Vorlesung vom 23.01.2013 :

- LGS mit Parameter
- LGSe in Textaufgaben
- Die quadratische Gleichung

1) Ü46) In Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ untersuchen wir folgendes LGS auf Lösbarkeit:

$$\boxed{\begin{aligned} (1)\quad & x+y+z=3 \\ (2)\quad & 3x+5y+z=9 \\ (3)\quad & 2x+3y+z=\lambda^2-4\lambda+6 \\ (4)\quad & 5x+6y+\lambda z=15 \end{aligned}} \qquad (*)$$

Systemmatrix / erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A|\vec{b}) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & \lambda^2-4\lambda+6 \\ 5 & 6 & \lambda & 15 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \end{array} \xrightarrow[\text{IV}-5\cdot\text{I}]{\text{II}-3\cdot\text{I}}{}^{\text{III}-2\cdot\text{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda^2-4\lambda \\ 0 & 1 & \lambda-5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot\text{II}}$$

Zeile I: „Manipulationszeile"

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda^2-4\lambda \\ 0 & 1 & \lambda-5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{\text{III}-\text{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-4\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III} \Leftrightarrow \text{IV}}$$

Zeile II: neue „Manipulationszeile"

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-4) \end{array}\right] = (A'|\vec{b}')$$

Wichtig!!!

Ende des GA (= Gaußalgorithmus)

Jetzt folgende Fälle für λ:

Damit das LGS (*) überhaupt lösbar ist, muss gelten:

$$\underbrace{\lambda(\lambda-4)}_{\text{Produkt!}} \overset{!}{=} 0 \iff \lambda = 4 \text{ oder } \lambda = 0$$

Andersherum:

(i) $\lambda \neq 4$ und $\lambda \neq 0$: LGS ist unlösbar, da $\lambda(\lambda-4) \neq 0$ und somit Widerspruch in Zeile IV : $0 = \underbrace{\lambda(\lambda-4)}_{\neq 0}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,4\}} \implies$ LGS unlösbar !!

„ohne"

Jordanalgorithmus = Gauß „rückwärts"

(ii) $\lambda = 0$: $(A'|\vec{b}') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ II+III \\ I-III \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

einsetzen!!

Lösbarkeit!!

Zeile III: Manipul-Zeile

$$\xrightarrow{I-II} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} = (A''|\vec{b}'') \implies \boxed{x = 3,\ y = z = 0}$$

bzw. $\boxed{\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3}$

NZSF = normierte Zeilenstufenform

Lösungsvektor !!

„ist Teilmenge von"

Wir haben für $\lambda = 0$ eine eindeutige Lösung :

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 3,\ y = z = 0}$$

(iii) $\lambda = 4$: $(A'|\vec{b}') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{I-II} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \end{array} \implies \boxed{\begin{array}{rl} I & x + 2z = 3 \\ II & y - z = 0 \end{array}}$

einsetzen!

NZSF

$$\implies \boxed{\begin{array}{ll} x = 3 - 2z & (1) \\ y = z & (2) \end{array}}$$

Auf dem Weg zur Parameterdarstellung schreiben wir $\boxed{z = t}$ $(t \in \mathbb{R}$

x, y: „gebundene" Variablen in Abhängigkeit von z: „freie" Variable !

Dann erhalten wir unendlich viele Lösungen der Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} \begin{pmatrix} 3-2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \underset{\boxed{z=t}}{=} \begin{pmatrix} 3-2t \\ 0+t \\ 0+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

bzw. $\boxed{\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}}$

„mit der Eigenschaft"

Achtung: Hätte der Jordan-Gaußalgorithmus auf

$$(A''|\vec{b}'') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

„Null" Information!

geführt, dann wäre die einzige Gleichung gewesen:

$x + 2z = 3 \Rightarrow x = 3 - 2z$, y beliebig.

