Vorlesung vom 28.11.2012:

- Noch ein Beispiel zur Polynomdivision
- Potenzgesetze
- Wurzeln → „Radizieren" als Umkehroperation zum Potenzieren || Radix (lat.) = Wurzel

  ↳ Erweiterung der Potenzen auf rationale Exponenten

1) Beispiel zur Polynomdivision:

(17) Ü(e) vom 5. Blatt:

Division mit Rest à la $21:4=5\ R\ 1 \iff 21 = 5\cdot 4 + \underset{\text{Rest}}{1}$

$$\begin{array}{l}
(2x^2-x+xy-y^2+2y-2):(2x-y+1) = x-1+y+\dfrac{-1}{2x-y+1}\\
-\ (2x^2+x-xy)\\
\hline
\quad 0-2x+2xy-y^2+2y-2\\
-\ (-2x \qquad\qquad +y-1)\\
\hline
\qquad\quad 2xy-y^2+y-1\\
\qquad -\ (2xy-y^2+y)\\
\hline
\qquad\qquad\qquad -1
\end{array}$$

Rest!

NR-Ecke:

$\frac{2x^2}{2x}=x$ $\quad \frac{-2x}{2x}=-1$

$\frac{2xy}{2x}=y$

$$\frac{2x^2-x+xy-y^2+2y-2}{2x-y+1}$$

Also ergibt sich:

$$\boxed{(2x^2-x+xy-y^2+2y-2):(\underbrace{2x-y+1}_{\text{Divisor}}) = x+y-1-\frac{1}{2x-y+1}}$$

Oder:

$$\boxed{2x^2-x+xy-y^2+2y-2 = (x+y-1)\cdot(2x-y+1)\ \underset{\text{Rest!}}{-1}}$$

2) Potenzen und Potenzgesetze:

Ist $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, so erhalten wir für die Potenz $\underset{\text{Basis}}{a}^{\overset{\text{Exponent}}{n}}$ mit $n\in\mathbb{Z}$ folgende Regeln:

(1) $\boxed{a^n\cdot a^m = a^{n+m}}$, $\boxed{\dfrac{a^n}{a^m} = a^n\cdot a^{-m} = a^{n-m}}$ // Achtung: $n-m\in\mathbb{Z}$ kann negativ sein!

$= \underbrace{\underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{-mal}}\cdot\underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{m\text{-mal}}}_{(n+m)\text{-mal}}$

Fall: Gleiche Basis, verschiedene Exponenten

(2) $\boxed{a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n}$, $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$ $(b \neq 0)$

$= \underbrace{(a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{-mal}}\cdot\underbrace{(b\cdot\ldots\cdot b)}_{n\text{-mal}} = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\text{-mal}}$

Fall: Verschiedene Basen, gleiche Exponenten

(3) $\boxed{(a^n)^m = a^{n\cdot m} = a^{m\cdot n} = (a^m)^n}$

Fall: „Doppel-"Potenz"!

$\underbrace{a^n\cdot a^n\cdot\ldots\cdot a^n}_{m\text{-mal}} \overset{(1)}{=} a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m\text{-mal}}} = a^{n\cdot m} = a^{m\cdot n}$

Beispiel:

(18) Ü(a)

$$\frac{(6ab)^3\cdot(5a^2b)^4}{2^4\cdot 3ab^2\cdot(25a\sqrt{b})^2} \overset{(2)}{=} \frac{6^3\cdot a^3 b^3\cdot 5^4\cdot (a^2)^4 b^4}{2^4\cdot 3ab^2\cdot 25^2\cdot a^2(\sqrt{b})^2} \overset{(3)}{=} \frac{6^3\cdot a^3\cdot b^3\cdot 5^4\cdot a^8\cdot b^4}{2^4\cdot 3\cdot ab^2\cdot 25^2\cdot a^2\cdot b}$$

