Vorlesung vom 09.01.2013 (die erste im neuen Jahr):

- Spezielle Werte für sin, cos, tan, cot
- Noch die Aufgabe Ü37 vom 9. Blatt
- Sinus- und Kosinussatz im allgemeinen Dreiecken
- Geometrische Anwendungsaufgaben dazu

1) Einige spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen:

a) $\alpha = 0° \hat{=} 0$ [RAD]:

{ „Entartetes" Δ
Gk zu α: $a = 0$
Ak zu α: $b = r$ (= Hy)

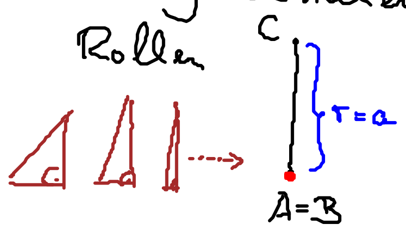
$$\sin(\alpha) = \frac{Gk}{Hy} = \frac{a}{r} = 0$$

$$\cos(\alpha) = \frac{Ak}{Hy} = \frac{b}{r} = 1, \quad \tan(\alpha) = \frac{Gk}{Ak} = \frac{a}{b} = \frac{0}{r} = 0, \quad \cot(\alpha) = \frac{Ak}{Gk} = \frac{b}{a} = \frac{r}{0} = \text{„}+\infty\text{"}$$

nicht definiert!!

b) $\alpha = 90° \hat{=} \pi/2$ [RAD]: Das Ganze noch einmal wie in a), aber mit vertauschten Rollen

Merke: $\boxed{90° = \frac{180°}{2} \hat{=} \frac{\pi}{2}}$

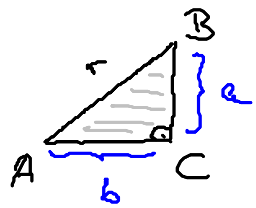


{ „Entartetes" Δ
Gk zu α: $a = r$ (= Hy)
Ak zu α: $b = 0$

$$\sin(\alpha) = \sin(90°) = \frac{Gk}{Hy} = \frac{a}{r} = 1, \quad \cos(\alpha) = \frac{Ak}{Hy} = \frac{b}{r} = \frac{0}{r} = 0,$$

$$\tan(\alpha) = \frac{Gk}{Ak} = \frac{a}{b} = \text{„}\frac{r}{0}\text{"} = \text{„}+\infty\text{"}, \quad \cot(\alpha) = \frac{Ak}{Gk} = \frac{b}{a} = \frac{0}{r} = 0.$$

c) $\alpha = 45° = \pi/4$ [RAD]



{ Gleichschenkliges Δ
mit Gk = Ak $\Leftrightarrow a = b$

Pythagoras: $r^2 = a^2 + b^2 = 2 \cdot a^2 = (\sqrt{2} \cdot a)^2$
$\Leftrightarrow r = \sqrt{2} \cdot a$

$$\sin(\alpha) = \sin(45°) = \frac{Gk}{Hy} = \frac{a}{r} = \frac{\cancel{a}^{\,1}}{\sqrt{2} \cdot \cancel{a}_{\,1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

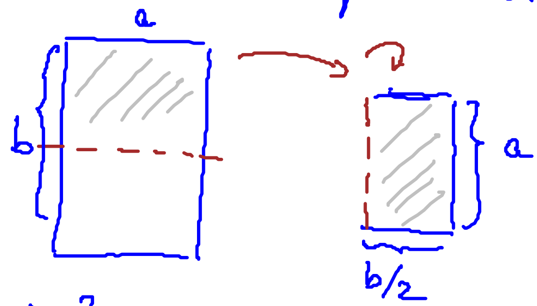
bzw. $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071\ldots$

$\cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ taucht im Alltag z.B. beim Kopieren als Folge DIN A-Norm auf!!

Das Besondere an der DIN A-Norm:

Idee: Blatt sollte so formatiert sein, dass ein Durchtrennen in der Mitte ein „ähnliches" Papier mit denselben Seitenverhältnissen ergibt.



Es soll gelten:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b/2} = a \cdot \frac{2}{b} = 2 \cdot \frac{a}{b}$$

„großes" Papier!