Also hätten wir dann 2 freie Variable gehabt, d.h. 2 Parameter.

z.B.: $\boxed{z = t, \; y = s}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}}$$

parametrisierte Darstellung der Lösungsmenge $\mathbb{L}$

Alternative zu (iii):

$\lambda = 4$: $(A'|\vec{b}') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot \mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lr} x + 2y = 3 & \mathrm{I} \\ -y + z = 0 & \mathrm{II} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ z = y \end{array}} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

x, z: gebunden

$\boxed{y = t}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

y: frei

2) Beispiel einer Textaufgabe, die – hoffentlich – auf ein LGS führt:

47 Ü(a) (i) „Mathematisierung" des Aussagen im Text:

Es geht um 2 „unbekannte" Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$

können auch a,b oder u,v heißen!!

Aussage: „Vergrößert man 'jede von beiden um 5, so ist die Differenz ihrer Quadrate um 100 größer als die Differenz der Quadrate der Ausgangszahlen, während ihr Produkt um 325 zunimmt. *)

„Textinterpretationsecke"

① Differenz der Quadrate: $\underline{\underline{z}} = x^2 - y^2$

② $(x+5)^2 - (y+5)^2 = z + 100$

$$\underbrace{(x+5)^2 - (y+5)^2}_{\text{„neue" Differenz}} = \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{„alte" Differenz}} + 100 \quad (I)$$

Vorsicht: Nicht Produkt der Quadrate, sondern der Zahlen selbst!!

$$(x+5) \cdot (y+5) = x \cdot y + 325 \quad (II)$$

*) „Besser", da eindeutiger:

„während das Produkt der neuen Zahlen gegenüber dem Produkt der Ausgangszahlen um 325 zunimmt."

Ergebnis: (*)

$$\boxed{\begin{aligned} (x+5)^2 - (y+5)^2 &= x^2 - y^2 + 100 \quad & \mathrm{I} \\ (x+5) \cdot (y+5) &= x \cdot y + 325 \quad & \mathrm{II} \end{aligned}}$$

„Mathematisierung abgeschlossen."

(ii) Überführung von (*) in ein LGS:

I $\quad (x+5)^2-(y+5)^2 = x^2-y^2+100 \quad \Big|-x^2+y^2$

$\Leftrightarrow (x+5)^2-(y+5)^2-x^2+y^2 = 100$

Binom(se)

$\Leftrightarrow x^2+10x+25-(y^2+10y+25)-x^2+y^2=100$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+10x+\cancel{25}-\cancel{y^2}-10y-\cancel{25}-\cancel{x^2}+\cancel{y^2}=100$

$\Leftrightarrow \boxed{10x-10y=100} \overset{}{\underset{:10}{\Leftrightarrow}} \boxed{x-y=10}$

II $\quad (x+5)(y+5)=xy+325 \quad \Big|-xy$

$\Leftrightarrow \cancel{xy}+5x+5y+25-\cancel{xy}=325$

$\underset{-25}{\Leftrightarrow} 5x+5y=300 \underset{:5}{\Leftrightarrow} \boxed{x+y=60}$

Wir erhalten als zu lösendes LGS: $\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & x-y=10 \\ \text{II} & x+y=60 \end{array}}$ (**)

(iii) Löse das LGS (**):

$$(A|\vec{b}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 60 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & 50 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot\text{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{I}+\text{II}}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} x & y \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 25 \end{array}\right] & \end{array} = (A'|\vec{b}')} \Rightarrow \boxed{x=35,\ y=25}$$

Antwort: Die gesuchten Zahlen lauten $x=35$ und $y=25$.

