

Orientierungshilfe zum 8. Hausaufgabenblatt

25. Januar 2013

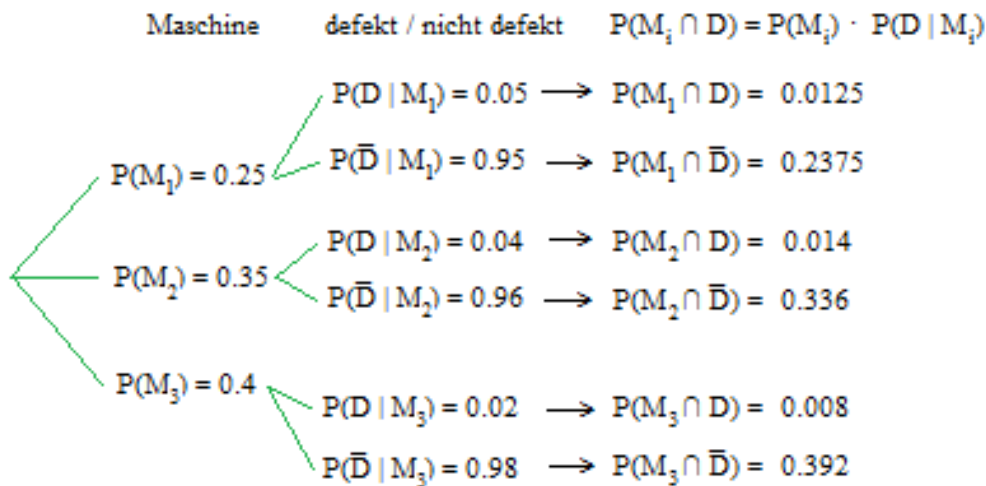


Abbildung 1: Skizze eines Baumdiagramms zur Veranschaulichung

Aufgabe 44

Zunächst ist es von Vorteil sich die Problemstellung anhand eines Baumdiagramms zu veranschaulichen.

a)

Die Wahrscheinlichkeit $P(D)$, dass eine zufällig verkaufte Glühbirne defekt ist, kann man sich durch die Zerlegung

$$P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) + P(M_3 \cap D)$$

verdeutlichen. An dieser Stelle benutzt man die totale Wahrscheinlichkeit! Anhand des Baumdiagramms wird dann klar, dass

$$P(D) = 0.0125 + 0.014 + 0.008 = 0,0345.$$

Somit liegt die Wahrscheinlichkeit zufällig eine defekte Glühbirne zu ziehen bei 3,45%.

b)

Man stelle $P(M_1|D)$ anhand der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit dar und setze die Werte ein

$$P(M_1|D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.0125}{0.0345} = 0.36232.$$

Aufgabe 46

Man mache sich für diese Aufgabe zunächst klar, welche Parameter alle gegeben sind. Die Aussage 'im Falle einer Erkrankung mit dem Virus fällt der Test positiv aus' wird zu $P(T^+|K) = 0.96$. 'Bei gesunden Menschen zeigt der Test ein negatives Ergebnis' wird zu $P(T^-|K^C) = 0.94$. Zusätzlich haben wir noch die allgemeine Ansteckungsgefahr $P(K) = \frac{1}{145}$. Man mache sich klar, dass

$$\begin{aligned}P(T^+|K) = 0.96 &\Rightarrow P(T^-|K) = 0.04 \\P(T^-|K^C) = 0.94 &\Rightarrow P(T^+|K^C) = 0.06 \\P(K) = \frac{1}{145} &\Rightarrow P(K^C) = \frac{144}{145}\end{aligned}$$

gilt.

a)

Für die Lösung der Aufgabe wird der Satz von Bayes benötigt. Wir werden ihn hier aber nicht einfach anwenden, sondern uns nocheinmal herleiten, wie wir darauf kommen können. Wir sollen hier nun zunächst die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass der Premierminister 'krank ist unter der Bedingung, dass der Test positiv ist' also $P(K|T^+)$. Die Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit sagt uns nun, dass gilt

$$P(K|T^+) = \frac{P(K \cap T^+)}{P(T^+)}.$$

Da uns $P(T^+)$ aber nicht bekannt ist, müssen wir uns diese nun anders herleiten.

$$P(T^+) = P(K \cap T^+) + P(K^C \cap T^+).$$

Auch hier wissen wir zunächst nicht, was die jeweiligen Schnittmengen sind, aber wir wissen, wie man bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnet, also

$$\begin{aligned}P(T^+|K) &= \frac{P(K \cap T^+)}{P(K)} \Leftrightarrow P(T^+|K)P(K) = P(K \cap T^+) \\P(T^+|K^C) &= \frac{P(K^C \cap T^+)}{P(K^C)} \Leftrightarrow P(T^+|K^C)P(K^C) = P(K^C \cap T^+).\end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten sind uns nun bekannt und wir können alles ineinander einsetzen; zunächst machen wir das nocheinmal allgemein, da dann klar wird, dass es sich dabei um den Satz von Bayes handelt.