$\cdot \frac{b}{a}$ $\Longrightarrow$ $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = 2$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{b}{a} = \sqrt{2}}$

DIN A-Zahl

DIN A 4: $a = 21\,\text{cm}$

$\Longrightarrow b = \sqrt{2} \cdot a \approx 29{,}7\,\text{cm}$

Zurück zu den Werten von sin, cos, tan, cot:

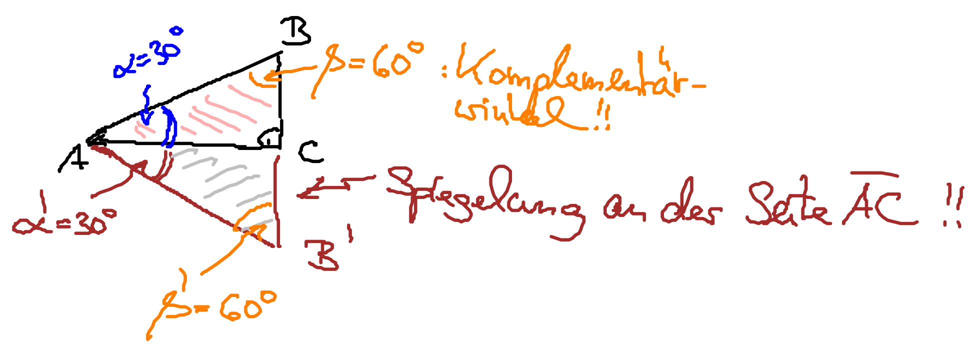
$$\cos(\alpha) = \cos(45°) = \frac{Ak}{Hy} = \frac{b}{r} = \frac{\cancel{a}}{\sqrt{2} \cdot \cancel{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707..$$

$$\tan(\alpha) = \frac{Gk}{Ak} = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1, \quad \cot(\alpha) = \frac{Ak}{Gk} = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

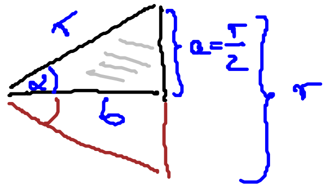
Achtung: Bei der sogenannten Umkehrfunktion Arcustangens ergibt sich (z. Taschenrechner): $\boxed{\arctan(1) = 45° = \frac{\pi}{4}}$

Taschenrechnertaste: „$\tan^{-1}$"

d) $\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$ [RAD]:



Das Dreieck $\triangle ABB'$ ist ein Dreieck mit 3 gleichgroßen Winkeln, also ist das Dreieck gleichseitig!!



Es ist $\boxed{a = \frac{r}{2}}$ und b (wegen Pythagoras):

$$b^2 = r^2 - a^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{4r^2 - r^2}{4} = \frac{3}{4} r^2$$

$$\Longrightarrow b = \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$\sin(\alpha) = \sin(30^\circ) = \frac{a}{r} = \frac{r/2}{r/1} = \frac{\cancel{r} \cdot 1}{2 \cdot \cancel{r}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{r} = \frac{1}{\cancel{r}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cancel{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{r/2}{\sqrt{3} r/2} = \frac{\cancel{r}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3} \cdot \cancel{r}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \sqrt{3}$$

e) $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ [RAD]: Jetzt gilt

Komplementärwinkel

$$\sin(60^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(60^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \tan(60^\circ) = \cot(30^\circ) = \sqrt{3}$$

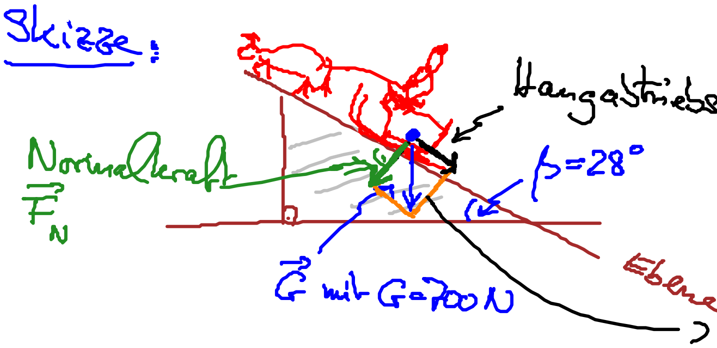
$$\cot(60^\circ) = \tan(30^\circ) = 1/\sqrt{3}$$

Beachte: $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ$ ist der Komplementärwinkel!!

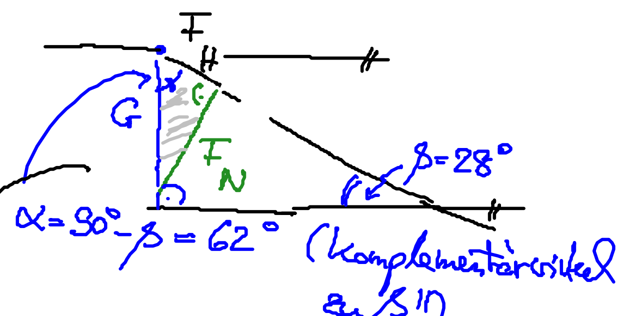
---

2) Die Aufgabe Ü37:

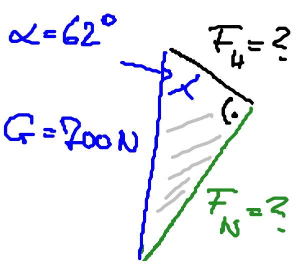
Skizze:



Gesucht: F_H als Größe, F_N als Größe.



