Vorlesung vom 19.12.2012 (die letzte vor Weihnachten):

- Halbwertszeit im Zusammenhang mit der Exponentialfkt.
- Winkelmessung in Grad- und Bogenmaß
- Trigonometrie in rechtwinkligen Dreiecken → allgemeine Dreiecke im nächsten Jahr

1) Zur Halbwertszeit:

Sei eine Formel der Form $\boxed{N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}}$ gegeben mit $\lambda>0$ ($\Rightarrow -\lambda<0$)

(exponentielle Abnahme!) spezifische Konstante

Dann fragt man (z.B. bei Untersuchungen zum radioaktiven Zerfall) gern nach der sogenannten Halbwertszeit $\tau>0$. ← griech. „tau"

Es gilt dann per definitionem:

$$\boxed{N(\tau)=N_0\cdot e^{-\lambda\tau}\overset{!}{=}\frac{N_0}{2}} \leftarrow \text{halber Ausgangswert!}$$

$$\overset{:N_0}{\Longrightarrow} e^{-\lambda\tau}=\frac{1}{2} \Longrightarrow e^{-\lambda\tau}=\frac{1}{e^{\lambda\tau}}=\frac{1}{2} \overset{\cdot 2e^{\lambda\tau}}{\Longrightarrow} e^{\lambda\tau}=2 \overset{\ln()}{\Longrightarrow}$$

$$\ln(e^{\lambda\tau})=\lambda\tau\cdot\underbrace{\ln(e)}_{=1}=\lambda\tau=\ln 2 \overset{:\lambda}{\Longrightarrow} \boxed{\tau=\frac{\ln 2}{\lambda}}$$ HWZ (=Halbwertszeit)

Bemerkung: Die Halbwertszeit ist auch die Zeitdifferenz in welcher sich jeder beliebige Wert $N(t)$ halbiert:

Sei $t_0>0$ ein beliebiger Zeitpunkt und $\boxed{t_1=t_0+\tau}$.

Dann gilt in Bezug auf $N(t_0)$ und $N(t_1)$:

$t_0 \quad t_1=t_0+\tau$, 0, t, τ

$$N(t_1)=N_0\cdot e^{-\lambda t_1}=N_0\cdot e^{-\lambda(t_0+\tau)}=N_0\cdot e^{-\lambda t_0-\lambda\tau}=N_0\cdot\frac{e^{-\lambda t_0}}{e^{+\lambda\tau}}$$

Potenzgesetz?

$$=\frac{N_0\cdot e^{-\lambda t_0}}{e^{\lambda\tau}}=\frac{N(t_0)}{e^{\lambda\tau}}\overset{\tau=\frac{\ln 2}{\lambda}}{=}\frac{N(t_0)}{e^{\lambda\frac{\ln 2}{\lambda}}}=\frac{N(t_0)}{\underbrace{e^{\ln 2}}_{=2}}=\frac{N(t_0)}{2}$$

---

2) Winkelmessung im Grad- und Bogenmaß:

Beachte (s. Skript): Ist x das Bogenmaß eines Winkels und $\alpha[°]$ das zugehörige Gradmaß, so gelten die Umrechnungsformeln:

„DEG" steht für degree ← Altgrad [°]

„RAD" steht für radiant ← Bogenmaß

„GRA" steht für

$$\boxed{x=\frac{\pi}{180°}\cdot\alpha[°]} \text{ bzw. } \boxed{\alpha[°]=\frac{180°}{\pi}\cdot x}$$

Grad → Bogenmaß

DEG RAD

Bogenmaß → Grad

RAD DEG

grad ← Neugrad [gon]

Beachte das Trigonometrie

tri $= 3$ gon $=$ Eck metrik $=$ Messung

32 Ü(a) $\varphi = 15°$ $\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi = \pi \cdot \frac{\cancel{15°}^{1}}{\cancel{180°}_{12}} = \boxed{\frac{\pi}{12}} = 0{,}26179\ldots \approx 0{,}2618$

„phi" = „f"

als π-Vielfaches $\pi = 3{,}1415\ldots$

gerundeter Wert „ungefähr gleich"

dezimal?

Ü(h) $\varphi = 210° \, 52' \, 31'' = 210 + \frac{52}{60} + \frac{31}{3600} \, [°] = 210{,}8752\ldots \, [°]$

„Minuten" „Sekunden"

$= \underbrace{210 + 52 \cdot 60^{-1} + 31 \cdot 60^{-2}}$ b-adische Darstellung bezüglich $b = 60$

dezimale Darstellung in [°]

Also:

$x = \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi = \frac{\pi}{180°} \cdot 210{,}8752\ldots° = \boxed{1{,}1715\ldots \cdot \pi} = 3{,}68046\ldots \approx 3{,}6805$

als π-Vielfaches $\pi = 3{,}1415\ldots$

dezimal! [RAD]

In „gon": $z = \frac{x}{\pi} \cdot 200 \, [\text{gon}] = \frac{\varphi}{180°} \cdot 200 \, [\text{gon}] = \frac{\varphi}{9°} \cdot 10 \, [\text{gon}]$ $\quad \frac{200}{180} = \frac{10}{9}$

Für die, die es „wissen" wollen!

