Orientierungshilfe zum 9. Hausaufgabenblatt

26. Januar 2013

Aufgabe 50

Wir schauen uns zunächst die Sicht von Herrn A an. Wir betrachten dazu nun folgende Ereignisse.
A='Herr A hat eine Bombe bei sich' und
B='Jemand anderes außer Herr A hat eine Bombe an Bord'.
Wir wählen Ereignis B so, weil für Herrn A nur relevant ist, ob jemand anderes außer ihm selbst eine Bombe dabei hat. Wir wissen, dass $P(B) = \frac{1}{1000}$ beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, dass Herr A eine Bombe bei sich hat, ist aber $P(A) = 1$, da er auf jeden Fall eine mitnimmt.
Wir stellen uns nun die Frage, wie wahrscheinlich es ist, dass eine Bombe an Bord ist unter der Bedingung, dass Herr A eine bei sich hat, also $P(B|A)$. Wir wissen, dass gilt

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Die stochastische Unabhängigkeit kommt hier zum tragen, so dass

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) = \frac{1}{1000}.$$

Aus Sicht von Herrn A ändert sich also nichts an der Wahrscheinlichkeit, dass jemand eine Bombe an Bord hat, obwohl auch er eine hat.
Wie sieht nun die Sicht des Piloten aus? Wie betrachten die folgenden Ereignisse.
A='Herr A hat eine Bombe an Bord' und
C='Jemand hat eine Bombe an Bord'.
Das Ereignis C unterscheidet sich vom Ereignis B! Warum? Für den Piloten ist es irrelevant, wer nun die Bombe genau bei sich hat. Wir betrachten wieder die Wahrscheinlichkeit, dass jemand eine Bombe bei sich hat unter der Bedingung, dass Herr A im Flugzeug sitzt. Hier nun betrachten wir $A \cap B$ etwas genauer. Wenn Herr A an Bord ist, hat er auf

jeden Fall eine Bombe bei sich, also ist auch jemand mit einer Bombe an Bord, sodass $P(A \cap B) = P(A)$. Oben haben wir schon festgestellt, dass $P(A) = 1$. Somit gilt

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Aus Sicht des Pilot gilt also, sobald Herr A an Bord ist, ist zu 100% jemand mit einer Bombe an Bord.

Aufgabe 52

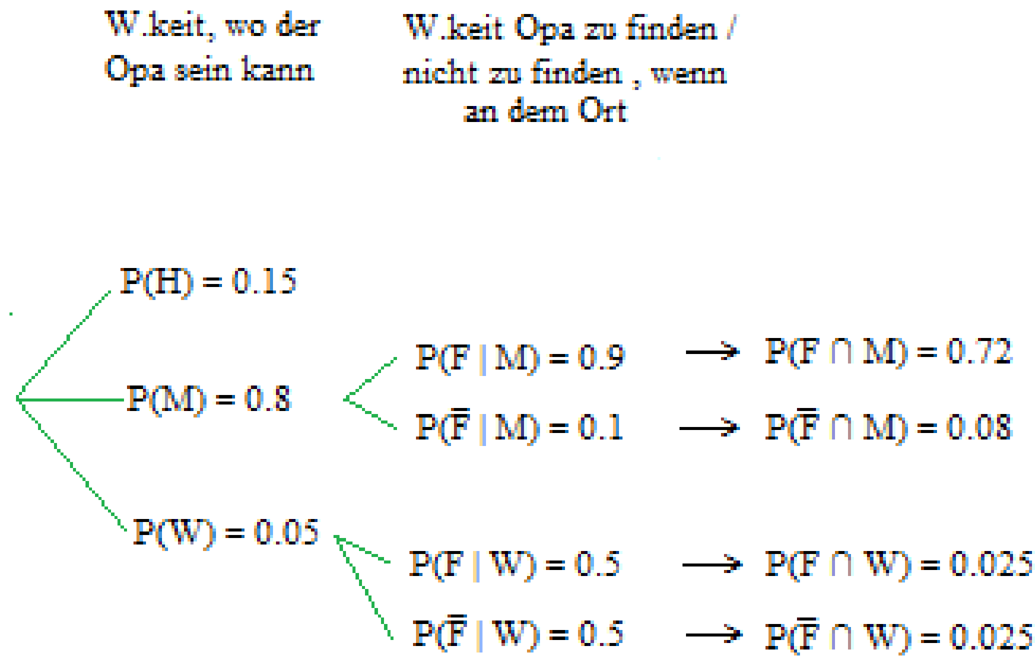

Abbildung 1: Skizze eines Baumdiagramms zur Veranschaulichung

Für diese Aufgabenstellung kann man sich auch hier wieder ein nettes Baumdiagramm zu hilfe nehmen.
a)
Wir wollen wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass Anja den Opa findet. Da sie zum Picknick-Platz geschickt wurde, suchen wir also $P(F \cap M)$. Dies ist gerade $P(F \cap M) = P(M) \cdot P(F|M) = 0.72$. Anja findet den Opa also mit einer Wahrcheinlichkeit von 72%.
b)

Wir wollen nun wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass einer der Kinder den Opa findet, also $P((F \cap W) \cup (F \cap M))$. Da es sich hierbei um disjunkte Ereignisse handelt, gilt $P((F \cap W) \cup (F \cap M)) = P(F \cap W) + P(F \cap M) = 0.8 \cdot 0.9 + 0.05 \cdot 0.5 = 0.745$.
c)
Wir suchen nun die Wahrscheinlichkeit, dass der Opa zu Hause anzutreffen ist, wenn weder Anja noch Dirk den Opa gefunden haben, $P(H|\bar{F})$. Hierfür betrachten wir zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass weder Dirk noch Anja ihn finden, also $1 - P((F \cap W) \cup (F \cap M))$. Dies ist gerade $0.255 = P(\bar{F})$. Nach dem Satz von Bayes können wir immer schreiben

$$P(H|\bar{F}) = \frac{P(H \cap \bar{F})}{P(\bar{F})}.$$

Da wir $P(H \cap \bar{F})$ nicht kennen, wenden wir den Satz von Bayes ein zweites mal an, um aus dem Zusammenhang

$$P(\bar{F}|H) = \frac{P(H \cap \bar{F})}{P(H)}$$

die Gleichung $P(H \cap \bar{F}) = P(\bar{F}|H)P(H)$ zu erhalten. Hierbei bezeichnet $P(F\bar{|}H)$ die Wahrscheinlichkeit, dass keines der beiden Kinder den Opa findet unter der Bedingung, dass der Opa zu Hause ist. Es gilt $P(\bar{F}|H) = 1$, da der Opa nie im Wald oder auf dem Picknick-Platz gefunden werden kann, wenn er zuhause ist. Daher gilt $P(H \cap \bar{F}) = P(H)$. Durch einsetzen oben erhalten wir

$$P(H|\bar{F}) = \frac{P(H)}{P(\bar{F})} = \frac{0,15}{0,255} = \frac{10}{17} = 0.58824\ldots.$$

Der Opa wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von 58,8% zu Hause gefunden, falls Anja und Dirk ihn nicht finden.