computer verifizieren. Sei also $n \geq 11$ und die Anzahl der minimalen Elemente $m \geq \lceil n/2 \rceil \geq 6$ (der Fall für maximale Elemente geht analog). Angenommen \mathbf{P} ist nicht balanciert. Wir bezeichnen die minimalen Elemente so, dass für diese $x_1 \ll \dots \ll x_m$ gilt. Mit Bemerkung 4.1 folgt dann auch $h(x_1) < \dots < h(x_m)$. Betrachten wir jetzt das Element x_{m-1} etwas genauer. Wegen $x_{m-1} \ll x_m$ gilt mit dem Lemma 7.4 von Eppstein

$$h(x_{m-1}) < \frac{n+1}{3} \leq \frac{2m+1}{3}.$$

Andererseits gilt mit unserem Lemma 7.7

$$h(x_{m-1}) \geq \frac{5m-4}{6}$$

und es folgt die Ungleichung

$$\frac{5m-4}{6} < \frac{2m+1}{3}.$$

Da diese äquivalent zu $m < 6$ ist, haben wir einen Widerspruch zur Annahme und \mathbf{P} muss balanciert sein. \square

Mit Theorem 7.5 folgt nun klarerweise

Korollar 7.3. *Ist \mathbf{P} eine Partialordnung mit Höhe 2 (aber keine Kette), so ist \mathbf{P} balanciert.*

Die Beweisidee von Lemma 7.7 lässt sich nicht auf Antimatroide übertragen, da wir die Kahn-Saks Methoden nutzen, die nur bei Partialordnungen anwendbar sind. Trotzdem sind wir überzeugt, dass auch Höhe-2 Antimatroide balanciert sind. Wir glauben nämlich, dass man mit ein bisschen Geschick Lemma 7.5 beweisen kann, was uns aber leider noch nicht gelungen ist.

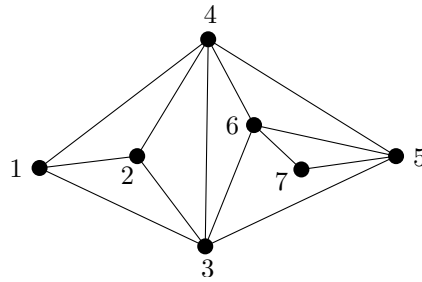


Abbildung 8.1: ein chordaler Graph mit einem Perfekten Eliminationsschema

8 Perfekte Eliminationsschemata und Antimatroide

Wir haben gesehen, dass die Menge der Ideale einer Partialordnung ein Antimatroid ist. Es gibt aber noch viele weitere diskrete Strukturen, die Antimatroide definieren und folglich wollen wir auch solche Klassen auf Richtigkeit der $1/3$ - $2/3$ Vermutung untersuchen. Zum Beispiel gibt es einige Möglichkeiten Antimatroide über Graphen zu definieren. Nehmen wir uns einen beliebigen Baum, so können wir nach und nach Blätter abpflücken und die möglichen Abpflückreihenfolgen sind dann die Wörter eines Antimatroids. Allgemeiner gilt sogar, dass die Eliminationsschemata von chordalen Graphen Wörter eines Antimatroids sind.

Man kann sich auch Antimatroide anschauen, die über eine Graphensuche definiert sind. Haben wir einen zusammenhängenden Graphen mit ausgezeichnetem Knoten s gegeben, so können wir den Graphen ausgehend von s erforschen und alle Knoten besuchen. Die entstehenden Reihenfolgen sind wieder Wörter eines Antimatroids.

Eppstein beweist für einige dieser speziellen Klassen die $1/3$ - $2/3$ Vermutung, wobei an die Graphen teils starke Voraussetzungen gemacht werden müssen. Wir wollen im folgenden die Beweise näher betrachten.

8.1 Chordale Graphen

Ein Graph G heißt *chordal*, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge größer oder gleich 4 besitzt. Oft werden chordale Graphen auch triangulierte Graphen genannt, da große Kreise Sehnen besitzen und so jeder Kreis trianguliert wird. Sie bilden eine Subklasse der perfekten Graphen und deshalb lassen sich einige Graphparameter, wie zum Beispiel die Färbungszahl, effizient berechnen.

Ein *Perfektes Eliminationsschema* (PES) ist eine Folge (oder lineare Ordnung) der Knoten des Graphen mit der Eigenschaft, dass für jeden Knoten v folgendes erfüllt ist: die Knoten der Nachbarschaft $N(v)$, die in der Folge nach v vorkommen, bilden eine Clique. Abbildung 8.1 zeigt ein Beispiel eines chordalen Graphen mit einem PES. Für uns ist nun folgende bekannte Charakterisierung wichtig.

Theorem 8.1. *Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er ein Perfektes Eliminationsschema besitzt.*

Ein PES eines chordalen Graphen kann auch als Abpflückreihenfolge von *simplicialen* Knoten interpretiert werden. Dabei heißt ein Knoten *simplicial*, wenn seine Nachbarschaft eine Clique bildet. Man kann sogar zeigen, dass wenn G chordal und keine Clique ist, es immer zwei nicht-adjazente simpliciale Knoten gibt. Zu beachten ist hierbei auch, dass induzierte Subgraphen eines chordalen Graphen natürlich wieder chordal sind.

Den Bezug zu Antimatroiden bekommen wir durch die nächste Behauptung. Präfixmengen eines PES sind wie im vorigen Kapitel für Wörter definiert.

Behauptung. *Die PES eines chordalen Graphen sind die Wörter eines Antimatroiden.*

Beweis. Sei also G ein chordaler Graph zu dem wir uns jetzt ein Mengensystem \mathcal{A} konstruieren. Die Elemente von \mathcal{A} seien genau die Präfixmengen der PES von G . Nehmen wir uns zwei solcher Mengen X, Y und zugehörige PES L_X, L_Y , so muss $X \cup Y$ ebenfalls eine Präfixmenge eines PES sein. Wir konstruieren uns dazu eine Abpflückreihenfolge, die mit den Elementen aus X wie in L_X beginnt, gefolgt von den Elementen aus $Y \setminus X$ wie in L_Y . In dieser Reihenfolge sind die Knoten aus X beim Abpflücken klarerweise simplicial. Das gleiche gilt für jeden Knoten y aus $Y \setminus X$, da die Elemente der Nachbarschaft $N(y)$, die in der konstruierten Folge noch nicht abgepflückt sind, auch in L_Y nach y auftreten. Da y beim Abpflücken in L_Y simplicial ist, muss es dies auch hier sein. Folglich ließen sich die Elemente aus $X \cup Y$ vor den restlichen Knoten abpflücken und wir haben $X \cup Y \in \mathcal{A}$.

Für das zweite Axiom sei $X \neq \emptyset$ wieder die Präfixmenge eines PES L_X . Entfernen wir das Element aus X , das in L_X am spätesten vorkommt, so bekommen wir natürlich eine Präfixmenge mit einem Element weniger als in X . \square

Wir wollen nun die Antimatroide, die über die PES von chordalen Graphen definiert sind, einfach mit *PES-Antimatroide* bezeichnen. Ist G chordal, so bezeichne \mathcal{A}_G den zugehörigen PES-Antimatroiden. Eppstein untersucht in seinem Artikel PES-Antimatroide von *k-Bäumen* und *Blockgraphen* und wir wollen uns jetzt anschauen, was er für diese zeigen konnte.

8.2 k -Bäume

Beginnen wir gleich mit einer rekursiven Definition dieser Graphen. Sei dazu ein $k \in \mathbb{N}$ fix. Eine $(k + 1)$ -Clique ist ein k -Baum. Fügen wir zu einem k -Baum einen Knoten hinzu, sodass seine Nachbarschaft eine k -Clique bildet, so erhalten wir wieder einen k -Baum.

Mit dieser Definition sind 1-Bäume gerade die üblichen Bäume, denn starten wir mit einer Kante (2-Clique), so können wir durch Hinzufügen von Grad-1 Knoten jeden beliebigen Baum konstruieren. Abbildung 8.2 zeigt ein Beispiel für einen 2-Baum. Nun sind k -Bäume chordale Graphen. Denn angenommen es existiert ein induzierter Kreis C im k -Baum G , dann nehmen wir uns den Knoten von C , der in der rekursiven Konstruktionsvorschrift als letztes hinzugefügt wurde. Seine beiden Nachbarn im Kreis sind dann Teil einer k -Clique und insbesondere adjazent und folglich muss C ein Dreieck sein, was die Chordalität zeigt. Ein PES eines

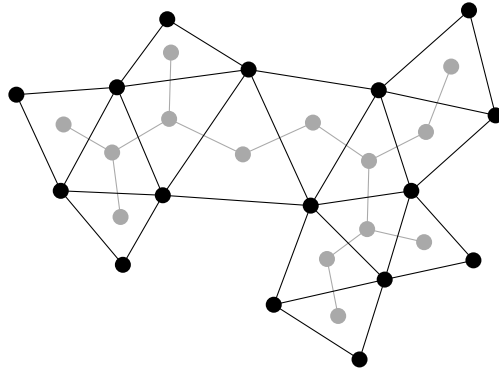


Abbildung 8.2: ein 2-Baum mit Cliques-Baum in grau

k -Baumes entspricht dann rückwärts gelesen gerade einer Reihenfolge, in der wir den k -Baum nach Konstruktionsvorschrift aufbauen können. Eppstein behauptet, folgendes Theorem bewiesen zu haben.