33 Ü(a) Schreiben wir überall „x" statt „φ" und verwenden wir „φ" für die umgewandelte Größe im Bogenmaß!

$x = \frac{\pi}{8}$ $\Rightarrow$ $\varphi = \frac{180°}{\pi} \cdot x = \frac{180°}{\cancel{\pi}_{1}} \cdot \frac{\cancel{\pi}^{1}}{8} = \frac{180}{8} \, [°] = \boxed{22{,}5°}$

dezimal

$= 22° \, (\underbrace{0{,}5 \cdot 60}_{= 30})' = 22° \, 30'$ hexagesimal

Ü(h)

$x = 3{,}0$ $\Rightarrow$ $\varphi = \frac{180°}{\pi} \cdot x = \frac{180°}{\pi} \cdot 3{,}0 = \frac{540}{\pi} \, [°] = \boxed{171{,}8873\ldots} \, [°]$

$\pi = 3{,}1415\ldots$

dezimal

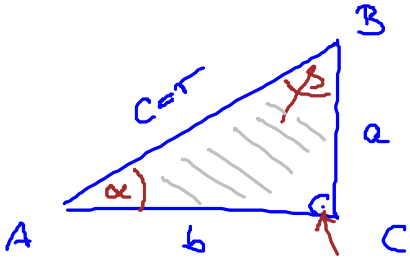
$= 171° \, (\underbrace{0{,}8873\ldots \cdot 60}_{\text{Minuten}})' = 171° \, 53{,}2403\ldots'$

$= 171° \, 53' \, (\underbrace{0{,}2403\ldots \cdot 60}_{\text{Sekunden}})'' = 171° \, 53' \, 14{,}418\ldots''$

$\approx 171° \, 53' \, 14{,}4''$

hexagesimale Teilung!

3) Trigonometrische Funktionen



$\gamma = 90° = \frac{\pi}{2}$

$\sin\alpha := \frac{Gk}{Hypo} = \frac{a}{c} = \frac{a}{r}$

$\cos\alpha := \frac{Ak}{Hypo} = \frac{b}{c} = \frac{b}{r}$

$\tan\alpha := \frac{Gk}{Ak} = \frac{a}{b} = \frac{a}{r}\cdot\frac{r}{b} = \frac{a/r}{b/r} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Umkehrfunktionen zu sin, cos, tan, $\cot = \frac{1}{\tan} = \frac{\cos}{\sin}$ heißen Arcus-funktionen

Arcus Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens

Also z.B.: Die Lösung der Gleichung $\cos(x) = a$ ist

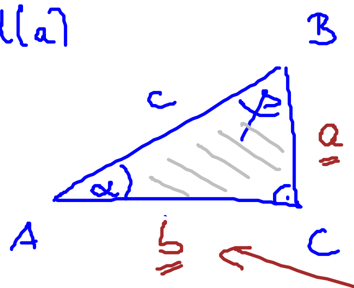
$$\boxed{x = \arccos(a) = \cos^{-1}(a)}$$

Ebenso:

$$\tan(x) = a \Rightarrow \boxed{x = \arctan(a) = \tan^{-1}(a)}$$

„-1" ist keine Potenz, sondern Umkehrsymbol!!

(34) Ü(a)



Gegeben hier: $a = 50\,[cm]$, $b = 78{,}1\,[cm]$

Gesucht: $c = ?$, $\alpha = ?$, $\beta = ?$

(i) Dann erhält man z.B. c mit dem Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} \qquad (\neq a+b)$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{50^2 + 78{,}1^2} = \sqrt{8.559{,}61} = 92{,}734\ldots\ [cm]$$

(ii) $\alpha = ?$ $\quad \boxed{\tan\alpha} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{50}{78{,}1} = 0{,}6402\ldots \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\dfrac{a}{b}\right)$

Also: $\boxed{\alpha = \underbrace{\arctan}_{= \tan^{-1} \text{ auf Taschenrechner}}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{50}{78{,}1}\right) = \tan^{-1}(0{,}6402\ldots) = 32{,}6275\ldots\,[^\circ]} \approx 32{,}6^\circ$

Wegen $\alpha + \beta = 90^\circ$ folgt: $\beta = 90^\circ - \alpha = \boxed{57{,}3724\ldots\,[^\circ]} \approx 57{,}4^\circ$

Hausaufgaben zum 9.1.2013:

32)–34) alle H-Aufgaben sowie H37.

Allen Teilnehmern ein frohes Fest sowie ein gesundes neues Jahr 2013!!