Vorlesung vom 30.01.2013:

Die quadratische Gleichung!

Es geht um die Lösung der Gleichung

$$(*) \quad \boxed{ax^2+bx+c=0} \quad \text{für Koeffizienten } a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$$

Herleitung der Lösungsformel von (*):

Hilfsmittel: Quadratische Ergänzung!!

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \underset{a\neq 0}{\Longrightarrow} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\underset{-c/a}{\Longrightarrow} \underbrace{x^2+\frac{b}{a}x}_{\text{quad. Erg.}} = -\frac{c}{a} \underset{+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{\Longrightarrow} \underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Das ist die quadratische Ergänzung!

$$\Longrightarrow \boxed{\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{Quadrat!!}} = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}}\ , \quad \Delta := b^2-4ac \ \text{„Diskriminante"} \ \text{(griech. „Delta")}$$

Zwischenergebnis!

Quadrat!! Wir haben jetzt so etwas wie $u^2=\frac{\Delta}{4a^2}$

Falls $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, dann kann man ($\geq 0$) die Wurzel daraus ziehen.

Also:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \overset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow} x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Big\}\ \sqrt{4a^2}=2|a|=\pm\underbrace{2a}_{>0}$$

$$\underset{-\frac{b}{2a}}{\Longrightarrow} \boxed{x_{1/2} = -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}} = \boxed{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{mit } \Delta=b^2-4ac\geq 0$$

abc-Formel oder „Mitternachtsformel"

Was hat das mit der p-q-Formel zu tun?

Wir hatten:

$$x^2+\underbrace{\frac{b}{a}}_{p}x+\underbrace{\frac{c}{a}}_{q}=0 \Longrightarrow x^2+px+q=0 \qquad \boxed{p:=\frac{b}{a},\ q:=\frac{c}{a}}$$

Dann erhält man als Lösungsformel:

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}} = -\frac{1}{2}\underbrace{\frac{b}{a}}_{p}\pm\sqrt{\underbrace{\frac{b^2}{4a^2}}_{=\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{\cancel{4a}c}{4a^{\cancel{2}}}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

Also: $\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$ pq-Formel! $\qquad \boxed{= -\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$

## Aufgabe 49:

Achtung: Für $\Delta = b^2-4ac<0$ haben wir bisher keine Lösung. Die existiert ja in $\mathbb{R}$ auch nicht, da immer $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ und daher $\frac{\Delta}{4a^2}<0$ zum Widerspruch in der Gleichung $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ führt.

Ü(a) $\underbrace{55}_{a}x^2\underbrace{-13}_{b}x\underbrace{-14}_{c}=0 \Rightarrow a=55,\ b=-13,\ c=-14$ Koeffizienten der quadratischen Gleichung bzw. des quadratischen Polynoms $p(x)=ax^2+bx+c$

Diskriminante:

$$\Delta = b^2-4ac = (-13)^2-4\cdot 55\cdot(-14) = 169+220\cdot 14 = 169+3.080 = 3.249 > 0$$

Fazit: Es gibt 2 verschiedene reelle Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+13\pm\sqrt{3.249}}{2\cdot 55} = \frac{13\pm 57}{110} \Rightarrow x_1 = \frac{13+57}{110} = \frac{\cancel{70}^{7}}{\cancel{110}_{11}} = \frac{7}{11}\in\mathbb{Q},$$

$$x_2 = \frac{13-57}{110} = -\frac{\cancel{44}^{4}}{\cancel{110}_{10}} = -\frac{2}{5}\in\mathbb{Q}$$

Probe von Vieta:

Ausgehend von der Lösungsformel $x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ gilt:

(1) $x_1+x_2 = \underbrace{\frac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}}_{=x_1} + \underbrace{\frac{-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}}_{=x_2} = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = -\frac{b}{a}$

Hier: $x_1+x_2 = \frac{7}{11}+(-)\frac{2}{5} = \frac{35-22}{55} = \frac{13}{55} \overset{!}{=} -\frac{b}{a} = \frac{+13}{55}$ ✓ (7·5, 2·11)

(2) $x_1\cdot x_2 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{2a\cdot 2a} \overset{\text{3. Binom}}{=} \frac{(-b)^2-\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \overset{\Delta=b^2-4ac}{=}$

$$= \frac{\cancel{b^2}-(\cancel{b^2}-4ac)}{4a^2} = \frac{+\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}} = \frac{c}{a}$$

Hier: $x_1\cdot x_2 = \frac{7}{11}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{-14}{55} \overset{!}{=} \frac{c}{a} = \frac{-14}{55}$ ✓

Damit folgt:

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ x_1+x_2 = -\frac{b}{a}\\ (2)\ x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}\end{array}}$$

Probe von Vieta

$$\Rightarrow ax^2+bx+c = a\left(x^2+\underbrace{\frac{b}{a}}_{(1)}x+\underbrace{\frac{c}{a}}_{(2)}\right) = a\left(x^2-\underbrace{(x_1+x_2)}_{=-b/a}x+\underbrace{x_1\cdot x_2}_{=c/a}\right)$$

$$= a\left(\underbrace{x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2}_{=(x-x_1)(x-x_2)}\right) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Faktorisierte Darstellung des quadratischen Polynoms $p(x)=ax^2+bx+c$ !!

