Vorlesung vom 31.10.2012:

- Zahldarstellungen in Stellenwertsystemen zur Basis $b \geq 2$
- Rechnen im „Computersystem", d.h. für die Basis $b = 2$ (Dualsystem bzw. Binärsystem)
- Einstieg in die Kommadarstellung rationaler Zahlen

wir verstehen darunter Brüche/Quotienten als Verhältniszahlen von natürlichen bzw. ganzen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

„mit der Eigenschaft ..."

Zahlbereiche, die „vor" $\mathbb{Q}$ schon da sind:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

natürliche Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

$= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

1) Zahldarstellungen im Binär-, Oktal- und Hexadezimalsystem

$b = 2 = 2^1$ $\quad b = 8 = 2^3$ $\quad b = 16 = 2^4$

z.B. Aufgabe 2 Ü(a)

$$x = 333 = (333)_{10} = (\ldots)_2$$

Idee der Wandlung: Fortgesetzte Division mit Rest = „Rückwärtshornern":

Algorithmus!

x	DIV 2	MOD 2
333	166	1
166	83	0
83	41	1
41	20	1
20	10	0
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Denn: $333 = 2 \cdot \underbrace{166}_{x \text{ DIV } 2} + \underbrace{1}_{x \text{ MOD } 2}$ ← Rest

Hornerprobe:

	1	0	1	0	0	1	1	0	1
b: ·2	0	2	4	10	20	40	82	166	332
+	1	2	5	10	20	41	83	166	333

Abbruchkriterium!

$$\Rightarrow x = 333 = (101.001.101)_2$$

Zur Blockbildung:

$$x = (101.001.101)_2 = \underbrace{1\cdot 2^8 + 0\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6}_{} + \underbrace{0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3}_{} + \underbrace{1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0}_{}$$

Positionen: 8 7 6 5 4 3 2 1 0

$$= (1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 2^6 + (0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 2^3 + (1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 2^0$$

$$= (101)_2 \cdot 2^6 + (001)_2 \cdot 2^3 + (101)_2 \cdot 2^0$$

$$= (101)_2 \cdot 8^2 + (001)_2 \cdot 8^1 + (101)_2 \cdot 8^0$$

$$2^6 = (2^3)^2 = 8^2 \qquad 2^3 \qquad 2^0 = 1$$

$$= 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = (515)_8$$

Also: ③ 1 ② 4 ① 13

$$\boxed{x = (\underbrace{101}_{5}.\underbrace{001}_{1}.\underbrace{101}_{5})_2 = (515)_8 = (14\overset{13}{D})_{16}}$$

$b = 16 = 2^4$: 4er-Blöcke ! Zurückrechnung:

8 4 2 1

$$(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 1 = 13 \quad ①$$

$$(0100)_2 = 4 \quad ② \qquad (0001)_2 = 1 \quad ③$$

2) Das Rechnen im Binärsystem oder „Was treibt der Computer so?"

Zwei zentrale Rechenoperationen: Addition / Multiplikation

Im Dezimalsystem: a) Addition schriftlich:

$$\begin{array}{r} 372 \\ 812 \\ 628 \\ {\scriptstyle 1\,1\,1\;} \\ \hline 1812 \end{array}$$

Im Binärsystem brauchen wir das „kleine Einspluseins":

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$(10)_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$

Zahlentabelle im Binärsystem:

$(0)_2 = (0)_{10} = 0$

$(1)_2 = (1)_{10} = 1$

$\boxed{(10)_2 = (2)_{10} = 2}$

$(11)_2 = (3)_{10} = 3$

$(100)_2 = (4)_{10} = 4$

$(101)_2 = (5)_{10} = 5$

$(110)_2 = (6)_{10} = 6$

$(111)_2 = (7)_{10} = 7$

$(1000)_2 = (8)_{10} = 8$

Jetzt Aufgabe 3 Ü(a):

$a = 321$, $b = 169$, $c = 123$.

Gefragt: Addition $a+b+c$ im Binärsystem!

1. Schritt: Wandle a, b, c ins Binärsystem („computerverdauliche" Darstellung)

1. Schritt: Wandlung

$a = 321$

X	DIV 2	MOD 2
321	160	1
160	80	0
80	40	0
40	20	0
20	10	0
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1

$a = (101.000.001)_2$

$c = 123$

X	DIV 2	MOD 2
123	61	1
61	30	1
30	15	0
15	7	1
7	3	1
3	1	1
1	0	1

$c = (1.111.011)_2$

$b = 169$

X	DIV 2	MOD 2
169	84	1
84	42	0
42	21	0
21	10	1
10	5	0
5	2	1
2	1	0
1	0	1

$b = (10.101.001)_2$

$a + b + c = (\dots)_2$?

2. Schritt: Addition

$$
\begin{array}{rrl}
 & 101.000.001 & a \\
+ & 10.101.001 & b \\
+ & 1.111.011 & c \\
 & {\scriptstyle 111\ 11\ \ 11} & \\
\hline
 & 1.001.100.101 &
\end{array}
$$

$3 = (11)_2 = (1)_2 + (1)_2 + (1)_2$

Endergebnis: $x = a+b+c = (\underbrace{1}_{1}.\underbrace{001}_{1}.\underbrace{100}_{4}.\underbrace{101}_{5})_2$

$= (1.145)_8 \overset{?}{=} (613)_{10} = 613$ ✓

Hornerschema:

	1	1	4	5
·8	0	8	72	608
+	1	9	76	613

b) Multiplikation schriftlich !!