Theorem 8.2 ([11]). *PES-Antimatroide von k -Bäumen sind balanciert.*

Wie wir zeigen werden, ist sein Beweis für dieses Theorem etwas lückenhaft, doch glücklicherweise gelingt es uns ihn zu korrigieren. Bevor wir den Beweis wiedergeben, wollen wir noch ein paar grundlegende Eigenschaften von chordalen Graphen und k -Bäumen erwähnen.

Wir nennen eine Clique *maximal*, wenn sie in keiner anderen Clique echt enthalten ist. Ein *Cliques-Baum* ist ein Baum, dessen Knoten mit den maximalen Cliques eines Graphen assoziiert werden. Weiterhin hat der Baum die Eigenschaft, dass der Schnitt zweier maximaler Cliques K_1 und K_2 in jeder maximalen Clique enthalten ist, die in dem Baum auf dem eindeutigen Pfad zwischen K_1 und K_2 liegt. Existiert ein Cliques-Baum zu einem Graphen, so ist dieser im Allgemeinen nicht eindeutig. Abbildung 8.2 zeigt einen Cliques-Baum zu einem 2-Baum. Folgendes Resultat geht unter anderem auf Gavril zurück.

Theorem 8.3 ([18]). *Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er einen Cliques-Baum besitzt*

Für k -Bäume ist Theorem 8.3 leicht nachzuvollziehen, da wir so einen Baum bei der rekursiven Konstruktion des k -Baumes gleich mit erstellen können. Sei also G ein k -Baum, dann lässt sich wie folgt ein Cliques-Baum $T(G)$ bilden. Wir beginnen stets mit einer $(k + 1)$ -Clique, die in $T(G)$ durch einen Knoten repräsentiert wird. Und immer wenn wir einen neuen Knoten hinzufügen, bildet dieser eine neue $(k + 1)$ -Clique mit schon vorhandenen Knoten. Für diese neue Clique bekommt $T(G)$ einen neuen Knoten und dieser wird mit einer $(k + 1)$ -Clique verbunden, die die k alten Knoten enthält. So eine Clique existiert. Dies ist trivial, wenn diese k Knoten bereits in der Anfangsclique enthalten sind. Andernfalls betrachten wir den Knoten unter diesen, der zuletzt in der Konstruktion hinzugefügt wurde. Die zu diesem Zeitpunkt entstandene $(k + 1)$ -Clique enthält ebenfalls diese k Knoten. Da nun der neue Knoten

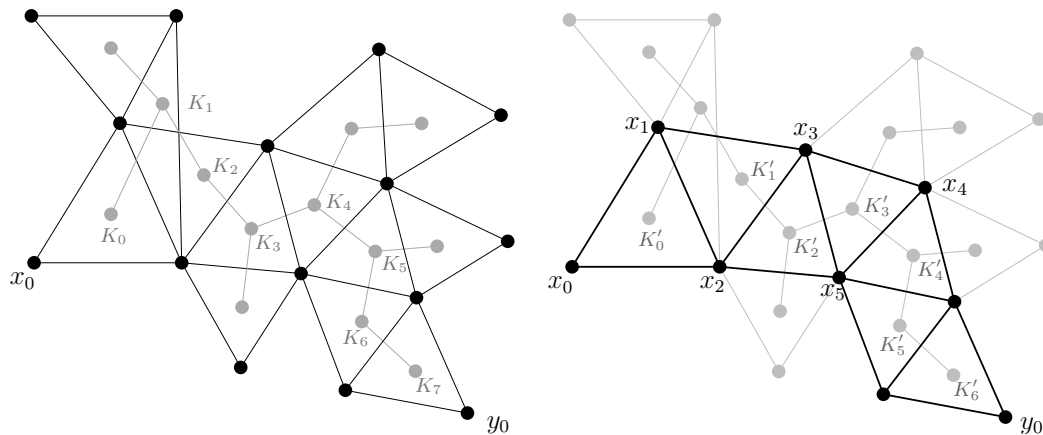


Abbildung 8.3: links ein 2-Baum mit Cliques-Pfad

in $T(G)$ Grad 1 hat, erzeugen wir keine Kreise und folglich ist $T(G)$ weiterhin ein Baum. Auch hier sei noch mal darauf hingewiesen, dass $T(G)$ nicht eindeutig ist, da es mehrere $(k + 1)$ -Cliques geben kann, die mit der neuen Clique k Knoten gemeinsam haben.

Wir sind nun in der Lage Eppsteins (von uns korrigierten) Beweis für Theorem 8.2 wiederzugeben. In der Artikelversion vom 24. Februar 2013 geht Eppstein von der vereinfachten Annahme aus, dass zwei Cliques in $T(G)$ genau dann über eine Kante verbunden sind, wenn sie k Knoten teilen. Seine Annahme tritt aber nur ein, wenn der Cliques-Baum wie in Beispiel 8.2 eindeutig ist. Für den Beweis entstehen dadurch jedoch keine großen Probleme, durch eine kleine Modifikation lässt er sich retten. Nach dem Beweis werden wir noch mal genau darauf hinweisen, worin diese Modifikation besteht.

Beweis von Theorem 8.2. Sei G ein k -Baum und $T(G)$ ein Cliques-Baum, der auf die oben beschriebene Art und Weise entstanden ist. Jeder Knoten in $T(G)$ korrespondiert zu einer $(k + 1)$ -Clique (das sind genau die maximalen Cliques) und wenn zwei Cliques über eine Kante verbunden sind, so haben sie genau k Knoten gemeinsam. Nehmen wir uns zwei Blätter von $T(G)$, so haben die zugehörigen Cliques simpliziale Knoten x_0 und y_0 . Das sind genau die Knoten, die in der rekursiven Konstruktion in der jeweiligen Clique als letztes hinzugefügt wurden. Sei nun K_0 die Clique von x_0 , dann gibt es in $T(G)$ einen eindeutigen Pfad von K_0 zur Clique von y_0 . Wir bezeichnen die Cliques auf diesem Pfad in der Reihenfolge in der sie auftreten mit K_0, K_1, \dots, K_t , wobei K_t das Blatt von $T(G)$ ist, das zu y_0 gehört. In Abbildung 8.3 sehen wir links ein 2-Baum mit simplizialen Knoten x_0, y_0 und den zugehörigen Cliques-Pfad in $T(G)$. Wir finden in diesem Beispiel aber eine Situation vor, die wir nicht haben wollen. Es gibt drei aufeinanderfolgende Cliques im Pfad, die eine k -Clique gemeinsam haben, nämlich K_0, K_1 und K_2 . Wenn so etwas vorkommt, streichen wir die mittlere Clique aus unserer Folge. Wiederholen wir dies gegebenenfalls, so erhalten wir eine Folge von Cliques K'_0, K'_1, \dots, K'_s mit $K_0 = K'_0$ und $K_t = K'_s$. Diese Folge bildet im Allgemeinen keinen Pfad in $T(G)$, was uns aber

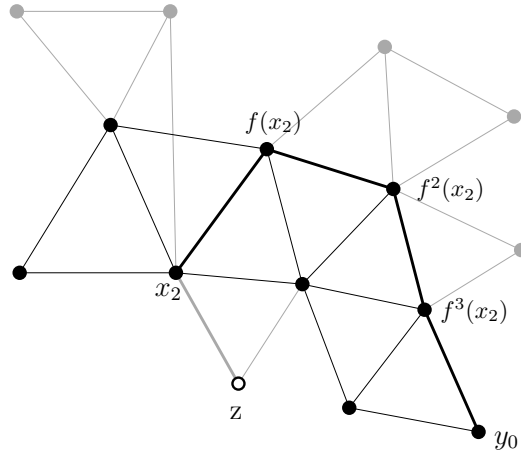


Abbildung 8.4: Element z mit seinem induzierten Pfad nach y_0

nicht weiter stören soll. Siehe dazu das rechte Bild in Abbildung 8.3.

Nun ist Knoten x_0 in K'_0 , aber nicht in K'_1 enthalten. Für $i = 1, \dots, s-1$ sei x_i dann der eindeutige Knoten in K'_i , der nicht in K'_{i+1} enthalten ist. Abbildung 8.3 zeigt dies am Beispiel.

Behauptung. Für $i = 1, \dots, s-1$ gilt $x_i \in K'_{i-1}$

Beweis. Angenommen $x_i \notin K'_{i-1}$. Es ist $x_i \in K'_i$ und da K'_{i-1} und K'_i genau k Knoten gemeinsam haben, sind dies bis auf x_i genau die Knoten aus K'_i . Nach Auswahl von x_i sind diese Knoten dann aber auch in K'_{i+1} enthalten und folglich gibt es k Knoten in $K'_{i-1} \cap K'_i \cap K'_{i+1}$, was nach unserer Konstruktion nicht sein kann. \square

Behauptung. Sei $X = (x_0, x_1, \dots, x_{s-1})$, dann ist (y_0, X) eine Leiter.