**Beachte:** Man hat die Darstellung für das quadratische Polynom in folgender Form:

$$\boxed{p(x)=ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)(x-x_2)} \quad \text{mit} \quad \boxed{x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\,, \quad \Delta=b^2-4ac}$$

Zerlegung in Linearfaktoren     Nullstellen

$$=a\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}+c-\frac{b^2}{4a}$$

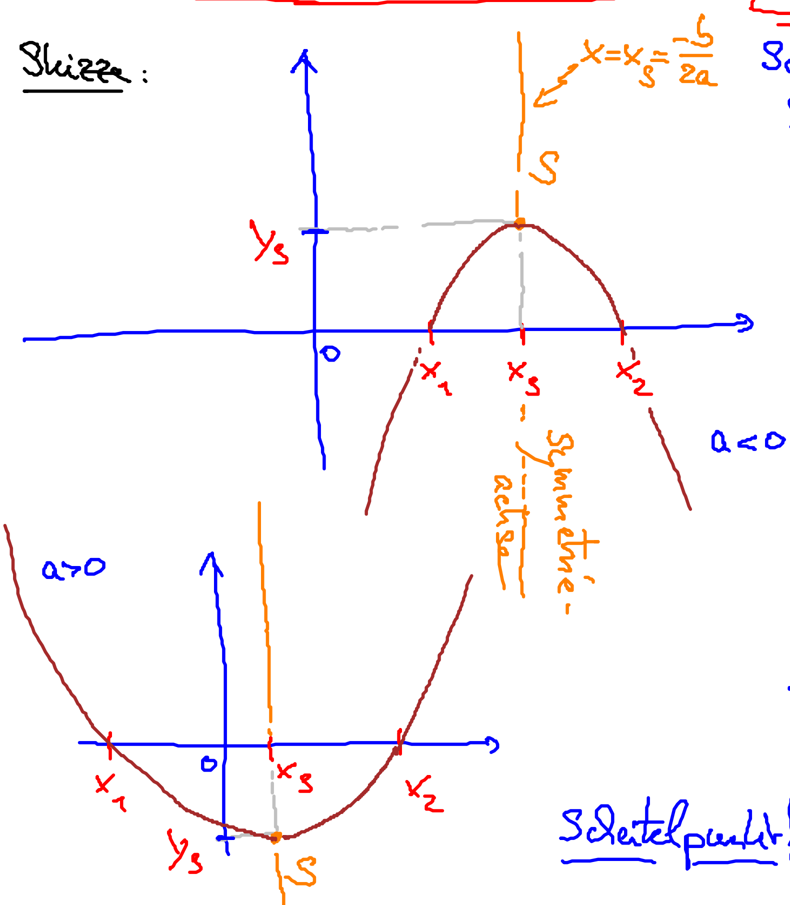
quadr. Erg.

$$\Rightarrow \quad \boxed{p(x)=a(x-x_S)^2+y_S} \quad \text{mit} \quad \boxed{x_S=-\frac{b}{2a}\,, \quad y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-\Delta}{4a}}$$

Scheitelpunktkoordinaten der Parabel

$S=(x_S,y_S)$ ← Scheitelpunkt!!

**Skizze:**




$$!!\ x_{1/2}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=x_S\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\ !!$$

Zerlegung in Linearfaktoren in unserem Beispiel:

$$p(x)=55x^2-13x-14$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{7}{11}\,, \quad x_2=-\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow p(x)=a\,(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$
$$=55\cdot\left(x-\frac{7}{11}\right)\cdot\left(x+\frac{2}{5}\right)$$

**Scheitelpunktformel:** (mit quad. Erg.)

$$\boxed{p(x)=55x^2-13x-14}=55\underbrace{\left(x^2-\frac{13}{55}x\right)}_{\text{quad. Erg.}}-14$$

$$=55\Big[\underbrace{\left(x-\frac{13}{110}\right)^2-\left(\frac{13}{110}\right)^2}_{=x^2-\frac{13}{55}x}\Big]-14=55\cdot\left(x-\frac{13}{110}\right)^2-\cancel{55}^{\,1}\cdot\frac{13^2}{\cancel{110}_{\,2}\cdot 110}-14$$

$$= 55\left(x-\frac{13}{110}\right)^2 - \frac{169}{220} - \frac{14\cdot 220}{220} = 55\left(x-\frac{13}{110}\right)^2 - \frac{3249}{220}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = a(x-x_S)^2 + y_S} \text{ mit } a = 55,\ x_S = \frac{13}{110},\ y_S = -\frac{3249}{220}$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{13}{110}, -\frac{3249}{220}\right) \text{ ist Scheitelpunkt.}$$