Vergrößert: noch einmal!



Beachte: $\vec{F}_N \perp \vec{F}_H$

$$\cos(\alpha) = \cos(62°) = \frac{Ak}{Hy} = \frac{F_H}{G} \Rightarrow \boxed{F_H = G\cdot\cos(\alpha) = 700\cdot\cos(62°)}$$
$$= 700\cdot\sin(28°) \approx \boxed{328{,}63}$$

komplementär-winkel!

Analog:

$$\sin(\alpha) = \sin(62°) = \frac{Gk}{Hy} = \frac{F_N}{G} \Rightarrow \boxed{F_N = G\cdot\sin(\alpha) = 700\cdot\sin(62°) = 700\cos(28°)}$$
$$\approx 618{,}06$$

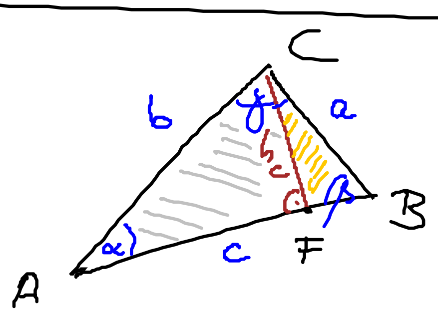
Antwort: Die Hangabtriebskraft beträgt ca. $\boxed{F_H \approx 328{,}6 \text{ N}}$ und die Normalkraft $F_N \approx 618{,}1$ N.

„rechts" für die Rentiere!

Probe: $F_H^2 + F_N^2 \approx 328{,}63^2 + 618{,}06^2 \approx 489.995{,}84 \approx 700^2 = 490.000 = G^2$

3) Trigonometrie in allgemeinen Dreiecken: Sinus- und Kosinussatz

A) Sinussatz:



Gegeben: ΔABC sowie die Höhe (=Lot) von C auf die Seite $\overline{AB}$: h_c

F: Lotfußpunkt zur Höhe h_c auf $\overline{AB}$

Dann hat man 2 rechtwinklige Dreiecke: ΔACF und ΔBCF. h_c ist Gk sowohl zu α als auch zu β. Daher:

In ΔACF: $\sin\alpha = \frac{Gk}{Hy} = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha$

In ΔBCF: $\sin\beta = \frac{Gk}{Hy} = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a\cdot\sin\beta$

$\Rightarrow b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$

:ab $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}}$

Analog erhält man durch Betrachtung der Höhe h_A bezüglich β und γ sowie b und c: $\boxed{\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$

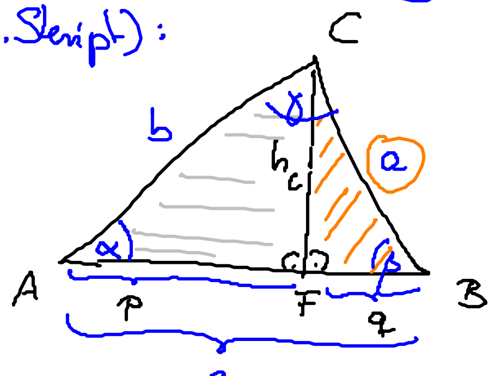
Also ist „alles gleich":

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$$

Sinussatz!!

3) Kosinussatz: (= Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras)

Skizze (s. Skript):



Der Lotfußpunkt F zur Höhe h_c von C auf die Seite $\overline{AB}$ zerlegt die Seite c in die 2 Teile p und q; d.h.: $p+q=c$

Betrachte die beiden rechtwinkligen Δe ΔACF und ΔBCF:

In ΔACF: $\underbrace{b^2=p^2+h_c^2}_{\text{Pythagoras}} \Rightarrow h_c^2 = b^2-p^2$

In ΔBCF: $a^2=q^2+h_c^2 \Rightarrow h_c^2 = a^2-q^2$

$\Rightarrow b^2-p^2 = a^2-q^2 \; (=h_c^2)$

$\xRightarrow{+q^2}$ $a^2 = b^2+q^2-p^2 = b^2+(\underbrace{q+p}_{=c})(\underbrace{q-p}_{c-p}) = b^2+c\cdot(c-2p)$