Beweis. Für die erste Eigenschaft einer Leiter müssen wir folgendes zeigen. Steht ein Knoten x_i (für $i \geq 1$) in einem PES vor y_0 , so liegt Knoten x_{i-1} vor x_i . Sei f die Abbildung, die ein x_j auf das (eindeutige) Element abbildet, das in K'_j liegt, aber nicht in K'_{j-1} . Nach voriger Behauptung ist $f(x_j) \neq x_j$ und folglich können wir die Sequenz $x_{i-1}, x_i, f(x_i), f(f(x_i)), \dots, y_0$ bilden. Wie man sich überlegen kann, bildet diese dann in G einen induzierten Pfad. In einem PES muss dann aber vor x_i eines der Pfadenden x_{i-1} oder y_0 stehen, mit unserer Annahme dann also x_{i-1} , wie gefordert.

Für die zweite Eigenschaft einer Leiter betrachten wir ein PES und wählen i maximal, so dass x_i vor y_0 steht. Wir müssen zeigen, dass wenn wir x_i und y_0 tauschen ein neues PES entsteht. Da y_0 als Nachbarschaft eine Clique hat, kann y_0 bedenkenlos nach vorne verschoben werden. Sind alle Elemente zwischen x_i und y_0 in dem PES nicht-adjazent zu x_i , so können wir auch x_i an die Position von y_0 schieben und erhalten ein PES. Angenommen aber wir finden ein z zwischen x_i und y_0 , das mit x_i verbunden ist. Ist $z \notin K'_i$, so gibt es ein Element aus K'_i , das nicht mit z verbunden ist (andernfalls hätten wir eine $(k+2)$ -Clique in G , was nicht möglich

ist). Sei dann $f(x_i)$ dieses Element und sei ab jetzt f wieder wie oben definiert. Damit bekommt man wieder einen induzierten Pfad $z, x_i, f(x_i), f(f(x_i)), \dots, y_0$ mit Endpunkten z und y_0 , wie in Abbildung 8.4 zum obigen Beispiel gezeigt, und somit erhalten wir, dass z oder y_0 in einem PES vor x_i stehen muss, im Widerspruch zur Wahl von z .

Also ist $z \in K'_i$. Da es nach unserer Wahl von i kein $j > i$ geben darf mit $x_j = z$, folgt sogar $z \in K'_s$. Dann muss aber auch $i = s - 1$ sein, denn sonst existiert das Element x_{i+1} , das mit z verbunden sein muss (da $z \in K'_{i+1}$) und das im PES rechts von y_0 steht. Da nun z zu y_0 und x_{i+1} adjazent ist, folgt mit der PES-Eigenschaft, dass auch y_0 und x_{i+1} adjazent sind. Also gilt $x_{i+1} \in K'_s$, doch das ist nach Definition von x_{i+1} nicht möglich.

Es bleibt also der Fall, dass z zwischen x_{s-1} und y_0 steht und zu beiden adjazent ist. Wollen wir x_{s-1} an die Stelle von y_0 bewegen, so bereitet z nur dann Probleme, wenn rechts von z noch ein z' steht, das adjazent zu z ist, aber nicht zu x . Da wir ein PES vorliegen haben sind dann aber y_0 und z' verbunden und da alle Nachbarn von y_0 auch Nachbarn von x_{s-1} sind, bilden auch x und z' eine Kante, im Widerspruch zur Wahl von z' .

Folglich können wir also x_{s-1} und y_0 vertauschen und bekommen ein weiteres PES, womit die zweite Eigenschaft einer Leiter gezeigt wurde. \square

Mit der bewiesenen Behauptung folgt nun aber auch leicht das ganze Theorem. Bei der Definition von x_1, \dots, x_{s-1} hätten wir wegen der Symmetrie genauso gut am anderen Ende der Cliquesfolge K'_0, \dots, K'_s anfangen können. Wir würden dann die Folge y_0, y_1, \dots, y_{s-1} bekommen und mit $Y = (y_0, \dots, y_{s-1})$ ist dann auch (x_0, Y) eine Leiter. Insgesamt bildet (X, Y) dann eine Doppelleiter und der Antimatroid ist nach Theorem 7.1 balanciert. \square

Eppstein hatte wie schon erwähnt vereinfacht angenommen, dass wenn zwei maximale Cliques k Knoten gemeinsam haben, sie im Cliquesbaum über eine Kante verbunden sind. Damit tritt bei ihm auch nicht der Fall auf, dass drei Cliques K_{i-1}, K_i, K_{i+1} auf dem betrachteten Pfad k Knoten gemeinsam haben. Doch dies kann natürlich vorkommen. Die Modifikation, die den Beweis rettet, ist das Herausnehmen von K_i aus der Folge der Cliques in einem solchen Fall. Dies ist notwendig, da sonst die Abbildung f Fixpunkte besitzt und wir keinen induzierten Pfad bekommen würden, der bei y_0 endet.

8.3 Blockgraphen

Eppstein untersucht mit den *Blockgraphen* eine weitere Klasse von chordalen Graphen. Dabei heißt ein Graph G Blockgraph, wenn jede maximale 2-zusammenhängende Komponente (auch Block genannt) eine Clique ist. Hier haben zwei maximale Cliques also höchstens einen Knoten gemeinsam und wir können einen *Blockwald* $T(G)$ konstruieren, wo jeder Block und jeder trennende Knoten einem Baumknoten entspricht. Dabei ist ein Block K mit einem trennenden Knoten v über eine Kante verbunden, wenn v in K enthalten ist. Wir erhalten tatsächlich einen Wald, denn andernfalls würde ein Kreis im konstruierten Graphen einen Kreis im

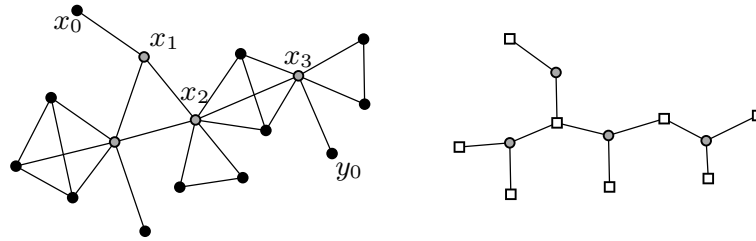


Abbildung 8.5: Blockgraph mit Blockwald

Blockgraphen erzeugen, der nach Definition Teil einer maximalen Clique sein muss, doch dann können die Blöcke im Kreis von $T(G)$ keine maximalen Cliques sein. Abbildung 8.5 zeigt links einen Blockgraphen und daneben seinen Blockwald. Die trennenden Knoten sind durch graue Punkte hervorgehoben. Eppstein zeigt dann:

Theorem 8.4 ([11]). *Ist \mathcal{A}_G ein PES-Antimatroid eines Blockgraphen G , so ist \mathcal{A}_G balanciert.*

Beweis. Sei G also ein Blockgraph, $T(G)$ sein Blockwald und \mathcal{A}_G der Antimatroid, der durch die PES von G definiert ist. Wir beginnen mit einigen einfachen Fällen. Hat $T(G)$ einen isolierten Knoten, so besitzt G eine isolierte Clique. Besteht diese Clique wiederum nur aus einem Knoten, so haben wir ein unabhängiges Element in \mathcal{A}_G und \mathcal{A}_G ist nach Theorem 7.3 balanciert. Hat die Clique mehrere Knoten, so sind zwei beliebige davon zwei ununterscheidbare Elemente von \mathcal{A}_G und bilden ein perfekt balanciertes Paar. Gehen wir also davon aus, dass der Wald $T(G)$ einen Baum mit mindestens zwei Knoten als Komponente besitzt. Diese Komponente hat dann insbesondere zwei Blätter, die zu zwei Cliques von G korrespondieren. Seien jetzt x_0 und y_0 Elemente der jeweiligen Clique, die nicht den trennenden Knoten entsprechen mit denen die beiden Cliques in $T(G)$ verbunden sind. In G gibt es dann einen eindeutigen induzierten Pfad von x_0 nach y_0 . Wir bezeichnen die Elemente entlang des Pfades bei x_0 startend mit x_0, x_1, \dots, x_k (y_0 nicht mit eingeschlossen), siehe hier noch mal Abbildung 8.5. Definieren wir dann $X = (x_0, x_1, \dots, x_k)$, so können wir zeigen, dass (y_0, X) eine Leiter ist.

Da x_0, \dots, x_k, y_0 ein induzierter Pfad in G ist, folgt sofort wieder die erste Eigenschaft einer Leiter. Denn solange y_0 nicht abgepflückt wurde, dürfen wir bloß am anderen Ende des Pfades Elemente abpflücken und die x_i kommen daher wie in der Reihenfolge in X in einem PES vor.

