Letzte Vorlesung vom 13.02.2013:

- Thema: PROBEKLAUSUR!

Reihenfolge:

$\boxed{1-4-3-2-6-5}$ „Aufgabenzug"!

(1) a) $a = 521$, $b = 249$

(i) Wandlung von a, b ins duale System (= Binärsystem)

a	DIV 2	MOD 2
521	260	1
260	130	0
130	65	0
65	32	1
32	16	0
16	8	0
8	4	0
4	2	0
2	1	0
1	0	1

Abbruch!

$$\boxed{a = (1.000.001.001)_2}\,,\quad \boxed{b = (11.111.001)_2}$$

b	DIV 2	MOD 2
249	124	1
124	62	0
62	31	0
31	15	1
15	7	1
7	3	1
3	1	1
1	0	1

(ii) Multiplikation im Binärsystem

$$x = a \cdot b = b \cdot a = (11.111.001)_2 \cdot (1.000.001.001)_2$$

achte „0" am Ende beachten!!

$$1+1 = (1)_2 + (1)_2 = (2)_{10} = (10)_2$$

```
                 11111001
              11111001
         11111001
Übertragszeile →    1 1 1 1 1 1 1 1 1
         ------------------------------
         11.111.101.011.000.001
```

Also:

$$\boxed{x = a \cdot b = (\overset{1}{\underset{3}{\underbrace{11}}}.\underset{7}{\underbrace{111}}.\underset{5}{\underbrace{101}}.\underset{3}{\underbrace{011}}.\underset{0}{\underbrace{000}}.\underset{1}{\underbrace{001}})_2 = (375.301)_8 = (1F.AC1)_{16}}$$

$1 \quad 15 \hat{=} F \quad 10 \hat{=} A \quad 12 \hat{=} C \quad 1$

Probe: z.B. Oktal $b = 8$: Horner:

	3	7	5	3	0	1
$\cdot 8$	0	24	248	2024	16216	129.728
$+$	3	31	253	2027	16216	129.729!

Also: $x = (375.301)_8 = \underbrace{129.729}_{=(129.729)_{10}} \overset{!}{=} a \cdot b = 521 \cdot 249$ ✓

b) $x = (0,\overline{12A})_{11} \overset{?}{=} \dfrac{a}{b}$:

Gegeben: Basis $b = 11$, Periodenlänge $\lambda = 3$. Dann folgt:

$$b^{\lambda} \cdot x = 11^{3} \cdot x = 1331x = (121,\overline{121})_{11} \quad (1)$$
$$x = (0,\overline{121})_{11} \quad (2)$$

EXKURS: Hier konkret nicht relevant!

Nur kurz zwischendurch:

$$x = (3,\overline{121})_{11} = \underbrace{(3)_{11}}_{(3)_{10}} + (0,\overline{121})_{11}$$

wie eben!

$$x = (0,2\overline{121})_{11} \Rightarrow 11^{4} x = (2121,\overline{121})_{11}$$
$$11 \cdot x = (2,\overline{121})_{11}$$

Vorperiode!

Subtraktion im System $b = 11$!!

$$1330x = (121)_{11} \quad :(1)-(2)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x = \frac{(121)_{11}}{1330} \overset{(*)}{=} \frac{153}{1330}} \in \mathbb{Q}$$

Horner:

	1	2	10 (A)
·11	0	11	143
+	1	13	153

Probe:

a	DIV 1330	MOD 1330
153	0	153 (·11)
1683	1	353
3883	2	1223
13453	10 ≙ A	153
1683	1	353
⋮	⋮	⋮

$1683 - 1 \cdot 1330 = 353$

$3883 - 2 \cdot 1330 =$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{153}{1330} = (0,\overline{12A})_{11}} \checkmark$$

---

(4) Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & \lambda \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \\ 12-\lambda \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

Unbekanntenvektor!