$= b^2+c^2-2pc \overset{(*)}{=} b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ $(bc\cos\alpha = p\cdot c)$

(*) In ΔACF:

$\cos\alpha = \frac{Ak}{Hy} = \frac{p}{b} \Rightarrow \boxed{p = b\cdot\cos\alpha}$

Also insgesamt: $\boxed{a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha}$ Kosinussatz bezügl. α

Analog gilt:

$\boxed{b^2 = a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta}$, $\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}$

Kosinussatz bezügl. β — Kosinussatz bezügl. γ

Sonderfall: $\gamma = 90° = \pi/2 \Rightarrow \cos\gamma = \cos 90° = 0$

$\Rightarrow c^2 = a^2+b^2$ // Pythagoras!!

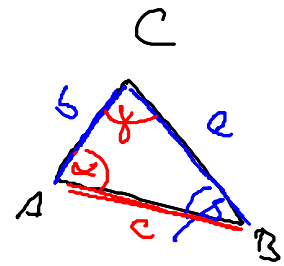
---

4) 10. Blatt:

38 Ü(a) Im Dreieck ΔABC (beliebiges Dreieck) sei bekannt:

$a = 179\,[m]$, $b = 208{,}3\,[m]$, $\beta = 106°$

Gesucht: c, α, γ



Hier Sinussatz, da Fall (SSW):

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \Big| \cdot a \quad \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{b}\cdot\sin\beta = \frac{179}{208{,}3}\cdot\sin 106^\circ = 0{,}82604\ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \arcsin(0{,}82604\ldots) = 55{,}695\ldots^\circ \approx 55{,}7^\circ}$$

Arcussinus = „$\sin^{-1}$"

Jetzt mit Winkelsumme im Dreieck: $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 55{,}7^\circ - 106^\circ = 18{,}3^\circ}$$

Bleibt noch c: Sinussatz liefert: $\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \boxed{c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot b}$

Also: $\boxed{c = \frac{\sin 18{,}3^\circ}{\sin 106^\circ}\cdot 208{,}3 = 68{,}0403\ldots \approx 68{,}0}$ [m]

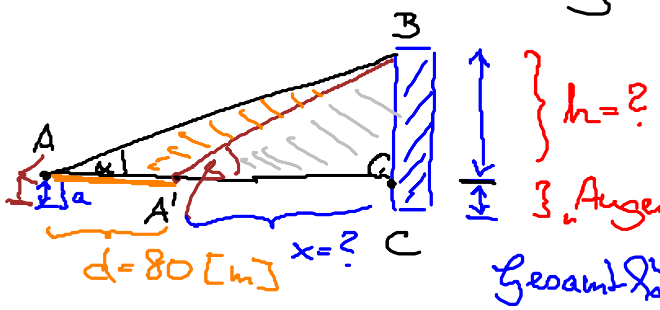
Probe: Kosinussatz würde liefern:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma = 179^2 + 208{,}3^2 - 2\cdot 179\cdot 208{,}3\cdot\cos 18{,}3^\circ$$

$$= 4629{,}3029\ldots \quad \Big| \sqrt{\ } \quad \Rightarrow c \approx \sqrt{4629{,}9} \approx 68{,}04$$

Jetzt noch

Ü 39 Es geht um eine Höhenvermessung!!



„Augenhöhe" $a = 1{,}60$ [m] vorgegeben

Gesamthöhe: $h + a$!!

Bekannt: $a = 1{,}60\,[m]$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $d = 80\,[m]$

Spezialfall rechtwinkliges Δ !!

In ΔABC: $\tan\alpha = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{!}{=} \frac{Gk}{Ak} = \frac{h}{x+d}$ $\Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(x+d) = \frac{1}{\sqrt{3}}(h+d)$

In $\Delta A'BC$: $\tan\beta = \tan 45^\circ = 1 \overset{!}{=} \frac{Gk}{Ak} = \frac{h}{x}$ $\Rightarrow h = x$

$\cdot\sqrt{3}$

$\Longrightarrow \sqrt{3}\cdot h = h + d$ $\quad -h$ $\quad \Longrightarrow \sqrt{3}\cdot h - h = (\sqrt{3}-1)h = d = 80 \Rightarrow h = \frac{d}{\sqrt{3}-1} = \frac{80}{\sqrt{3}-1}$

$\Longrightarrow \boxed{h \approx 109{,}28\,[m]}$. Gesamtbauhöhe: $\boxed{h + a \approx 110{,}88\,[m]}$

$a = 1{,}60\,[m]$

ENDE der Vorlesung !

Hausaufgaben zur nächsten Woche: Alles, was „H" heißt...