Für die zweite Eigenschaft nehmen wir uns ein beliebiges PES und wählen i maximal, sodass x_i im PES vor y_0 steht. Da y_0 simplizial ist, bereitet das Vertauschen von x_i und y_0 in dem PES nur dann Probleme, wenn es einen induzierten Pfad x_i, z, a gibt, wobei z zwischen x_i und y_0 steht und a in dem PES nach z vorkommt. Nun ist x_i aber auch noch mit x_{i+1} (falls $i = k$ ist, sei hier $x_{k+1} := y_0$) verbunden und somit sind die beiden Nachbarn z und x_{i+1} von x_i , die rechts von x_i stehen, ebenfalls adjazent. Dann hat wiederum z die zwei Nachbarn x_{i+1} und a , die im PES rechts von ihm stehen und somit auch adjazent sind. Insgesamt ist x_i, z, a, x_{i+1}, x_i ein Kreis, damit 2-zusammenhängend und da G ein Blockgraph ist sogar eine Clique. Dann

sind aber auch x_i und a adjazent, entgegen der Annahme, dass x_i, z, a ein induzierter Pfad ist. Wir schließen also, dass wir x_i und y_0 in dem PES vertauschen können, so dass wir ein weiteres PES bekommen. Damit ist die zweite Eigenschaft der Leiter gezeigt.

Nun sieht man aufgrund der Symmetrie, dass wir genauso den Pfad bei y_0 beginnend starten könnten und somit eine Leiter (x_0, Y) bekommen würden. Dann bildet (X, Y) die eine Doppelleiter und der Antimatroid \mathcal{A}_G ist balanciert. \square

Wir haben jetzt also für zwei Subklassen von chordalen Graphen gesehen, dass die zugehörigen Antimatroide balanciert sind und sogar eine Doppelleiter besitzen. Tatsächlich sind diese Klassen sogar auf eine Weise sehr unterschiedlich. Bei k -Bäumen haben wir viele Cliques-Paare, die k Knoten gemeinsam haben, während im Schnitt von zwei Cliques eines Blockgraphen höchstens ein Element liegt.

Eppstein untersucht noch eine weitere Klasse von Antimatroiden, die über bestimmte Graphen definiert werden können. Diese Graphen sind zusammenhängend und haben einen markierten Knoten. Von diesem ausgehend, startet man eine Suche durch den Graphen und bekommt damit Suchreihenfolgen auf der Menge der Knoten. Und wie man zeigen kann, sind diese Reihenfolgen wieder Wörter eines Antimatroiden. Hat man zusätzlich die Voraussetzung an die Graphen, dass alle induzierten Pfade, die zwei (beliebige) Knoten verbinden, die gleiche Länge besitzen, so weist Eppstein in den zugehörigen Antimatroiden eine Doppelleiter nach. Folglich sind solche Antimatroide balanciert.

Wie das Beispiel von Eppstein [11] in Abbildung 8.6 zeigt, können wir aber bei PES-Antimatroiden von chordalen Graphen nicht hoffen, immer eine Doppelleiter zu finden. Der abgebildete Graph gehört sogar zu den Intervallgraphen, auf die wir im nächsten Kapitel genauer eingehen wollen.

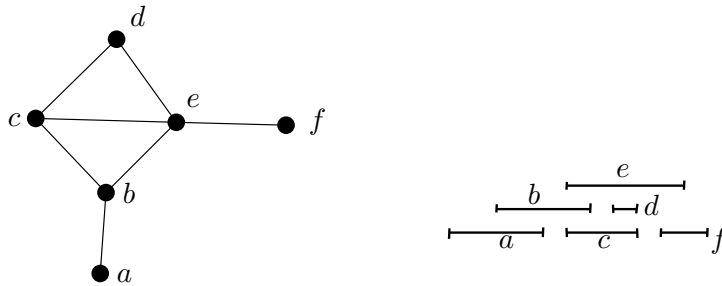


Abbildung 8.6: Intervallgraph ohne Doppelleiter

9 Einheits-Intervallgraphen und Balancierte Paare

Wir wollen in diesem Kapitel an die Arbeit von Eppstein anknüpfen und beweisen, dass die PES-Antimatroide von Einheits-Intervallgraphen balanciert sind. Wir werden uns zunächst aber auch Gedanken zu allgemeinen PES-Antimatroiden machen.

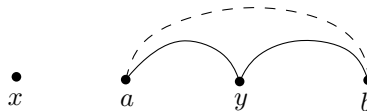
9.1 Weitere Eigenschaften von PES-Antimatroiden

Ist L ein PES eines chordalen Graphen, so wollen wir L als lineare Ordnung auffassen und schreiben $x <_L y$, wenn x im PES links von y steht, beziehungsweise, wenn x vor y abgepflückt wird. In den Beweisen dieses Kapitels werden wir oft zeigen, dass wir zwei Elemente x, y in einem PES L vertauschen können, so dass wir wieder ein PES erhalten. Gilt $x <_L y$, so ist dies genau dann nicht möglich, wenn einer der folgenden drei Fälle eintritt:

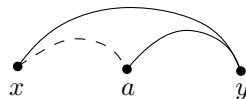
- **Fall A:** Wir können x nicht an die Position von y schieben. Das heißt es gibt Knoten $a, b \in V(G) \setminus \{x, y\}$ mit $x <_L a <_L b$ und $a <_L y$, so dass x und a adjacent sind, sowie a und b , aber nicht x und b . Das folgende Bild zeigt die Situation:



- **Fall B:** Wir können y nicht an die Position von x schieben. Das heißt es gibt Knoten $a, b \in V(G) \setminus \{x, y\}$ mit $x <_L a <_L b$, so dass y adjacent ist zu a und b , aber Knoten a und b sind nicht-adjacent.



- **Fall C:** Fall A und B treten nicht ein, aber x und y können nicht gleichzeitig die Positionen tauschen. Das heißt x und y sind adjacent und es gibt einen Knoten $a \in V(G) \setminus \{x, y\}$ mit $x <_L a$, der adjacent zu y aber nicht zu x ist.



Wir werden desöfteren auf diese Fälle verweisen. Für jeden chordalen Graphen G gilt nun das folgende Lemma.

Lemma 9.1. *Sind x und y verschiedene Knoten von G mit $N[y] \subseteq N[x]$, so gilt $\mathbb{P}(y \prec x) \geq \frac{1}{2}$.*

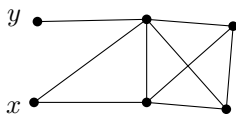
Beweis. Da sich die Annahme auf die abgeschlossenen Nachbarschaften von x und y bezieht, sind die Knoten x und y insbesondere adjazent. Sei nun L ein PES mit $x <_L y$. Wir können x und y vertauschen und erhalten ein PES mit y vor x , denn angenommen es tritt einer der oben genannten Fälle ein. In Fall A mit entsprechenden Knoten a und b gilt, da x und y adjazent sind, mit der PES-Eigenschaft, dass a und y verbunden sind und deshalb dann auch b und y . Da $N(y) \subseteq N[x]$ gilt, folgt dann aber, dass x und b verbunden sind, im Widerspruch zur Annahme in Fall A.

Fall B kann nicht eintreten, da die entsprechenden Knoten a und b wegen $N(y) \subseteq N[x]$ auch mit x verbunden sein müssten. Doch da sie beide rechts von x liegen, wären sie dann aufgrund der PES-Eigenschaft adjazent, entgegen der Annahme in Fall B.

Dass Fall C nicht eintreten kann ist wegen $N(y) \subseteq N[x]$ sofort klar und somit können wir die beiden Knoten in dem PES vertauschen. Diese Vertauschung beschreibt dann eine injektive Abbildung in die Menge der PES, in denen y vor x steht. Das beendet den Beweis. \square

Korollar 9.1. *Ist x ein simplizialer Knoten und $z \in N(x)$, so gilt $\mathbb{P}(x \prec z) \geq \frac{1}{2}$.*

Bemerkung 9.1. Dass wir bei dem Lemma abgeschlossene Nachbarschaften verwenden ist wichtig. Denn sind x und y nicht adjazent mit $N(y) \subseteq N(x)$, so gilt im Allgemeinen nicht $\mathbb{P}(y \prec x) \geq 1/2$, wie folgendes Beispiel zeigt. Dort gilt nämlich $\mathbb{P}(y \prec x) = \frac{88}{180} < \frac{1}{2}$.