Erweiterte Koeffizientenmatrix = Systemmatrix:

$$(A|\vec{b}) = \begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 7 & \lambda & 12-\lambda \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot(I)} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 7 & \lambda & 12-\lambda \end{array}\right]$$

Manipulatorzeile

$$\xrightarrow[(IV)-(I)]{(II)-2(I)} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & \lambda & 14-\lambda \end{array}\right]$$

$3 - 2\cdot(-4) = 3 + 8 = 11$

GA (= Gaußalgorithmus)

$$\xrightarrow{(II)\leftrightarrow(III)} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 11 & \lambda & 14-\lambda \end{array}\right] \xrightarrow{(IV)-(III)} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 2-\lambda \end{array}\right] = (A'|\vec{b}')$$

neue Systemmatrix

Wir setzen hier jetzt die speziellen Werte für λ ein: ZSF (= Zeilenstufenform)

(i) $\lambda = 1$:

$$(A'|\vec{b}') = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

„modifizierte" Systemmatrix!

letzte Zeile: $0 = 1$ ↯ (geht nicht!)

Es folgt: $\boxed{\text{Das LGS ist für } \lambda = 1 \text{ unlösbar!}}$

(ii) $\lambda = 2$:

$$(A'|\vec{b}') = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{(II)}-\text{(IV)}]{\text{(III)}-\text{(IV)}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Jordan-Algorithmus! → Manipulatorzeile!

$\Downarrow$ $u = 0$

$$\xrightarrow[\text{(III)}:11]{\frac{1}{11}\cdot\text{(III)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{(I)}+4\cdot\text{(III)}]{\text{(II)}+\text{(III)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Manipulatorzeile!

mit $a = -2 + 4\cdot 12/11 = \frac{-22+48}{11} = \frac{26}{11}$

$b = 4 + 12/11 = \frac{44+12}{11} = \frac{56}{11}$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 26/11 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 56/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot\text{(II)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 26/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 28/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{(I)}+\text{(II)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 54/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 28/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{(I)}:2]{\frac{1}{2}\cdot\text{(I)}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 27/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 28/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} = (A''|\vec{b}'')$$

NZSF (= normierte Zeilenstufenform)

$\Rightarrow$ Das LGS ist in diesem Fall eindeutig lösbar, und zwar gilt:

$$x = 27/11,\ y = 28/11,\ z = 12/11,\ u = 0 \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27/11 \\ 28/11 \\ 12/11 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\cdot\begin{bmatrix} 27 \\ 28 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$0 = 0/11$

Also: $$\boxed{\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \frac{1}{11}\cdot\begin{bmatrix} 27 \\ 28 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

etwas größer

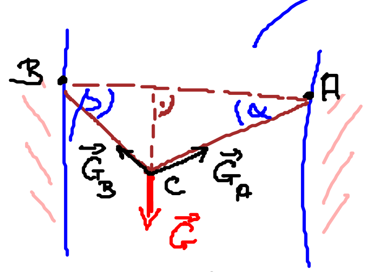
③ Gegeben (s. Skizze):

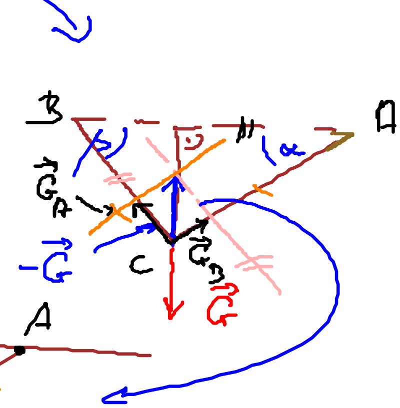
$G = |\vec{G}| = 1.000\ N$,

$G_A = |\vec{G}_A| = 800\ N$

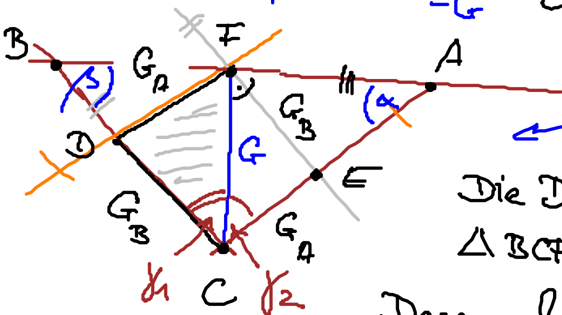
$G_B = |\vec{G}_B| = 900\ N$

Länge des Vektors $\vec{G}$





Gesucht: α, β bzw. als „Zwischengröße" γ_1, γ_2



Die Dreiecke ΔACF und ΔBCF sind rechtwinklig.

