1. Vorlesung vom 17.10.2012:

Thema: Einführung in die Vorlesung
Zahlsysteme (g-adisches, b-adisches Stellenwertsystem)

Mathematik

Arithmetik (Zahlen)

Geometrie (visuelle Objekte)

war für den „Gründer" der Mathematik Pythagoras eng verflochten miteinander

Zum Beispiel:

- gerade Zahl / ungerade Zahl

  8 7

- Quadratzahl $x = 25 = 5^2$

  5 5

  $16 = 4^2 = 4 \cdot 4$

- Dreieckszahl

  1 3 6 $\boxed{10}$ Tetraktys !!

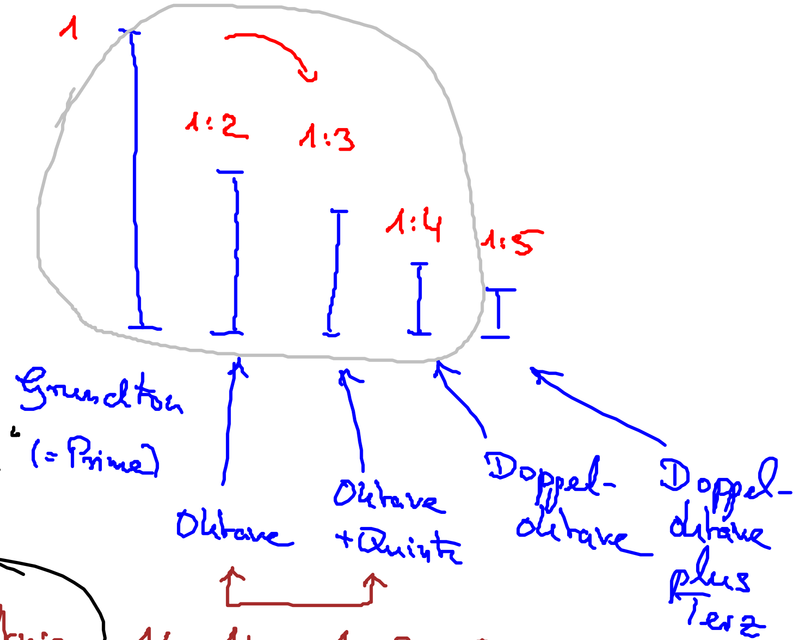
→ Bereich der „natürlichen" Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

→ Bereich der „rationalen" Zahlen (= Verhältniszahlen) = Brüche / Quotienten: $\mathbb{Q}^+ = \{x = \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$

„ist Element aus"

„Tetraktys ist visualisierte Musik": „mit der Eigenschaft"

Tonabstände = Intervalle

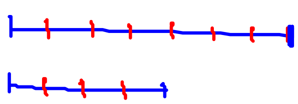


Hat Pythagoras „entdeckt"

Verhältnis: $1/3 : 1/2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = 2/3 = 2:3$

Pythagoras erklärte „die Zahlen" als Grundbaustoff der Welt.
(~ 640 v. Chr.)

Genauer: „Je zwei Größen stehen in einem rationalen Zahlenverhältnis zueinander." (Kommensurabilität)



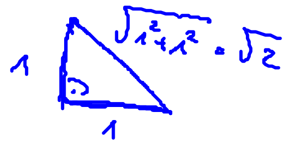
$$\left.\begin{aligned} a &= 7 \cdot m \\ b &= 4 \cdot m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{4}$$

: gemeinsames Maß m

Pythagoras' „Jünger" entdeckten: Es gibt in der Geometrie konstruierbare Längen, die nicht in einem rationalen Zahlverhältnis zueinander stehen (inkommensurable Längen).

Es ging dabei um die Entdeckung der sogenannten irrationalen Zahlen.

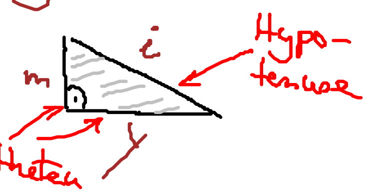
Beispiel: 1) $x = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ || Satz des Pythagoras:



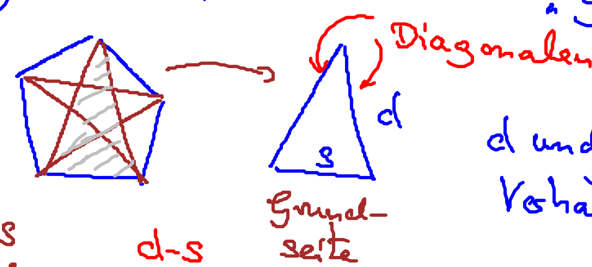
z.B.: $m^2 + y^2 = i^2$

$\Downarrow$

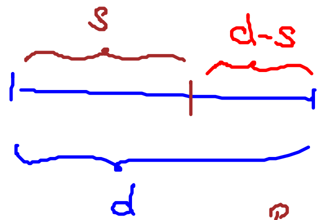
$\boxed{\sqrt{m^2+y^2} = \sqrt{i^2} = i}$



2) Im Pentagon (= Fünfeck) steckt der „Goldene Schnitt" drin:



d und s stehen im Goldenen Schnitt-Verhältnis



$$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$$

|| Gleichung mit $d = 1$, $s = x$:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad \Big|\cdot(1-x)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1-x}{x} = x \quad \Big|\cdot x \quad \Longleftrightarrow 1-x = x^2$$

$\overset{+x-1}{\Longrightarrow}$ $\boxed{0 = x^2 + x - 1}$ (p = 1, q = −1)

quadratische Gleichung

$x^2 + px + q = 0$

$$\Longrightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)}_{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4}+1}_{=\frac{5}{4}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Wegen $x > 0$ muss gelten: $\boxed{x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} > \frac{-1+\sqrt{4}}{2} = \frac{-1+2}{2} = +\frac{1}{2} > 0$

ist irrational !!

$x = 0{,}61\ldots \Rightarrow \frac{1}{x} = 1{,}61\ldots = 1 + x$ Beweis?

Beweis:

$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}^2 - 1^2} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ≠ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{5}+1)}{\cancel{4}_2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1+2}{2} = \underbrace{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}_{=x} + \frac{2}{2} = x+1$$

$-1+1$

ENDE der 1. Vorlesung!