Lemma 9.2. *Sei $\{y_1, \dots, y_n\}$ eine stabile Menge in der Nachbarschaft von x . Dann gilt für mindestens $n - 1$ Elemente z aus $\{y_1, \dots, y_n\}$, dass $\mathbb{P}(z \prec x) > \frac{1}{2}$ ist.*

Beweis. Angenommen wir finden zwei Elemente y_i und y_j mit $\mathbb{P}(y_i \prec x) \leq 1/2$ und $\mathbb{P}(y_j \prec x) \leq 1/2$. Da die Ereignisse $x \prec y_i$ und $x \prec y_j$ nicht gleichzeitig eintreten können (denn $\{y_i, y_j\} \notin E$), gilt sogar Gleichheit und die Ereignisse zerlegen die Menge der PES. Letzteres kann aber nicht passieren, da es PES gibt, in denen x an letzter Stelle steht und somit y_i und y_j vor x stehen. \square

In späteren Beweisen werden wir in einem Gegenbeispiel G zur $1/3$ - $2/3$ Vermutung arbeiten und in diesem sind je zwei Knoten bezüglich \ll (siehe Definition 1.7) vergleichbar, insbesondere also diejenigen, die über eine Kante verbunden sind. Sei dann \vec{G} die gerichtete Version von G , in der eine Kante genau dann von x nach y gerichtet ist, wenn $\{x, y\} \in E(G)$ und $x \ll y$ gilt. Jeder simpliziale Knoten ist damit nach Korollar 9.1 eine Quelle in \vec{G} . Sei im folgenden $N^+(x) = \{v \in V(G) \mid (x, v) \text{ ist Kante in } \vec{G}\}$ die Menge der Knoten, die wir über eine ausgehende Kante von x erreichen. Sei für die folgenden drei Lemmata angenommen, dass G ein Gegenbeispiel ist.

Lemma 9.3. *In \vec{G} ist $N^+(x)$ für jeden Knoten $x \in V(\vec{G})$ eine Clique.*

Beweis. Angenommen es gibt $y, z \in N^+(x)$, die nicht adjazent sind. Nach Definition der Orientierung von G gilt $x \ll y$ und $x \ll z$. Da in einem PES x nicht vor beiden Knoten y und z vorkommen darf, hat x also immer y oder z als Vorgänger. Damit folgt aber sofort $\mathbb{P}(y \prec x) \geq 1/2$ oder $\mathbb{P}(z \prec x) \geq 1/2$ und somit insbesondere $y \ll x$ oder $z \ll x$ im Widerspruch zur Annahme. \square

Lemma 9.4. *Sei P ein induzierter Pfad in \vec{G} . Dann gibt es eingeschränkt auf P genau eine Senke.*

Beweis. Dass es mindestens eine Senke geben muss ist klar. Angenommen es gibt zwei. Dann gibt es auf P zwischen diesen beiden auch eine Quelle x und die beiden Nachbarn von x auf P sind somit in $N^+(x)$. Nach Lemma 9.3 sind diese dann adjazent im Widerspruch dazu, dass P ein induzierter Pfad ist. \square

Lemma 9.5. *Sei $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ein induzierter Pfad in \vec{G} mit $(x_i, x_{i+1}) \in E(\vec{G})$ für $i = 0, \dots, n-1$. Dann gilt $\mathbb{P}(x_0 \prec x_1 \prec \dots \prec x_n) > \frac{2}{3}$.*

Beweis. Da nach Voraussetzung $x_{n-1} \ll x_n$ gilt, ist in mindestens $2/3$ der PES x_{n-1} vor x_n . In diesen muss dann auch x_{n-2} vor x_{n-1} sein, da $\{x_{n-2}, x_n\} \notin E(G)$, also $\mathbb{P}(x_{n-2} \prec x_{n-1} \prec x_n) > 2/3$. Der Rest folgt induktiv. \square

Wie wir im vorigen Kapitel gesehen haben, hat Eppstein die Balanciertheit von PES-Antimatroiden von k -Bäumen bewiesen. Wir geben hier einen weiteren Beweis für die Behauptung an, dass PES-Antimatroide von Bäumen balanciert sind.

Theorem 9.1. *PES-Antimatroide von Bäumen haben ein balanciertes Paar.*

Beweis. Sei T ein Baum und sei $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ein längster Pfad in T . Sind die Blätter x_0 und x_n balanciert, so wären wir fertig. Wir können also $\mathbb{P}(x_0 \prec x_n) > 2/3$ annehmen. Gilt für x_1 nun $\deg(x_1) > 2$, so hat x_1 einen Nachbarn y , der nicht in P liegt. Dieser Nachbar y muss ein Blatt sein, denn andernfalls finden wir einen längeren Pfad als P . Dann sind aber x_0 und y ununterscheidbar und wir haben $\mathbb{P}(x_0 \prec y) = 1/2$.

Bleibt also der Fall $\deg(x_1) = 2$. Betrachten wir nun die Menge der PES zum Ereignis $A = x_0 \prec x_n$. Wir zerlegen das Ereignis in zwei Teilereignisse A_1 und A_2 , wobei in A_1 alle PES liegen, in denen wir x_0 und x_n vertauschen können um ein neues PES zu erhalten. Da die Vertauschung eine injektive Abbildung beschreibt, haben wir $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(x_n \prec x_0) < 1/3$.

In einem PES aus A_2 ist eine Vertauschung nicht möglich und da x_n simplizial und nicht-adjazent zu x_0 ist, tritt notwendigerweise Fall A ein. Da nun x_0 Grad 1 und x_1 Grad 2 hat, sind die entsprechenden Knoten a und b gerade x_1 und x_2 . Folglich liegt x_2 rechts von x_1 und alle Knoten zwischen x_0 und x_1 in dem PES müssen nicht-adjazent zu x_0 und x_1 sein. Dann ist aber eine Vertauschung dieser beiden Knoten möglich. Auch dies ist eine injektive Abbildung und wir erhalten $\mathbb{P}(A_2) \leq \mathbb{P}(x_1 \prec x_0) < 1/3$, wobei die letzte Ungleichung mit Korollar 9.1 folgt.

Insgesamt ergibt sich $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) < 2/3$, im Widerspruch zur Annahme. \square

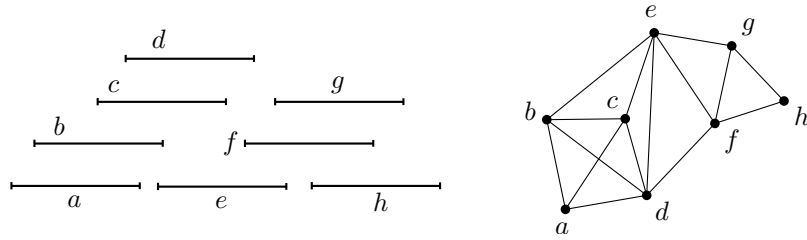


Abbildung 9.1: Ein Einheits-Intervallgraph

9.2 Einheits-Intervallgraphen

In diesem Abschnitt wollen wir die Vermutung für eine weitere Klasse von PES-Antimatroiden beweisen. Beginnen wir zunächst damit, *Einheits-Intervallgraphen* zu definieren.

Definition 9.1. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *Intervallgraph*, wenn wir jedem Knoten $x \in V$ ein Intervall $I_x = [a_x, b_x]$ mit $a_x \leq b_x$ auf der reellen Achse zuweisen können, so dass gilt:

$$\{x, y\} \in E \iff I_x \cap I_y \neq \emptyset.$$

Wir nennen eine solche Zuweisung auch *Intervallrepräsentation* I_G von G . Existiert eine Intervallrepräsentation von G , in der jedes Intervall die Länge 1 hat, so nennen wir G auch *Einheits-Intervallgraph* (kurz *EIG*).

Abbildung 9.1 zeigt ein Beispiel zusammen mit einer Intervallrepräsentation. Dass Intervallgraphen chordal sind, sieht man leicht mit einer Intervallrepräsentation. In einer solchen ist das Intervall mit dem linkensten rechten Endpunkt notwendigerweise simplizial. Pflückt man diese simplizialen Intervalle nach und nach ab, so bekommen wir ein PES und mit obiger Charakterisierung ist klar, dass der Graph chordal ist.

Ist G nun ein EIG mit zugehöriger Intervallrepräsentation, so können wir annehmen, dass keine zwei Intervalle die gleichen Endpunkte besitzen, da wir durch kleine Verschiebungen Unterschiede schaffen können. Für uns sind sowieso nur Einheits-Intervallgraphen interessant, in denen gleiche Intervallgrenzen nicht möglich sind, andernfalls hätten wir nämlich sofort ununterscheidbare Elemente im Antimatroiden, so dass dieser dann perfekt balanciert wäre.

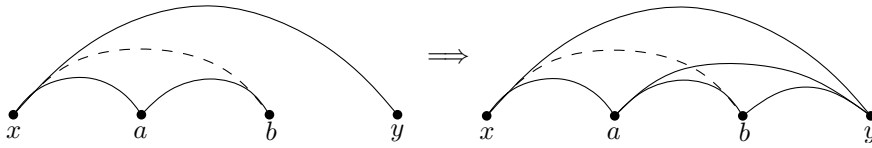
Die Anfangspunkte der Intervalle von links nach rechts gelesen geben uns eine Totalordnung $<^*$ auf der Knotenmenge, das heißt es gilt genau dann $x <^* y$, wenn $a_x < a_y$ in der Intervallrepräsentation. Es folgt ein zentraler Hilfssatz für unser Hauptresultat.