Mit Formel für $x_S, y_S$:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-13)}{2\cdot 55} = \frac{13}{110},\quad y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-3249}{4\cdot 55} = -\frac{3249}{220}$$

Bleibt der Fall, dass $\Delta < 0$ keine reelle Lösung für die Gleichung $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ liefert.

Beispiel:

(49) Ü(e) $2x^2+x+3=0 \Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=3$

Diskriminante: $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\cdot 2\cdot 3 = 1-24 = -23 < 0$

$\Rightarrow$ Es gibt keine reellen Lösungen!

Mathematiker wollen dennoch gerne Lösungen der Gleichung haben. Was tun? Man führe neue Zahlen ein, eigentlich nur eine einzige neue Zahl: $i$ ← „imaginäre Einheit"

Das „$i$" hat folgende definierende Eigenschaft: $\boxed{i^2=-1} \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$

Bezeichnung stammt von Euler!!

Anders ausgedrückt: $\pm i$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\boxed{x^2+1=0} \Leftrightarrow x^2=-1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\underbrace{\sqrt{-1}}_{=i}$$

Dann erhalten wir in unserem Beispiel:

$$x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{-23}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm\sqrt{23\cdot\underbrace{(-1)}_{i^2}}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{23 i^2}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{4}$$

$$\boxed{x_1 = -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{23}}{4}i,\quad x_2 = -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{23}}{4}i}$$

komplexe (= zusammengesetzte) Lösungen

Probe von Vieta funktioniert auch hier:

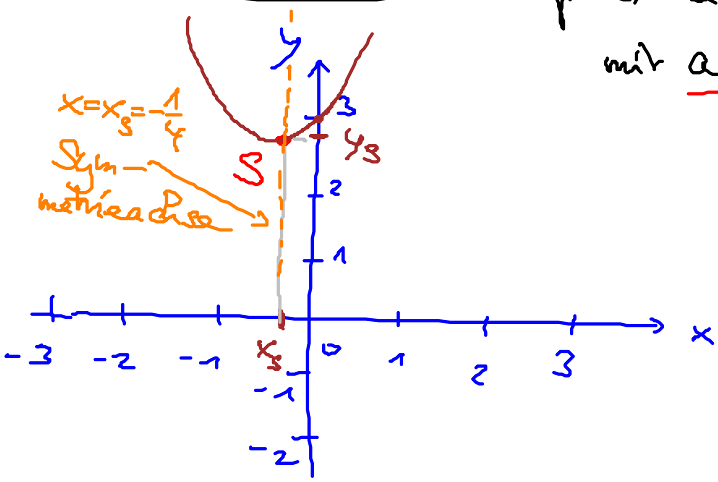
(1) $x_1+x_2=\left(-\frac{1}{4}+\cancel{\frac{\sqrt{23}}{4}i}\right)+\left(-\frac{1}{4}-\cancel{\frac{\sqrt{23}}{4}i}\right)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\overset{!}{=}\frac{-b}{a}=\frac{-1}{2}$

(2) $x_1\cdot x_2=\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{23}}{4}i\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{23}}{4}i\right)\underset{\text{3. Binom}}{=}\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{23}}{4}i\right)^2=\frac{1}{16}-\frac{\sqrt{23}^2}{16}i^2$, $\quad i^2=-1$

$=\frac{1}{16}+\frac{23}{16}=\frac{\cancel{24}^{3}}{\cancel{16}_{2}}=\frac{3}{2}\overset{!}{=}\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$

Scheitelpunktform:

$p(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_s)+y_s$




mit $a=2$, $x_s=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2\cdot 2}=-\frac{1}{4}$, $y_s=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(-23)}{8}$

$-0{,}25$ $\quad\Rightarrow y_s=+\frac{23}{8}=2{,}875$

$\Rightarrow \boxed{S=(x_s,y_s)=\left(-\frac{1}{4},\frac{23}{8}\right)}$ Scheitelpunkt

$a=2>0$

$p(0)=c=3$

Hausaufgaben: Nur bis H56, H57 nein!!

Achtung: 53 ist H-Aufgabe, 54 ist Ü-Aufgabe!!

~~H52~~ nein!!

Fazit: H-Teile in 49, 50, dann H53 und H56!!

ENDE der Vorlesung!