Probe: I $\quad (\underset{35}{x}+5)^2-(\underset{25}{y}+5)^2 = 40^2-30^2 = 1.600-900 = 700 \overset{?}{=}$

$x^2-y^2+100 = 35^2-25^2+100 = 1.225-625+100 = 600+100 = 700$ ✓

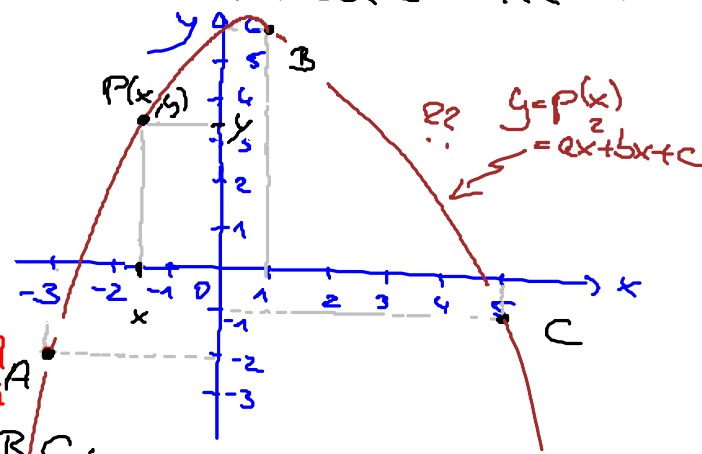
II $\quad (x+5)\cdot(y+5) = 40\cdot 30 = 1.200 \overset{?}{=}$

$x\cdot y+325 = 35\cdot 25+325 = 875+325 = 1.200$ ✓

$=(30+5)(30-5)=30^2-5^2$

3) Aufgabe 48 Ü(a):

Hintergrund: Eine quadratische Funktion (= Parabel) ist durch 3 Punkte eindeutig festgelegt.



Hier: $A(-3,-2)$; $B(1,6)$; $C(5,-1)$

Gesucht werden die Koeffizienten a,b,c für die „passende" Parabel $\boxed{y=p(x)=ax^2+bx+c}$

(i) Aufstellen der Gleichungen für A, B, C:

$$\text{A:}\quad p(-3)=a\cdot\underbrace{(-3)^2}_{=9}+b(-3)+c = 9a-3b+c \overset{!}{=} -2$$
$$\text{B:}\quad p(1)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c = a+b+c \overset{!}{=} 6$$
$$\text{C:}\quad p(5)=a\cdot\underbrace{5^2}_{25}+b\cdot 5+c = 25a+5b+c \overset{!}{=} -1$$

LGS in a,b,c!!

Tipp: Zur Bestimmung von a,b,c ist es hier günstig, die Reihenfolge der Variablen a,b,c „umzudrehen":

$$(A|\vec b)=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-3&9&-2\\1&1&1&6\\1&5&25&-1\end{array}\right]\\ \begin{array}{ccc}c&b&a\end{array}\end{array}\xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-3&9&-2\\0&4&-8&8\\0&8&16&1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{4}\text{II}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-3&9&-2\\0&1&-2&2\\0&8&16&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{III}-8\cdot\text{II}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-3&9&-2\\0&1&-2&2\\0&0&32&-15\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{32}\cdot\text{III}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-3&9&-2\\0&1&-2&2\\0&0&1&-15/32\end{array}\right]\xrightarrow{\text{I}+3\text{II}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&4\\0&1&-2&2\\0&0&1&-15/32\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{II}+2\text{III}]{\text{I}-3\text{III}}\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4-3\cdot(-15/32)\\0&1&0&2+2\cdot(-15/32)\\0&0&1&-15/32\end{array}\right]\\ \begin{array}{ccc}c&b&a\end{array}\end{array}$$

$$\Longrightarrow\quad a=-\frac{15}{32},\quad b=2-\frac{\cancel{30}^{15}}{\cancel{32}_{16}}=\frac{32-15}{16}=\frac{17}{16},$$
$$c=4+\frac{45}{32}=\frac{128+45}{32}=\frac{173}{32}$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{y=p(x)=ax^2+bx+c=-\frac{15}{32}x^2+\frac{17}{16}x+\frac{173}{32}}$$

$\boxed{\text{H-Aufgaben 47, 48}}$ zur kommenden Woche!!

ENDE der Vorlesung !