Lemma 9.6. *Sei G ein EIG mit Intervallrepräsentation I_G und angenommen G ist ein Gegenbeispiel zur $1/3$ - $2/3$ Vermutung. Seien weiterhin x, y, z paarweise adjazente Knoten mit $x <^* y <^* z$ in I_G . Dann gilt $y \ll x$ oder $y \ll z$.*

Beweis. Angenommen es gilt $x \ll y$ und $z \ll y$. Da G ein Gegenbeispiel ist, sind x und z bezüglich \ll vergleichbar, und aus Symmetriegründen können wir $z \ll x$

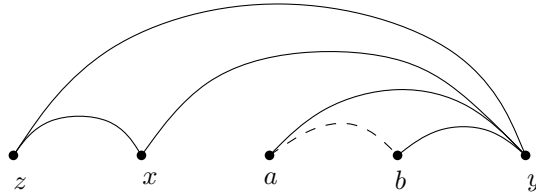
annehmen. Sei dann A das Ereignis $x \prec y$. Dieses zerlegen wir in die Teilereignisse A_1 und A_2 , wobei in A_1 alle PES liegen, in denen eine Vertauschung von x und y möglich ist und somit ein weiteres PES produziert. Diese Vertauschung beschreibt dann eine injektive Abbildung in das Ereignis $y \prec x$ und wir bekommen $\mathbb{P}(A_1) < 1/3$.

In A_2 liegen demnach alle PES, in denen x und y nicht vertauscht werden können. Es treten dann also die oben beschriebenen Fälle A, B und C auf und Ziel ist es zu zeigen, dass in allen Fällen x vor z im PES steht. Beginnen wir mit Fall A und den zugehörigen Knoten a und b . Da hier x und y adjazent sind, folgt mit der PES-Eigenschaft, dass y mit a und b über eine Kante verbunden sein muss. Das folgende Bild zeigt die Situation.



In der Intervallrepräsentation I_G bedeutet dies, dass I_b das Intervall I_y schneidet, aber nicht I_x . Wegen $x <^* y$ liegt somit das Intervall I_b komplett rechts von I_x und es gilt insbesondere $y <^* b$. Dann bekommen wir aber auch, dass sich I_z und I_b schneiden (beiden besitzen den rechten Endpunkt von I_y) und somit sind z und b adjazent. Da z also zu x und b adjazent ist, aber $\{x, b\} \notin E(G)$ gilt, muss z aufgrund der PES-Eigenschaft rechts von x im PES liegen.

Kommen wir zu Fall B mit entsprechenden Knoten a und b . Angenommen nun, z liegt links von x im PES. Das nächste Bild zeigt die Situation.



Da die Knoten a, b in der Nachbarschaft von y liegen, aber beide nicht über eine Kante verbunden sind, liegen die Intervalle I_a und I_b nicht beide weiter rechts als I_y oder beide weiter links als I_y . Wir können also $a <^* y <^* b$ annehmen. Dann schneiden sich die Intervalle I_x und I_a und ebenso die Intervalle I_z und I_b . Also sind x und a adjazent und auch z und b . Da z nun links von x im PES liegt und x und b in der Nachbarschaft hat, sind auch x und b adjazent. Da jetzt aber a und b rechts von x liegen und beide mit x verbunden sind, müssen diese wegen der PES-Eigenschaft auch über eine Kante verbunden sein, im Widerspruch zur Annahme an a und b . Also liegt auch in diesem Fall z rechts von x .

Fall C ist nun der letzte Fall wo eine Vertauschung nicht möglich ist. Sei a dann der Knoten zwischen x und y , der mit y verbunden ist, aber nicht mit x . Wir sehen sofort, dass das Intervall I_a komplett rechts von I_x liegen muss. Folglich liegt es weiter rechts als I_y und da es I_y schneidet, muss es dann auch I_z schneiden. Folglich sind x und a in der Nachbarschaft von z und da diese nicht adjazent sind, muss z in dem PES wieder rechts von x liegen.

Mit diesen Beobachtungen haben wir nachgewiesen, dass A_2 ein Teilereignis von $x \prec z$ ist und damit folgt

$$\mathbb{P}(A_2) \leq \mathbb{P}(x \prec z) < \frac{1}{3}.$$

Insgesamt folgt dann aber $\mathbb{P}(x \prec y) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) < 2/3$ im Widerspruch zur Annahme und wir sind fertig. \square

Wir haben dieses Lemma für Einheits-Intervallgraphen formuliert, da wir es eben für diese Klasse von chordalen Graphen nutzen wollen. Das Lemma lässt sich aber sofort auf Intervallgraphen verallgemeinern, ohne dass sich am Beweis etwas ändert. Es gilt also sogar:

Korollar 9.2. *Sei G ein Intervallgraph mit Intervallrepräsentation I_G und angenommen G ist ein Gegenbeispiel. Sind x, y, z paarweise adjazent mit $a_x \leq a_y \leq a_z$ und $b_x \leq b_y \leq b_z$ in I_G , so gilt $y \ll x$ oder $y \ll z$.*

Mit dem Lemma können wir die $1/3$ - $2/3$ Vermutung bereits für einen großen Teil der Einheits-Intervallgraphen beweisen.

Theorem 9.2. *Sei G ein 2-zusammenhängender EIG. Dann ist \mathcal{A}_G balanciert.*

Beweis. Angenommen G ist ein Gegenbeispiel. Seien die Knoten von G so bezeichnet, dass $x_1 <^* x_2 <^* \dots <^* x_n$ für eine Intervallrepräsentation gilt. Da die Knoten x_1 und x_n simplizial sind, folgt mit obigem Korollar 9.1 $x_1 \ll x_2$ und $x_{n-1} \gg x_n$. Dann ist klar, dass es ein $i \in \{2, \dots, n-1\}$ gibt mit $x_{i-1} \ll x_i \gg x_{i+1}$. Da G 2-zusammenhängend ist, sind x_{i-1}, x_i, x_{i+1} paarweise adjazent, doch das ist nach Lemma 9.6 nicht möglich und wir haben einen Widerspruch. \square

Für den Fall, dass es trennende Knoten gibt, brauchen wir noch einige weitere Beobachtungen. Sei dazu G ein zusammenhängender EIG und I_G eine Intervallrepräsentation, die die lineare Ordnung $<^*$ induziert. Die n Knoten von G seien so bezeichnet, dass $x_1 <^* x_2 <^* \dots <^* x_n$ gilt. Wir nehmen jetzt außerdem an, dass G ein Gegenbeispiel zur $1/3$ - $2/3$ Vermutung ist.

Lemma 9.7. *Gilt $x_{i-1} \gg x_i \ll x_{i+1}$, so ist x_i ein simplizialer Knoten.*

Beweis. Angenommen x_i ist nicht simplizial. Sei dann k minimal und l maximal gewählt, so dass x_k und x_l adjazent zu x_i sind. Dann ist x_k also der linkeste und x_l der rechteste Nachbar von x_i in I_G und folglich sind x_k und x_l nicht adjazent. Es gilt dann $x_i \ll x_{i+1} \ll \dots \ll x_l$, denn andernfalls gäbe es ein $s \in \{i+1, \dots, l-1\}$ mit $x_{s-1} \ll x_s \gg x_{s+1}$, was nach Lemma 9.6 nicht möglich ist. Insbesondere haben wir damit $x_i \ll x_l$ gezeigt. Analog bekommen wir auch $x_i \ll x_k$, das heißt $x_k, x_l \in N^+(x_i)$ und deshalb sind x_k und x_l wegen Lemma 9.3 adjazent, im Widerspruch zur Annahme. \square

Lemma 9.8. *Sei k maximal gewählt mit der Eigenschaft $x_1 \ll \dots \ll x_k$ und sei y ein beliebiger Knoten aus $V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$. Dann ist die Teilmenge der Elemente von $\{x_1, \dots, x_k\}$, die in einem PES L links von y stehen immer von der Art $\{x_1, \dots, x_l\}$ für ein $l \leq k$. Weiterhin gilt $x_1 <_L x_2 <_L \dots <_L x_l$.*

Beweis. Nach Wahl von k gilt $x_{k-1} \ll x_k \gg x_{k+1}$ und mit Lemma 9.6 folgt, dass x_{k-1} und x_{k+1} nicht adjazent sind. Damit gilt insbesondere, dass x_k ein trennender Knoten ist. Entfernen wir x_k von G , so bekommen wir genau zwei Zusammenhangskomponenten. Sei hier G_1 der Teilgraph von G , der durch die Knotenmenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ induziert wird. Wollen wir nun, wie in einem PES angegeben, die simplizialen Knoten abpflücken, so ist am Anfang x_1 der einzige simpliziale Knoten in G_1 . Denn hätten wir ein simpliziales x_i mit $i > 1$, so wäre nach Korollar 9.1 $x_{i-1} \gg x_i$, im Widerspruch zur Annahme. In I_G liegt x_1 ganz links und wir wollen jetzt zeigen, dass solange y nicht entfernt wurde, nur der Knoten aus dem aktuellen G_1 simplizial ist, der zum linkensten Intervall in I_G gehört. Damit folgt auch unmittelbar die Behauptung.

