Vorlesung vom 14.11.2012:

- Quadratische Ergänzung
- Gesetze der Bruchrechnung

1) Quadratische Ergänzung:

vervollständigter Binom!!

Wird gebraucht, wenn ein „Fragment" eines Binoms (1./2.) auftaucht:

$$a^2+2ab = a^2+2ab \underbrace{+b^2-b^2}_{=0} = (a^2+2ab+b^2)-b^2 = (a+b)^2-b^2$$

Der Term „$+b^2$" ist sozusagen die quadratische $\xrightarrow{\text{1. Binom!}}$ Ergänzung!!

Beispiele:

(12) Ü(a) $\boxed{4a^2-12a}+\boxed{9b^2-24b}=0 \iff$??

Nebenrechnung!:

Beachte: $4a^2-12a\underline{+9\ -9} = (2a-3)^2-9$ (1)

$u^2-2uv+v^2-v^2 = (u-v)^2-v^2$

$9b^2-24b+16-16 = (3b-4)^2-16$ (2)

Beachte: Wenn $u^2=4a^2$, dann $u=2a$. Weiterhin: $2uv=12a \Rightarrow v=\frac{12a}{2u}=\frac{12a}{4a}=3$

„ist äquivalent" $\Longrightarrow$ $4a^2-12a+9b^2-24b=0$

$\iff (4a^2-12a+9)-9+(9b^2-24b+16)-16=0$

$\iff [(2a-3)^2-9]+[(3b-4)^2-16]=0$

$\iff (2a-3)^2-9+(3b-4)^2-16=0$

$\iff \boxed{(2a-3)^2+(3b-4)^2=25}$ $+25$

Nebenbemerkung: Das ist eine Ellipsengleichung!

(12) Ü(c) $9x^2+49y^2-12x+42y=0$

$\iff (9x^2-12x)+(49y^2+42y)=0$

$\iff [(3x-2)^2-2^2]+[(7y+3)^2-3^2]=0$

Ergebnis:

$[(3x-2)^2-4]+[(7y+3)^2-9]=0$

$$\Leftrightarrow (3x-2)^2 + (7y+3)^2 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(3x-2)^2 + (7y+3)^2 = 13} \quad (+13)$$

Noch ein Beispiel mit $\sqrt{\ }$:

Beachte: $u = (\sqrt{u})^2, \ v = (\sqrt{v})^2$

$$64u - 80\sqrt{u} - 100v - 40\sqrt{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[64(\sqrt{u})^2 - 80\sqrt{u}\right] - \left[100(\sqrt{v})^2 + 40\sqrt{v}\right] = 0$$

Vorzeichenregel: $(-)\cdot(+) = (-)$

$$\Leftrightarrow \left[(8\sqrt{u}-5)^2 - 25\right] - \left[(10\sqrt{v}+2)^2 - 4\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (8\sqrt{u}-5)^2 - 25 - (10\sqrt{v}+2)^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(8\sqrt{u}-5)^2 - (10\sqrt{v}+2)^2 = 21} \quad (+21) \quad (= +25 - 4)$$

Nebenbemerkung: Ist als Hyperbelgleichung interpretierbar!

---

2) Rechengesetze für Brüche

A) Erweitern / Kürzen: $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{a\cdot c}{b\cdot c}}$ (Kürzen ←, → Erweitern)

(13) Ü(a)

$$\frac{35ac - 50bc}{7a-10b} = \frac{5c\,\cancel{(7a-10b)}}{\cancel{7a-10b}} = 5c \quad \text{Kürzen}$$

Ü(e)

$$\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2\cdot(a-b)} = \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{(a+b)^2\cdot(a-b)} = \frac{(a^2+b^2)\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}}{(a+b)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(a-b)}}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a+b} \neq a+b$$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

Vermeide, da falsch:

$$\frac{u^4-v^4}{u-v} \neq u^3 - v^3$$

B) Multiplikation: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

14 Ü(a) 3. Binom!

$$\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}=\frac{\cancel{(2a+3b)}(2a-3b)\cdot a(7+5b)}{7a^2\cancel{(3b+2a)}\cdot 2(3b-2a)}=\frac{\cancel{(2a-3b)}\cdot \cancel{a}(7+5b)}{7a^{\cancel{2}}\cdot(-2)\cancel{(2a-3b)}}$$

$$=\frac{7+5b}{-14a}=-\frac{7+5b}{14a}$$

$[2(3a+1)]^2=4(3a+1)^2$

14 Ü(c)

$$\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}=\frac{\cancel{a^2}(16a^2-1)\cdot(6a+2)^{\cancel{2}}}{4\cancel{a^2}\cancel{(6a+2)}\cdot(4a+1)}=\frac{(16a^2-1)(6a+2)}{4\cdot(4a+1)}$$

3. Binom!

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$$=\frac{\cancel{(4a+1)}(4a-1)\cdot \cancel{2}(3a+1)}{\cancel{4}\cancel{(4a+1)}}=\frac{(4a-1)(3a+1)}{2}$$

C) Addition/Subtraktion:

15 Ü(a)

$$\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}=??$$

Wichtiges Thema: Hauptnenner!

kgV = kleinstes gemeinsames Vielfaches!

→ dazu „Nenneranalyse"...

„Nennerlabor":

(1) $3a^2-3ab=3a(a-b)$

(2) $2b = 2b$

(3) $2ab-2b^2=(a-b)\cdot 2b$

HN (= Hauptnenner): $3a(a-b)\cdot 2b = 6ab(a-b)$

Also:

$$\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}=\frac{a+2b}{3a(a-b)}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2b(a-b)}$$

$$=\frac{(a+2b)\cdot 2b-1\cdot 3a(a-b)-(3b-a)\cdot 3a}{6ab(a-b)}$$

$$=\frac{2ab+4b^2-3a^2+3ab-9ab+3a^2}{6ab(a-b)}=\frac{-4ab+4b^2}{6ab(a-b)}=\frac{-4b\cancel{(a-b)}}{6ab\cancel{(a-b)}}=-\frac{2}{3a}$$

Zur kommenden Woche:

Alle H-Aufgaben zu 12) bis 15). Aufgabe 16) kommt nächste Woche!

ENDE der Vorlesung!