Bemerkung: In ΔACF und in ΔBCF ist der Winkel bei F jeweils ein rechter.

Daraus folgt: $\boxed{\begin{matrix}\gamma_1 = 90° - \beta \\ \gamma_2 = 90° - \alpha\end{matrix}}$ ΔBCF / ΔACF

Im Dreieck ΔDCF lässt sich wegen (SSS) der Kosinussatz anwenden; das gilt auch für das Dreieck ΔCEF. Dann:

γ_1: (1) $G_A^2 = G_B^2 + G^2 - 2 \cdot G_B \cdot G \cdot \cos\gamma_1$

γ_2: (2) $G_B^2 = G_A^2 + G^2 - 2 \cdot G_A \cdot G \cdot \cos\gamma_2$

Umstellen!

Zu (1): $-G_B^2 - G^2$

$$\cos\gamma_1 = \frac{G_A^2 - G_B^2 - G^2}{-2 \cdot G_B \cdot G} \overset{\cdot\frac{(-1)}{(-1)}}{=} \frac{-G_A^2 + G_B^2 + G^2}{2 \cdot G_B \cdot G} = \frac{-640.000 + 810.000 + 1.000.000}{2 \cdot 900.000} = \frac{1.170.000}{1.800.000}$$

$$= \frac{117}{180} = 0{,}65 \Longrightarrow \gamma_1 = \arccos(0{,}65) = \cos^{-1}(0{,}65) = 49{,}45...° \approx 49{,}5°$$

$$\Longrightarrow \beta = 90° - \gamma_1 \approx 90° - 49{,}5° = 40{,}5°$$

Zu (2): $$\cos\gamma_2 = \frac{G_A^2 + G^2 - G_B^2}{2 G_A \cdot G} = \frac{830.000}{1.600.000} = \frac{83}{160} = 0{,}51875$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_2 = \arccos\left(\frac{83}{160}\right) = \cos^{-1}(0{,}51875) = 58{,}75...^\circ \approx 58{,}8^\circ}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 90^\circ - \gamma_2 \approx 90^\circ - 58{,}8^\circ = 31{,}2^\circ}$$

Die beiden Winkel betragen $\alpha \approx 31{,}2^\circ$ und $\gamma \approx 58{,}8^\circ$.

② Achtung: Version Aufgabenteil (b) mit Halbwertszeit $\tau > 0$

a) Gesetz: $\boxed{Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\lambda t}}$ $(t \geq 0)$ mit $\lambda > 0$: Entladungskonstante, $Q_0 = Q(0)$: Anfangsladungswert! werden gesucht:

Gegeben: $Q(10) = 0{,}03$ [C], (1)
$Q(18) = 0{,}02$ [C] (2)

(1), (2) ergibt:

$$(1)\ Q(10) = Q_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 10} = Q_0 \cdot e^{-10\lambda} \overset{!}{=} 0{,}03$$
$$(2)\ Q(18) = Q_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 18} = Q_0 \cdot e^{-18\lambda} \overset{!}{=} 0{,}02$$

Nicht lineares Gleichungssystem!!

$$\Rightarrow \frac{(2)}{(1)}: \quad \frac{0{,}02}{0{,}03} = \frac{Q(18)}{Q(10)} = \frac{\cancel{Q_0} \cdot e^{-18\lambda}}{\cancel{Q_0} \cdot e^{-10\lambda}} = e^{-18\lambda - (-10\lambda)} = e^{-18\lambda + 10\lambda} = e^{-8\lambda}$$

Potenzgesetz!