Angenommen also y wurde noch nicht entfernt und es gibt abgesehen vom linkensten Knoten x_r in I_G noch einen weiteren simplizialen Knoten x_s im aktuellen G_1 . Dieser weitere Knoten kann nicht x_k sein, denn andernfalls würden wir durch das Abpflücken von x_k einen unzusammenhängenden Restgraphen von G bekommen (x_r und y in verschiedenen Komponenten). Das ist aber auch in allgemeinen chordalen Graphen nicht möglich, da wir immer simpliziale Knoten abpflücken und folglich der Zusammenhang erhalten bleibt.

Wir betrachten nun den Zeitpunkt in einem PES, wo wir zum ersten Mal zwei simpliziale Knoten x_r und x_s in G_1 erhalten. Sei $r < s$ und somit $x_r \ll x_s$. Unmittelbar davor wurde Knoten x_{r-1} entfernt, dessen Intervall ganz links war. Da x_r und x_s vorher nicht simplizial waren, müssen beide adjazent zu x_{r-1} sein und da beide in I_G weiter rechts als x_{r-1} liegen, sind sie insbesondere adjazent zueinander. Da beide nun simplizial sind, heißt das aber, dass sie momentan die gleiche abgeschlossene Nachbarschaft besitzen. Alle Nachbarn von x_s , die bereits entfernt wurden, müssen nach Wahl des Zeitpunkts und wegen $x_s \neq x_k$ in I_G weiter links als x_s liegen. Die zugehörigen Intervalle schneiden dann notwendigerweise das Intervall I_{x_r} in I_G . Somit bekommen wir $N[x_s] \subseteq N[x_r]$ und mit Lemma 9.1 folgt $x_s \ll x_r$, im Widerspruch zu $x_r \ll x_s$. \square

Wir wollen uns auch im folgenden auf die Anfangssequenz $x_1 \ll \dots \ll x_k$ konzentrieren. Wir werden als nächstes zeigen, dass es im Gegenbeispiel G keinen simplizialen Knoten y geben kann mit $x_1 \ll y \ll x_k$. Dies wird die essentielle Beobachtung sein, mit der wir dann am Ende zeigen können, dass \mathcal{A}_G für alle EIG G balanciert ist. Für den Beweis des folgenden Lemmas benutzen wir dabei eine Technik, die schon Linial (Weite-2 Ordnungen) und Eppstein verwendet haben. Genauer gesagt finden wir so etwas wie eine modifizierte Leiter. Seien im folgenden alle Bezeichnungen wieder wie oben.

Lemma 9.9. *Sei $y \in V(G) \setminus V(G_1)$ ein simplizialer Knoten. Dann gilt $y \ll x_1$ oder $x_k \ll y$.*

Beweis. Angenommen wir haben $x_1 \ll y \ll x_k$. Wir definieren dann

$$\begin{aligned} q_k &= \mathbb{P}(x_k \prec y) \\ q_i &= \mathbb{P}(x_i \prec y \prec x_{i+1}) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, k-1\} \\ q_0 &= \mathbb{P}(y \prec x_1). \end{aligned}$$

Mit Lemma 9.8 bekommen wir sofort $\sum_{i=0}^k q_i = 1$ und wir wollen nun zeigen, dass alle q_i kleiner als $1/3$ sind. Mit unserer Annahme bekommen wir sofort $q_0 < 1/3$ und $q_k < 1/3$. Sei nun L ein PES, das zum Ereignis $x_i \prec y \prec x_{i+1}$ für ein $i \in \{1, \dots, k-1\}$ gehört. Dann ist (wieder nach Lemma 9.8) x_i der Knoten aus $V(G_1)$, der in L links von y am dichtesten zu y positioniert ist. Alle Knoten, die in L zwischen x_i und y stehen, sind nicht adjazent zu x_i . Da außerdem y simplizial ist, können x_i und y in L vertauscht werden und wir bekommen ein PES aus dem Ereignis $x_{i-1} \prec y \prec x_i$, falls $i > 1$, beziehungsweise aus $y \prec x_1$, falls $i = 1$. Da die Vertauschung eine injektive Abbildung beschreibt, folgt

$$q_{k-1} \leq q_{k-2} \leq \dots \leq q_0 < \frac{1}{3}.$$

Da sich die Summe der q_i zu 1 aufsummiert, existiert ein maximales r mit $\sum_{i=0}^{r-1} q_i < 1/3$. Da $q_r < 1/3$ ist, folgt

$$\frac{1}{3} \leq \sum_{i=0}^r q_i < \frac{2}{3}.$$

Nun gilt aber $\sum_{i=0}^r q_i = \mathbb{P}(y \prec x_{r+1})$ und somit ist (x_{r+1}, y) ein balanciertes Paar, im Widerspruch dazu, dass G ein Gegenbeispiel ist. □

Mit dieser Vorarbeit sind wir in der Lage das Hauptresultat dieser Masterarbeit zu beweisen.

Theorem 9.3. *Ist G ein EIG, so ist \mathcal{A}_G balanciert.*

Beweis. Zunächst können wir annehmen, dass G ein zusammenhängender EIG ist. Denn die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(x \prec y)$ für zwei Knoten x, y aus einer Zusammenhangskomponente ändert sich nicht, wenn wir die PES auf diese Zusammenhangskomponente einschränken. Ein balanciertes Paar dieser Komponente ist somit auch ein balanciertes Paar für den ganzen Graphen.

Angenommen \mathcal{A}_G ist nicht balanciert. Seien die n Knoten von G wieder wie bisher im Abschnitt so bezeichnet, dass $x_1 <^* \dots <^* x_n$ in einer Intervallrepräsentation I_G gilt. Wähle nun k maximal und l minimal mit der Eigenschaft

$$x_1 \ll \dots \ll x_k \quad \text{und} \quad x_l \gg \dots \gg x_n.$$

Mit Lemma 9.6 folgt, dass x_k und x_l trennende Knoten sein müssen. Ist $x_k = x_l$ so können wir aufgrund der Symmetrie von x_1 und x_n annehmen, dass $x_1 \ll x_n$ gilt. Da zusätzlich $x_n \ll x_l = x_k$ und x_n simplizial ist, widerspricht dies Lemma 9.9.

Sei also $x_k \neq x_l$. Wir betrachten nun einen induzierten Pfad $(y_0, y_1, \dots, y_{t+1})$, der die Knoten $x_k = y_0$ und $x_l = y_{t+1}$ verbindet. Da G zusammenhängend ist, existiert so ein Pfad. Es kann nicht sein, dass $x_k \gg y_1$ und $y_t \ll x_l$ gilt, denn dann muss es auch ein $i \in \{1, \dots, t\}$ geben mit $y_{i-1} \gg y_i \ll y_{i+1}$, was auf einem induzierten Pfad nicht möglich ist (siehe Lemma 9.3). Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_k \ll y_1$.

Behauptung. *Der Knoten x_k hat einen simplizialen Knoten aus $V(G) \setminus V(G_1)$ in seiner Nachbarschaft.*

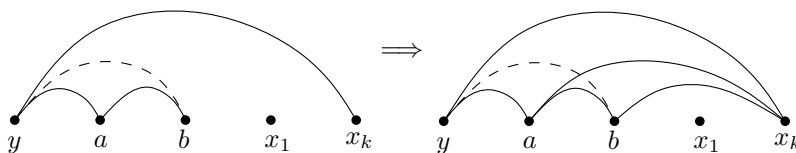
Beweis. Wir haben $x_k \gg x_{k+1}$ und $x_k \ll y_1$. Folglich ist $x_{k+1} \neq y_1$ und y_1 liegt in I_G weiter rechts als x_{k+1} . Sei $s > 1$ so gewählt, dass $x_{k+s} = y_1$ ist. Gilt nun für alle $i = 1, \dots, s-1$ die Relation $x_{k+i} \gg x_{k+i+1}$, so hätten wir aufgrund der Transitivität von \gg auch $x_k \gg y_1$, was nicht der Fall ist. Somit existiert ein kleinstes $j \in \{1, \dots, s-1\}$ mit

$$x_{k+j-1} \gg x_{k+j} \ll x_{k+j+1}.$$

Der Knoten x_{k+j} ist nach Lemma 9.7 ein simplizialer Knoten. Außerdem liegt dieser in der Nachbarschaft von x_k , da $x_k <^* x_{k+j} <^* y_1$ und $\{x_k, y_1\} \in E(G)$ gilt. \square

Sei im folgenden y dieser simpliziale Knoten in der Nachbarschaft von x_k . Mit Korollar 9.1 bekommen wir $y \ll x_k$. Nach Lemma 9.9 folgt dann aber $y \ll x_1$. Sei nun A das Ereignis $y \prec x_1$, das wir in zwei Teilereignisse A_1 und A_2 zerlegen. Dabei liegt ein PES L in A_1 , wenn eine Vertauschung von y und x_1 möglich ist und ein weiteres PES produziert. Da dies eine injektive Abbildung in das Ereignis $x_1 \prec y$ beschreibt, gilt $\mathbb{P}(A_1) < 1/3$.

