Vorlesung vom 12.12.12.

- Logarithmen → Basisumrechnung
- Erste Anwendungen der „Exponential- und Logarithmusfunktion"

  → Textaufgaben

---

1) Basisumrechnungen bezüglich Logarithmen zu verschiedenen Basen:

Frage: Wie kann ich z.B. auf dem Taschenrechner

$$\boxed{x = \log_2 325}$$ ausrechnen,

Eulersche Zahl

wenn man nur die „ln“ (= logarithmus naturalis zur Basis $e = 2{,}71\ldots$) bzw. „log“ (= lg = dekadischer / Briggs'scher Logarithmus) vorhanden ist?

Bemerkung: Die Zahl „e“ erhält als Tastenfolge $\boxed{1}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{e^x}$, denn:

$$e = e^1 = 2{,}7182818\ldots \approx 2{,}72$$

Antwort: Es gilt:

$$\boxed{\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\lg a}{\lg b}}$$

z.B.: $\log_2 325 = \dfrac{\ln 325}{\ln 2} = 8{,}34429\ldots \approx 8{,}3443$

$x = \log_2 325$ ist Lösung von $2^x = 325$

$$= \frac{\lg 325}{\lg 2} = 8{,}34429\ldots$$

willich haben!

Allgemeiner gilt:

$$\log_c a = \log_b a \cdot \log_c b = \log_c b \cdot \log_b a \qquad (*)$$

$$:\log_c b \iff \boxed{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}} = \frac{\log_e a}{\log_e b} = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} = \frac{\lg a}{\lg b}$$

c ist beliebige andere Basis!

Formel (*) gilt, denn:

Beweis: Setzt man $u = \log_c b$, $v = \log_b a$, so gilt:

$$c^u = b, \quad b^v = a \implies a = b^v = (c^u)^v = c^{\overset{=x}{u \cdot v}}$$

(Pot.-ges.)

einsetzen!

$\Longrightarrow x = \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{v}} = \log_c a \quad \Rightarrow \underbrace{\log_c b}_{=u} \cdot \underbrace{\log_b a}_{=v} = \log_c a$ ■

Für Aufgabe 25 benötigen wir:

$$\boxed{b^{\log_b a} = a}$$

(25) Ü(d)

$$x = \sqrt{10^{2+\lg 9}} = \left(10^{2+\lg 9}\right)^{1/2} \underset{(PG)}{=} 10^{(2+\lg 9)\cdot\frac{1}{2}} = 10^{1+\frac{1}{2}\lg 9} \underset{(LG)}{=} 10^{1+\lg(9^{1/2})}$$

$$= 10^{1+\lg(\sqrt{9})} = 10^{1+\lg 3} \underset{(PG)}{=} 10^1 \cdot \underbrace{10^{\lg 3}}_{=3} = 10 \cdot 3 = \underline{\underline{30}}$$

Ü(a)

$$x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2 =$$

Es gibt leider kein Gesetz zu $\log u \cdot \log v = ?$

$$\lg\left(\tfrac{10}{2}\right) \cdot \lg(10\cdot 2) + (\lg 2)^2 \underset{(LG)}{=} \underbrace{(\lg 10 - \lg 2)(\lg 10 + \lg 2)}_{\text{3. Binom!}} + (\lg 2)^2$$

$$= (\lg 10)^2 - \cancel{(\lg 2)^2} + \cancel{(\lg 2)^2} = (\underbrace{\lg 10}_{=1})^2 = 1$$

$=1$ nach $\log_b b = 1$

Also: $\boxed{x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2 = 1}$

---

2) Anwendungsaufgaben zur Exponential- / Potenz- und Logarithmusfkt.

Ü(26) Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse werden oft in folgender Form beschrieben:

$$\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}} \quad \text{mit } \boxed{N_0 = N(0)}$$

„time" = Zeit

Anfangswert

$N(t)$: „Eine Größe, die vom Zeitpunkt „t" abhängt!!