$2\cdot 4 = 8$

$$\overset{(1)}{=} \frac{(2\cdot 3)^3\cdot 5^4\cdot a^{11}\cdot b^7}{2^4\cdot 3\cdot (5^2)^2\cdot a^3\cdot b^3} \overset{(2),(3)}{=} \frac{2^3\cdot 3^3\cdot \cancel{5^4}\cdot a^{11}\cdot b^7}{2^4\cdot 3\cdot \cancel{5^4}\cdot a^3\cdot b^3} \overset{(1)}{=} 2^{-1}\cdot 3^2\cdot a^8\cdot b^4$$

$3-4=-1$ $\quad$ 9 $\quad$ $11-3=8$

$= \frac{9}{2}a^8 b^4$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

Noch 'n „Gedicht":

(18) Ü(e)

$$\frac{a^{-2}\cdot x^{-4}\cdot y^{-6}}{b^3\cdot c^{-4}\cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3}\cdot b^{-5}\cdot x^{-3}}{c^{-5}\cdot y^6\cdot z^{-7}} = \frac{\frac{a^{-2}\cdot x^{-4}\cdot y^{-6}}{b^3\cdot c^{-4}\cdot z^{-5}}}{\frac{a^{-3}\cdot b^{-5}\cdot x^{-3}}{c^{-5}\cdot y^6\cdot z^{-7}}} = \frac{a^{-2}\cdot x^{-4}\cdot y^{-6}}{b^3\cdot c^{-4}\cdot z^{-5}}\cdot\frac{c^{-5}\cdot y^6\cdot z^{-7}}{a^{-3}\cdot b^{-5}\cdot x^{-3}}\cdot b^0$$

Division!

$y^{(-6)+6} = y^0 = 1$

$b^{3+(-5)} = b^{-2}$

$$\overset{(1)}{=} a^{(-2)-(-3)}\cdot b^{0-(-2)}\cdot c^{(-5)-(-4)}\cdot x^{(-4)-(-3)}\cdot z^{(-7)-(-5)}$$

$$= a^1 \cdot b^2 \cdot c^{-1} \cdot x^{-1} \cdot z^{-2} = \boxed{\frac{ab}{cxz^2}}$$

Alternativ:

$$= \frac{a^{-2}\cdot x^{-4}\cdot y^{-6}}{b^{3}\cdot c^{-4}\cdot z^{-5}} \cdot \frac{c^{-5}\cdot y^{6}\cdot z^{-7}}{a^{-3}\cdot b^{-5}\cdot x^{-3}} = \frac{a^{-2}\cdot x^{-4}\cdot y^{-6+6}\cdot c^{-5}\cdot z^{-7}}{a^{-3}\cdot b^{3-5}\cdot c^{-4}\cdot x^{-3}\cdot z^{-5}} = \frac{a^{-2}\cdot c^{-5}\cdot x^{-4}\cdot z^{-7}}{a^{-3}\cdot b^{-2}\cdot c^{-4}\cdot x^{-3}\cdot z^{-5}}$$

$= y^0 = 1$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{a^3\cdot b^2\cdot c^4\cdot x^3\cdot z^5}{a^2\cdot c^5\cdot x^4\cdot z^7} = a^1\cdot b^2\cdot c^{-1}\cdot x^{-1}\cdot z^{-2}$$

a^{3-2}, c^{4-5}, x^{3-4}, z^{5-7}

$$= \frac{a\cdot b^2}{c\cdot x\cdot z^2} \overset{(2)}{=} \left(\frac{a}{c}\right)^1\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{b}{z}\right)^2$$

---

3) Das Radizieren (= „Wurzeln"):

Radizieren ist eine „Umkehrung" des Potenzierens:

Man kann zeigen (bzw. „definieren"), dass die Gleichung

Potenzen-„Gleichung":

$$\boxed{x^n = a}$$ für gegebenes $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

genau eine positive Lösung $x > 0$ in $\mathbb{R}$ besitzt.

Bemerkung: Das gilt in $\mathbb{Q}$ nicht unbedingt, denn z.B. ist die reelle Lösung $x = \sqrt{2}$ zu $x^2 = 2$ nicht rational, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Wir schreiben für diese Lösung: $\boxed{x = \sqrt[n]{a}}$ ← „n-te Wurzel"!!

a heißt hier der Radikand.