In A_2 liegen somit alle PES L , in denen eine Vertauschung nicht möglich ist. Wir unterscheiden wieder die anfangs beschriebenen Fälle A, B und C. Da x_1 simplizial ist, können die Fälle B und C erst gar nicht auftreten. Bleibt Fall A mit entsprechenden Knoten a und b . Wir zeigen nun, dass x_k in L links von x_1 liegen muss. Angenommen das ist nicht der Fall, dann haben wir eine Situation wie auf der linken Seite im folgenden Bild.



Da die beiden Nachbarn a und x_k von y in L rechts von y liegen, sind diese beiden adjazent. Doch dann sind auch b und y als Nachbarn von a adjazent, da sich beide rechts von a befinden. Somit sind die nicht-adjazenten Knoten y und b in der Nachbarschaft des trennenden Knoten x_k . Anhand der Darstellung I_G sehen wir sofort, dass wenn wir x_k aus G entfernen, die Knoten y und b in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen würden, doch das widerspricht der Tatsache, dass beide Knoten noch mit a verbunden sind.

Damit ist also gezeigt, dass sich in L der Knoten x_k links von x_1 befinden muss und folglich ist das Ereignis A_2 eine Teilmenge vom Ereignis $x_k \prec x_1$. Also gilt auch hier $\mathbb{P}(A_2) \leq \mathbb{P}(x_k \prec x_1) < 1/3$ und wir bekommen den Widerspruch

$$\frac{2}{3} < \mathbb{P}(y \prec x_1) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) < \frac{2}{3}.$$

Damit folgt, dass \mathcal{A}_G balanciert ist. \square

Bei vielen Überlegungen haben wir ausgenutzt, dass der PES-Antimatroid über einen Einheits-Intervallgraphen definiert ist und nicht nur über einen Intervallgraphen. Wir sehen noch nicht, wie man die hier gezeigten Ideen vollständig auf diesen Fall erweitern kann. Wir gehen weiterhin davon aus, dass PES-Antimatroide stärker als nur $1/3$ -balanciert sind. So sieht man leicht, dass alle PES-Antimatroide mit weniger als 6 Elementen in der Grundmenge perfekt balanciert sind. Anfangs schien es sogar, dass es immer zwei balancierte simpliziale Knoten gibt. Ein von uns gefundenes Beispiel mit genau zwei simplizialen Knoten widerlegte jedoch diese Vermutung.

Eppstein hat mit seiner Verallgemeinerung also viele neue Fragen aufgeworfen und wir hoffen, dass die $1/3$ - $2/3$ Vermutung dadurch wieder für viele Leute attraktiv geworden ist.

10 Schluss

Wir haben uns in dieser Masterarbeit umfangreich mit der $1/3$ - $2/3$ Vermutung beschäftigt und die bisherigen Erkenntnisse zu diesem Thema zusammengetragen. Dabei hat sich gezeigt, wie spannend balancierte Paare weiterhin sind. Viele interessante Fragen sind erst durch dieses Problem in den Fokus gerückt. Da ist zum Beispiel die Logkonkavität von Höhensequenzen zu nennen. Ein kombinatorischer Beweis dafür könnte viel zum Verständnis der hier behandelten Strukturen beitragen. Dies gilt aber nicht nur für dieses Problem, denn bislang fehlt auch ein rein kombinatorischer Beweis für die schwächere Variante der Vermutung. Weiterhin ist hier die *Cross Product Conjecture* zu erwähnen, die für sich allein schon eine interessante Vermutung ist.

Mit der Verallgemeinerung von Eppstein wurde nun frischer Wind in das Thema gebracht. Antimatroide können bei verschiedensten mathematischen Objekten vorkommen, wie zum Beispiel bei chordalen Graphen oder Punktfolgen in der Ebene. Diese auf die Existenz von balancierten Paaren zu untersuchen kann, wie wir gesehen haben, sehr aufschlussreich sein. Wir hoffen, dass es in nächster Zeit weitere Veröffentlichungen zu diesem Thema geben wird.

Ob die $1/3$ - $2/3$ Vermutung nun für Antimatroide zutrifft, können wir noch nicht wirklich einschätzen. Zugegebenermaßen fehlt uns hier tiefergehendes Verständnis in diese Strukturen. Im Fall von Partialordnungen denken wir aber, dass die $1/3$ - $2/3$ Vermutung richtig ist. Wichtigstes Indiz dafür ist die Tatsache, dass die einzigen bisher gefundenen Beispiele mit Balance $1/3$ eine Weite von 2 haben. Es sieht ganz danach aus, dass Ordnungen mit größerer Weite balancierter sind, auch wenn für gerade diese ein Beweis noch aussteht.

Man kann also auch nach mehreren Jahrzehnten Forschung zu diesem Thema weiterhin gespannt auf neue Resultate sein.

Literatur

- [1] R. Ahlswede und D.E. Daykin. An inequality for the weights of two families of sets, their unions and intersections. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 43:183–185, 1978.
- [2] C. Biró und W. T. Trotter. A combinatorial approach to height sequences in finite partially ordered sets. *Discrete Mathematics*, 311:563–569, 2011.
- [3] G. R. Brightwell. Linear extensions of infinite posets. *Discrete Mathematics*, 70:113–136, 1988.
- [4] G. R. Brightwell. Semiorders and the $1/3$ - $2/3$ conjecture. *Order*, 5:369–380, 1989.
- [5] G. R. Brightwell, S. Felsner und W. T. Trotter. Balancing pairs and the cross product conjecture. *Order*, 12:327–349, 1995.
- [6] H. Busemann. *Convex Surfaces*. Interscience, 1958.
- [7] J. Cardinal, S. Fiorini, G. Joret, R. M. Jungers und J. I. Munro. An efficient algorithm for partial order production. *SIAM J. Comput.*, 39:2927–2940, 2010.
- [8] J. Cardinal, S. Fiorini, G. Joret, R. M. Jungers und J. I. Munro. Sorting under partial information (without the ellipsoid algorithm). Online-Version: <http://arxiv.org/abs/0911.0086>, 2013.
- [9] I. Csiszár, J. Körner, L. Lovász, K. Marton und G. Simonyi. Entropy splitting for antiblocking corners and perfect graphs. *Combinatorica*, 10:27–40, 1990.
- [10] R. P. Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics*, 51:161–166, 1950.
- [11] D. Eppstein. Antimatroids and balanced pairs. Erscheint in *Order*, 2013. Online-Version: <http://link.springer.com/article/10.1007>
- [12] S. Felsner und W. T. Trotter. Balancing pairs in partially ordered sets. *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty*, 1:145–157, 1993.
- [13] P. C. Fishburn. On the family of linear extensions of a partial order. *J. Comb. Theory (B)*, 17:240–243, 1974.
- [14] P.C. Fishburn. A correlation inequality for linear extensions of a poset. *Order*, 1:127–137, 1984.
- [15] P. C. Fishburn, W. G. Gehrlein und W. T. Trotter. Balance theorems for height-2 posets. *Order*, 9:43–53, 1992.
- [16] M. L. Fredman. How good is the information theory bound in sorting? *Theoretical Computer Science*, 1:355–361, 1976.
- [17] B. Ganter, G. Häfner und W. Poguntke. On linear extensions of ordered sets with a symmetry. *Discrete Mathematics*, 63:153–156, 1987.

- [18] F. Gavril. The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *Journal of Combinatorial Theory (B)*, 16:47–56, 1974.
- [19] R. L. Graham, M. Grötschel und L. Lovász. *Handbook of Combinatorics*. MIT Press, 1995.
- [20] J. Kahn und J. H. Kim. Entropy and sorting. *J. Comput. Syst. Sci.*, 51(3):390–399, 1995.
- [21] J. Kahn und M. Saks. Balancing poset extensions. *Order*, 1:113–126, 1984.
- [22] J. Kahn und N. Linial. Balancing extensions via brunn-minkowski. *Combinatorica*, 11:363–368, 1991.
- [23] S. S. Kislitsyn. A finite partially ordered set and its corresponding set of permutations (russian). *Mat. Zametki*, 4:511–518, 1968.
- [24] J. Körner. Coding of an information source having ambiguous alphabet and the entropy of graphs. Trans. 6th Prague Conf. information Th. etc., 1973.
- [25] N. Linial. The informatic-theoretic bound is good for merging. *SIAM Journal of Computing*, 13:795–801, 1984.
- [26] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Springer, 2002.
- [27] I. Rival. A fixed point theorem for finite partially ordered sets. *Journal of Combinatorial Theory*, 21:309–318, 1976.
- [28] M. Saks. Balancing linear extensions of ordered sets. *Order*, 2:327–330, 1985.
- [29] R. P. Stanley. Two poset polytopes. *Discrete & Comput. Geometry*, 1:9–23, 1986.
- [30] I. Zaguia. The $\frac{1}{3}$ - $\frac{2}{3}$ conjecture for N-free ordered sets. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19:1–5, 2012.