Vorlesung vom 16.01.2013:

Thema: Lineare Gleichungssysteme (=LGS)

Lineares Gleichungssystem am Beispiel

(45) Ü(a)

$$\begin{aligned} 2x + y - z + u &= 5 \\ x + y + 2z - u &= 1 \\ 3x - y + z + u &= 0 \end{aligned}$$

Allgemein (s. Skript S. 18 oben):

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Hier: $\boxed{\underbrace{m=3}_{\text{Anzahl der Gleichungen}},\ \underbrace{n=4}_{\text{Anzahl der Variablen}}}$,

$a_{i,k}$: Koeffizienten des LGS (*)

x_k: Unbekannte / Variablen

i, k: Indizes (= Anzeiger)

$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = u$

Zeilenindex (= Nummer der Gleichung)

Spaltenindex (= Nummer der Variablen)

Koeffizienten: z.B.: $a_{2,3} = a_{23} = +2$ (= Koeffizient in der 2. Zeile / Gleichung in der 3. Position / für $x_3 = z$)

$a_{3,2} = a_{32} = -1$

$b_1 = 5,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0.$

Kurzschreibweise für die rechte Seite: „Vektor" $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

für den „Unbekannten-Vektor": $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}$,

für die linke Seite: Koeffizientenmatrix = Zahlenschema / Tabelle

$$A = \underbrace{\begin{array}{cccc} x & y & z & u \\ \hline \end{array}}_{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Format: $(m \times n) = (3 \times 4)$

Kurzschreibweise des LGS:

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}} \quad \text{mit } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix}$$

eigentlich „Matrixmultiplikation"

Bemerkung: Der Vektor $\vec{b}$ kann interpretiert werden als Matrix vom Format (3×1), der Vektor $\vec{x}$ als Matrix vom Format (4×1). Dann ergibt die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ für das Matrizenprodukt folgende „Formatgleichung": $\underbrace{(3 \times 4)}_{A} \cdot \underbrace{(4 \times 1)}_{\vec{x}} = \underbrace{(3 \times 1)}_{\vec{b}}$

Achtung: Nicht auftauchende Variablen in einer Gleichung besitzen „0" als Koeffizient!!

Mit welchem Verfahren löst man ein LGS?

- Aus der Schule evtl. bekannt: Einsetzverfahren
- In der Uni: Gaußalgorithmus bzw. Gauß-Jordan-Algorithmus (= erweiterter Gauß)

Der (GA) benutzt die sogenannten EZOs (= Elementare Zeilenoperationen):

1) Vertauschung von Gleichungen = Zeilenvertauschung in der Matrix
2) Multiplikation bzw. Division einer Gleichung mit einer Zahl $\alpha \neq 0$ = Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \neq 0$ bzw. $\frac{1}{\alpha}$.
3) Addition bzw. Subtraktion von 2 Gleichungen = Addition/Subtraktion einer Zeile in der Matrix zu/von einer anderen Zeile

Achtung: Alle EZOs müssen (theoretisch) rückgängig gemacht werden können, damit keine Information bezüglich der Lösungsmenge dieses LGS verloren geht.

Ziel der EZOs bzw. des (GA) [Gaußalgorithmus]: Δ-Gestalt [Dreiecks] der Koeffizienten- bzw. „Systemmatrix" $(A|\vec{b})$!!

In unserem Beispiel lautet die erweiterte Koeff.-matrix bzw. Systemmatrix, von der wir ausgehen:

$$(A|\vec{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$$\underbrace{}_{A} \quad \underbrace{}_{\vec{b}}$$

Jetzt Gaußalgorithmus an diesem Beispiel exemplarisch durchgeführt:

$$(A|\vec{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{III}+(-3)\cdot\mathrm{I}]{\mathrm{II}+(-2)\cdot\mathrm{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

Kopfeins

$\overset{\mathrm{II}}{-1} = \overset{\mathrm{I}}{1} - 2 \cdot \overset{\mathrm{I}}{1}$

$\overset{\mathrm{II}}{-5} = \overset{\mathrm{II}}{-1} - 2 \cdot \overset{\mathrm{I}}{2}$

$$\downarrow (-1)\cdot\mathrm{II}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \mathrm{III} + 4 \cdot \mathrm{II}$$

Exkurs!!

$$\begin{array}{rcll} x + y & = & 1 & \mathrm{I} \\ 2x + y & = & 5 & \mathrm{II} \end{array}$$

$0 \overset{!}{=} 2x$

$\mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I}$: $\quad 0x - y = 3 \implies +y = -3 \quad \cdot(-1)$

$2x - 2x \quad \| \quad 5 - 2 \cdot 1$

$= y - 2y$

Weiter mit Jordan! / Ende von Gauß

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{15} & -1 \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{1}{15}\cdot III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 15 & -8 & -15 \end{array}\right]$$

$\underset{III}{-5} + \underset{II}{4\cdot 5} = -5+20 = 15$

$I - II$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{8}{15} & -1 \end{array}\right]$$

$-1-(-3)$ ‚‚"

Kopfeinsen

NZSF = normierte Zeilenstufenform

$$\xrightarrow[II-5\cdot III]{I+3\cdot III} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{15} & -1 \end{array}\right]$$

$2+\cancel{3}^{1}\cdot\left(-\frac{8}{\cancel{15}_5}\right) = 2-\frac{8}{5} = \frac{10-8}{5} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$-3-\cancel{5}^{1}\cdot\left(-\frac{8}{\cancel{15}_3}\right) = -3+\frac{8}{3} = \frac{-9+8}{3} = -\frac{1}{3}$

Also: Endergebnis ist

$$\underbrace{(A', \vec{b}')}_{\text{modifizierte Systemmatrix}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{15} & -1 \end{array}\right] \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{lr} x + \frac{2}{5}u = 1 & I \\ y - \frac{1}{3}u = 2 & II \\ z - \frac{8}{15}u = -1 & III \end{array}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{5}u \\ y = 2 + \frac{1}{3}u \\ z = -1 + \frac{8}{15}u \end{array}}$$

Lösung mit „u" als frei wählbarem Parameter!

Parametrisierte Darstellung der Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \,\middle|\, x = 1-\frac{2}{5}u,\ y = 2+\frac{1}{3}u,\ z = -1+\frac{8}{15}u,\ u \in \mathbb{R} \right\}$$

$\frac{2}{\cancel{5}_1}\cdot \cancel{15}^{3}t = 6t$

$$\underset{\boxed{u=15t}}{=} \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} 1-6t \\ 2+5t \\ -1+8t \\ 0+15t \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}}$$

Falls LGS unlösbar ist, dann schreibt man $\mathbb{L} = \emptyset$ bzw. $\mathbb{L} = \{\ \}$.

„leere Menge"

ENDE der heutigen Vorlesung!