Das Wurzelzeichen „$\sqrt{}$" taucht etwa im 14./15. Jh. erstmals auf.

Es gilt also:

"adizieren"

$$\boxed{x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x^n = a}$$

„Basis" der Potenz gesucht!!

„ist äquivalent zu"

z.B.: $x = \sqrt{9} = 3$, weil $x^2 = 3^2 = 9$ || $x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, weil

$\boxed{x = \sqrt[5]{32} = 2}$, weil $x = 2$ wegen $2^5 = 32$ Lösung der Gleichung $\boxed{x^5 = 32}$ ist!!

$x^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \underset{(2)}{=} \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Konvention: Im Fall $n=2$ lässt man die „2" auch weg, d.h.:

$$\boxed{\sqrt[2]{} =: \sqrt{}}$$

ist als Quadratwurzel die am häufigsten auftretende Wurzel.

Um z.B. die negative Lösung zu $x^2 = 9$ zu beschreiben, verwendet man explizit

$$\boxed{x = -3 = -\sqrt{9}}$$

, also „−" als Vorzeichen vor der Wurzel!!

Dazu (13) „$U(a)$"

$$\frac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}} - 3r\cdot\sqrt{4r^2-2rH}$$

$$= \frac{r(4r^2-3rH) - 3r\left(\sqrt{4r^2-2rH}\right)^2}{\sqrt{4r^2-2rH}}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$= \frac{r(4r^2-3rH) - 3r\cdot(4r^2-2rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}} = \frac{4r^3 - 3r^2H - 12r^3 + 6r^2H}{\sqrt{4r^2-2rH}}$$

$$= \frac{-8r^3+3r^2H}{\sqrt{}} = \frac{r^2(-8r+3H)}{\sqrt{2r(2r-H)}} = \frac{r^2\cdot(-8r+3H)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{r}\cdot\sqrt{2r-H}}$$

$= 2r(2r-H)$

Achtung, Vorsicht:

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$,

denn: $(\sqrt{a+b})^2 = a+b \neq$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2$

$= a + 2\sqrt{ab} + b$

Beachte: $\sqrt{}$ ist nur definiert für $4r^2 - 2rH > 0$

Frage: Lässt sich die Wurzel evtl. als eigene Potenz schreiben?

$$\sqrt[n]{a} \overset{?}{=} a^\alpha$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ geeignet? Wenn ja, dann gilt wegen der Potenzgesetze:

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (a^\alpha)^n \overset{(3)}{=} a^{\alpha \cdot n} \Leftrightarrow \boxed{a = a^{\alpha n}}$$

Eindeutigkeit von Potenzen!!

Exponentenvergleich bei gleicher Basis!

$$\Rightarrow 1 = \alpha \cdot n \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{n}}$$

Geht also!

Ich definiere nun sinnvoll: $\boxed{\sqrt[n]{a} =: a^{1/n}}$ bzw. $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{1/n} := \sqrt[n]{a^m}$

$= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{1/n}\right)^m$

„:" steht auf der Seite, welche neu definiert wird!

z.B.:

$a^{2/3} = \left(a^2\right)^{1/3} = \sqrt[3]{a^2} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$

Alle Potenzgesetze bleiben auch für rationale Exponenten erhalten!!

20 Ü(a) $\sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[4]{a^2 \cdot a^{2/3}} = \left(a^2 \cdot a^{2/3}\right)^{1/4} \overset{(1)}{=} \left(a^{2+\frac{2}{3}}\right)^{1/4} = \left(a^{8/3}\right)^{1/4} \overset{(3)}{=}$

$\sqrt[3]{} = (\;)^{1/3}$ $\qquad \sqrt[4]{} = (\;)^{1/4}$

$= a^{\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4}} = a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$

Würde so für die HA ausreichen!

Also zur nächsten Woche

H-Aufgaben in 18 bis 20!

ENDE der Vorlesung!