→ Wichtig ist hier das „kleine Einmaleins":

·	0	1
0	0	0
1	0	1

!!

Im Dezimalsystem:

$73 \cdot 137 = 137 \cdot 73$

$$
\begin{array}{rrl}
 & 411 & = 137 \cdot 3 \\
+ & 9590 & = 137 \cdot 7 \\
 & {\scriptstyle 11} & \\
\hline
 & 10.001 & \text{Ergebnis!}
\end{array}
$$

Also: $73 \cdot 137 = 10.001 = (10.001)_{10}$

Das Ganze jetzt im „Binärsystem"!

(4) Ü (a) $a = 75$, $b = 99$. Im Dezimalsystem: $a \cdot b = 75 \cdot 99$

$= 75 \cdot (100 - 1)$

$= 7500 - 75 = 7.425$

1. Schritt: Wandlung in „computerverträgliche" Darstellung

a	DIV2	MOD2
75	37	1
37	18	1
18	9	0
9	4	1
4	2	0
2	1	0
1	0	1

b	DIV2	MOD2
99	49	1
49	24	1
24	12	0
12	6	0
6	3	0
3	1	1
1	0	1

$$\boxed{a = (1.001.011)_2 \quad , \quad b = (1.100.011)_2}$$

2. Schritt: Rechnen „as the computer does it":

$$x = a \cdot b = (\overbrace{1.001.011}^{a})_2 \cdot (1.100.011)_2$$

```
         1001011      ← a
        10010110      ← a um eine Position nach
     100101100000     ← a   links „geshiftet"
    1001011000000     ← a
      11 1 0 1 1 1 1 1
    ------------------
⊕:  (1.110.100.000.001)_2
```

$1+1+1+1 = (100)_2 = (4)_{10}$

Also: $x = a \cdot b = (\underbrace{1}_{1}.\underbrace{110}_{6}.\underbrace{100}_{4}.\underbrace{000}_{0}.\underbrace{001}_{1})_2 = (16.401)_8$

Probe:

Horner:

	1	6	4	0	1
·8	0	8	112	928	7424
+	1	14	116	928	7425

$7425 \overset{?}{=} 75 \cdot 99$ ($a \cdot b$) ✓ Stimmt jedenfalls...

3) Rationale Zahlen und Kommadarstellung:

Im Dezimalsystem:

$$x = 2{,}159 = 2\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} + 9\cdot 10^{-3}$$

$10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{100}$, $10^{-3} = \frac{1}{1.000}$

Phänomen: Kommaverschiebung!!

$$\hat{=} \frac{2.159}{1.000} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{9}{1.000}$$

$$x = 2{,}159 = \frac{\boxed{2{,}159\cdot 10^3}}{10^3} = \frac{2.159}{10^3}$$

$$\frac{2\cdot 1000 + 1\cdot 100 + 5\cdot 10 + 9}{1.000} = \frac{(2159)_{10}}{10^3}$$

Aufgabe 5 Ü(a) Positionen!

$$x = (0{,}2121)_3 = 2\cdot 3^{-1} + 1\cdot 3^{-2} + 2\cdot 3^{-3} + 1\cdot 3^{-4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{81}$$

$3^{-1} = \frac{1}{3^1}$, $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$, $3^{-3} = \frac{1}{3^3}$, $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$; $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$

$$= \frac{2\cdot 27 + 1\cdot 9 + 2\cdot 3 + 1\cdot 1}{81} = \frac{54 + 9 + 6 + 1}{81} = \frac{70}{81}$$

Alternativ: Kommaverschiebung

4 Stellen!

$$x = (0{,}2121)_3 = \frac{(0{,}2121)_3 \cdot 3^4}{3^4} = \frac{(2121)_3}{3^4} \overset{(*)}{=} \frac{70}{81}$$

Basis $b = 3$

$(3^2)^2 = 9^2$

(*) Horner:

	2	1	2	1
b $\cdot 3$	0	6	21	69
$+$	2	7	23	70

Aufgabe 6: Das ist Aufgabe 5 „rückwärts"!

6 Ü(a) $x = \frac{25}{81}$. Gesucht: Darstellung $x = (0{,}\ldots)_3$

22

Verfahren (i):

$$x = \frac{25}{81} = \frac{25}{3^4} = 25\cdot 3^{-4} \overset{(*)}{=} (221)_3 \cdot 3^{-4} = (0{,}0221)_3$$

$b = 3$

+4

(*) Rückwärtshornen:

a	DIV 3	MOD 3
25	8	1
8	2	2
2	0	2

$8 = 2\cdot 3 + 2$

$$a = 25 = (25)_{10} = (221)_3$$

„Rechts"-Shiften um 4 Positionen = 4 Nachkommastellen!

Das Verfahren (ii) wird im Tutorium gezeigt.
Damit sind als Hausaufgaben zur nächsten Woche alle H-Teile der Aufgaben 3 bis 6 zu bearbeiten!

ENDE der Vorlesung!