Ziel!

$$\Rightarrow \boxed{e^{-8\lambda} = \frac{0{,}02}{0{,}03}} \quad \xRightarrow{\ln()} \quad \ln\left(e^{-8\lambda}\right) = -8\lambda \overset{!}{=} \ln\left(\frac{0{,}02}{0{,}03}\right) = \ln(2/3) = \ln(2) - \ln(3)$$

$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$

$$\xRightarrow{:(-8)} \lambda = \frac{\ln(2) - \ln(3)}{-8} = \frac{\ln(3) - \ln(2)}{8} = 0{,}05068... \approx \boxed{0{,}0507}$$

genau!

λ auf 4 Nachkommastellen gerundet!!

Einsetzen von λ in die Gleichung (1) ergibt:

$$Q_0 \cdot e^{-10\lambda} = 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad Q_0 = e^{10\lambda} \cdot 0{,}03 \approx e^{0{,}507} \cdot 0{,}03 = 0{,}0498... \approx 0{,}05\ [C]$$

$\lambda \approx 0{,}0507$; $e^{0{,}507} = 1{,}6603...$

$\cdot e^{+10\lambda}$

$$e^{-10\lambda} \cdot e^{10\lambda} = e^{-10\lambda + 10\lambda} = e^0 = 1$$

Beachte: $e^{-10\lambda} = \dfrac{1}{e^{+10\lambda}}$

$$= \frac{0{,}03}{e^{-10\lambda}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(t) \approx 0{,}05 \cdot e^{-0{,}0507 t}}$$ lautet das Entladungsgesetz.

b) Halbwertszeit τ:

Allgemein: $\boxed{Q(\tau) = Q_0 \cdot e^{-\lambda\tau} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \cdot Q_0}$ $\underset{:Q_0}{\Longrightarrow}$ $e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}$

$\underset{\ln(\dots)}{\Longrightarrow}$ $\ln(e^{-\lambda\tau}) = -\lambda\tau = \ln(1/2) = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(2) = -\ln 2$

$\underset{:(-\lambda)}{\Longrightarrow}$ $\tau = \frac{-\ln 2}{-\lambda} \underset{\cdot\frac{(-1)}{(-1)}}{=} \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{\ln 2}{0{,}0507} = 13{,}6715\ldots$ [sec] $\approx 13{,}67$ [sec]

Die Halbwertszeit beträgt auf die Hundertstelsekunde genau $\tau = 13{,}67$ [sec]

(5) Ansatz: Aufstellen der Gleichungen, die gelöst werden müssen und auf eine quadratische Gleichung führen:

Gesucht: $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{\begin{array}{ll} (1) & x - y = 2 \\ (2) & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{array}}$, ‖ Differenz gleich 2, ‖ Summe der Kehrwerte gleich 1

nicht lineares Gleichungssystem!

(1) nach „x" umgestellt, ergibt:

$\boxed{x = y + 2}$ in (2) eingesetzt, ergibt: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \boxed{\frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} = 1}$ (*)

(*) $\Leftrightarrow$ $\frac{1 \cdot y + 1 \cdot (y+2)}{y(y+2)} = \frac{2y+2}{y^2+2y} \overset{!}{=} 1$ $\underset{\cdot y^2+2y}{\Longrightarrow}$ $2y + 2 = y^2 + 2y$

$\underset{-2y-2}{\Longrightarrow}$ $0 = y^2 + \underbrace{2y - 2y}_{=0} - 2 = y^2 - 2$ $\Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow \boxed{y_{1/2} = \pm\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = y + 2 = 2 + y = 2 \pm \sqrt{2}}$

Probe: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + (2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{2 + 2(\sqrt{2})}{2 \cdot \sqrt{2} + 2} = \frac{\cancel{2(1+\sqrt{2})}}{\cancel{2(1+\sqrt{2})}} = 1$ ✓

Aufgabe 6 der Probeklausur dann im Tutorium!!

ENDE der Vorlesung! Viel Erfolg bei der Klausur...