$$\begin{aligned}P(K|T^+) &= \frac{P(T^+ \cap K)}{P(T^+)} \\&= \frac{P(T^+|K)P(K)}{P(T^+)} \\&= \frac{P(T^+|K)P(K)}{P(K \cap T^+) + P(K^C \cap T^+)} \\&= \frac{P(T^+|K)P(K)}{P(T^+|K)P(K) + P(T^+|K^C)P(K^C)}.\end{aligned}$$

Die bekannten Werte eingesetzt, errechnen wir

$$\begin{aligned}P(K|T^+) &= \frac{0.96 \cdot \frac{1}{145}}{0.96 \cdot \frac{1}{145} + 0.06 \cdot \frac{144}{145}} \\ &= 0.1\end{aligned}$$

also nur 10% für die Wahrscheinlichkeit, dass der Premierminister auch wirklich krank ist unter der Bedingung, dass der Test positiv ausgefallen ist.

b)

Da wir uns in Aufgabenteil a) bereits die entscheidenden Schritte gezeigt haben, können wir nun hier gleich die Brechstange, in unserem Fall den Satz von Bayes, ansetzen. Gesucht ist hier die Wahrscheinlichkeit, dass der Vizepremierminister mit Virus infiziert ist unter der Bedingung, dass der Test negativ ausgefallen ist also $P(K|T^-)$.

$$\begin{aligned}P(K|T^-) &= \frac{P(T^-|K)P(K)}{P(T^-|K)P(K) + P(T^-|K^c)P(K^c)} \\ &= \frac{0.04 \cdot \frac{1}{145}}{0.04 \cdot \frac{1}{145} + 0.94 \cdot \frac{144}{145}} \\ &= 0.000295.\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Vizepremierminister krank ist unter der Bedingung, dass der Test negativ ausfällt, beträgt also 0.03%.

Aufgabe 48

In dieser Aufgabe spielt die Unabhängigkeit von Ereignissen eine zentrale Rolle. Wir erinnern uns daran, dass zwei Ereignisse A, B unabhängig sind, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Unabhängigkeit in diesem Fall heißt, dass das Erscheinen des einen Professors keinen Einfluss auf das Erscheinen eines anderen Professors hat.

a)

Das Ereignis E , dass alle Professoren kommen, ist darstellbar durch $E = A \cap B \cap C$, so dass für die Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned}P(E) &= P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\ &= 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.9 = 0.432.\end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit für drei Ereignisse ergibt sich analog zu der Unabhängigkeit von zwei Ereignissen. Alle drei Professoren erscheinen also mit einer Wahrscheinlichkeit von 43,2%.

b)

Das Ereignis F , dass keiner der Professoren erscheint, kann durch $F = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

dargestellt werden, so dass unter Verwendung des Tipps für stochastische Unabhängigkeit von Gegenereignissen gilt

$$\begin{aligned} P(F) &= P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) \\ &= 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.1 = 0.008. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Professoren erscheint, liegt also bei gerade mal 0.8%.

c)

Für das Ereignis G , dass mindestens zwei der Professoren erscheinen, muss beachtet werden, dass es auch möglich ist, dass alle drei Professoren kommen. Schaut man sich das Ereignis an, dass mindestens Professor A und Professor B erscheint also $A \cap B$, so beinhaltet dieses auch die Möglichkeit, dass Professor C dabei sein könnte (oder auch nicht). Dies gilt nun für jede Kombination und muss bedacht werden. Folglich haben wir dann

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2 \cdot P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.8 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.9 - 2 \cdot 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.9 = 0.876. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der Professoren erscheinen, liegt bei 87.6%. Auf die gleiche Erkenntnis kommt man übrigens auch, wenn man sich folgendes überlegt:

1. 'Prof. A und Prof. B kommen, Prof. C aber nicht' entspricht $(A \cap B \cap \bar{C})$.
2. 'Prof. A und Prof. C kommen, Prof. B aber nicht' entspricht $(A \cap C \cap \bar{B})$.
3. 'Prof. B und Prof. C kommen, Prof. A aber nicht' entspricht $(B \cap C \cap \bar{A})$.
4. 'Prof. A, Prof. B und Prof. C kommen' entspricht $(A \cap B \cap C)$.

Also

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap C \cap \bar{B}) + P(B \cap C \cap \bar{A}) + P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A \cap B) \cdot (1 - P(C)) + P(A \cap C) \cdot (1 - P(B)) + \\ &\quad P(B \cap C) \cdot (1 - P(A)) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2 \cdot P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

und man erhält das gleiche Ergebnis wie oben.