Zusammenhang zwischen a und λ:

$$a = e^{\ln(a)} \Rightarrow \underline{a^t} = \left(\underline{e^{\ln a}}\right)^t = e^{(\ln a)\cdot t} =: \boxed{e^{\lambda t}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda = \ln a} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{a = e^{\lambda}}$$

Hier ist gegeben: $t_1 = 24h$ liefert $N(24) = N_1 = 801$

$t_2 = 48h$ — " — $N(48) = N_2 = 2.384$

a) Gesucht: $N_0 = N(0)$ und $\lambda > 0$ bzw. $a = e^{\lambda}$

Lösungsweg: Wir haben aufgrund des Ansatzes $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ zwei Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\ N(\underset{t_1}{24}) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot 24} \overset{!}{=} 801 \\ &(2)\ N(\underset{t''}{48}) = N_0 \cdot e^{\lambda 48} \overset{!}{=} 2.384 \end{aligned}}$$

Nichtlineares Gleichungssystem

$$\Longrightarrow \frac{(2)}{(1)}: \quad \frac{N(48)}{N(24)} = \frac{\cancel{N_0} e^{48\lambda}}{\cancel{N_0} e^{24\lambda}} \overset{!}{=} \frac{2384}{801} \Rightarrow e^{48\lambda - 24\lambda} = e^{24\lambda} = \frac{2384}{801}$$

(PG)

Gleichung „logarithmieren" $\ln(\ldots)$

$$\Longrightarrow \ln\left(e^{24\lambda}\right) = 24\lambda \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} = 24\lambda \overset{!}{=} \ln\left(\frac{2384}{801}\right) = \ln 2384 - \ln 801$$

(LG)

:24

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln 2384 - \ln 801}{24} = 0{,}0454\ldots}$$

Hausaufgaben: 25 H-Teile, H28, H31 !!!

ENDE der Vorlesung ?

Weiterführung der Aufgabe:

Beachte, dass man die Gleichung $e^{24\lambda} = \frac{2384}{801}$ lesen kann als $e^u = a$ mit $u = 24\lambda$, $a = \frac{2384}{801}$; d.h. $u = \log_e a = \ln a \Leftrightarrow 24\lambda = \ln\left(\frac{2384}{801}\right) = \ln 2384 - \ln 801$

:24 $\Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln 2384 - \ln 801}{24}}$ Wachstumskonstante !!

Dadurch folgt: $a = e^{\lambda} = e^{\ln\left(\frac{2384}{801}\right) \cdot \frac{1}{24}} = \left(e^{\ln\left(\frac{2384}{801}\right)}\right)^{1/24} = \left(\frac{2384}{801}\right)^{1/24} = \sqrt[24]{\frac{2384}{801}}$

$= 1{,}04649\ldots \approx 1{,}0465$

Einsetzen von λ z.B. in (1) liefert nach Umstellung:

$$N_0 = \frac{801}{e^{24\lambda}} = \frac{801}{e^{\cancel{24} \cdot \frac{1}{\cancel{24}} \cdot \ln(2384/801)}} = \frac{801}{e^{\ln\left(\frac{2384}{801}\right)}} = \frac{801}{\left(\frac{2384}{801}\right)} = \frac{801^2}{2384} = 269{,}127\ldots$$

$\boxed{e^{\ln a} = a}$

Da nur natürliche Zahlen Sinn machen, rechnen wir mit $\boxed{N_0 = 269}$

Das Wachstumsgesetz bzw. die Wachstumsfunktion lautet:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t} \approx 269 \cdot e^{0{,}0454 t}$$

5) Gesucht: $t_k > 0$ mit $N(t_k) \overset{!}{=} N_k = 1.000.000 = 10^6$.

Ansatz: $N(t_k) = N_0 \cdot e^{\lambda t_k} \overset{!}{=} N_k = 10^6 \xRightarrow{:N_0} e^{\lambda t_k} = \frac{10^6}{N_0} \xRightarrow{\ln(\ldots)} \lambda \cdot t_k = \ln\left(\frac{10^6}{N_0}\right)$

$= \ln(10^6) - \ln(N_0)$

$$\xRightarrow{:\lambda} \boxed{t_k = \frac{6 \cdot \ln(10) - \ln(N_0)}{\lambda}} \approx \frac{6 \cdot \ln(10) - \ln(269)}{0{,}0454} = 181{,}0748\ldots$$

Stunden!

$= 181\,h\ (\underbrace{0{,}0748\ldots \cdot 60}_{=4{,}4923\ldots})\,min = 181\,h\ 4\,min\ 29{,}538\ldots s$

Also zum Zeitpunkt $\boxed{t_k = 181\,h\ 4\,m}$ wird die kritische Populationsgröße erreicht und damit überschritten.

ENDE der Beispielaufgabe 26) !!