Vorlesung vom 07.11.2012:

- Kommadarstellung rationaler Zahlen in beliebigen b-adischen Systemen
- Einstieg in die mathematische „Termodynamik" ← Anwendung allgemeiner Rechenregeln / Binomische Formeln!!

⟷ wichtiges Stichwort: „Faktorisierung" von Termen = Zerlegung in ein Produkt!!

---

Zu Aufgabe 6 (2. Blatt):

Thema: Wandlung eines Quotienten $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ← Menge der rationalen Zahlen in eine Kommazahl

$x = \frac{p}{q} \longrightarrow x = (\underset{??}{\ldots,\ldots})_b$ mit Basis $b \geq 2$.

Beispiel 6 Ü(a)

$x = \frac{25}{81}$ zu $\boxed{b=3}$:

triadische Darstellung?

(i) mittels Wandlung des Zählers in eine b-adische Zahl und Kommaverschiebung:

$x = \frac{25}{81} = \frac{25}{3^4}$. Wir suchen die Darstellung $p = 25 = (\ldots)_3$:

"$(3^2)^2 = 3^4$"

| p | DIV 3 | MOD 3 |
|---|---|---|
| 25 | 8 | 1 |
| 8 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 2 |

Denn: $25 = 3 \cdot 8 + 1$ (Rest)

$8 = 3 \cdot 2 + 2$

$2 = 3 \cdot 0 + 2$

ganzzahliger Anteil von $\frac{25}{3}$.

arabische „Lesrichtung"

$\Rightarrow \boxed{p = (221)_3}$

Also: $x = \frac{p}{q} = \frac{25}{81} = \frac{(221)_3}{3^4} = (221)_3 \cdot 3^{-4}$

$= (0{,}0221)_3$

$n=4$ Verschiebungen!

Bemerkung: Im Faktor $\frac{1}{q} = 3^{-4}$ steckt im Exponenten $n=-4$ (zur Basis $b=3$) die Information, dass die Zahl bezüglich des Kommas um 4 Stellen nach rechts „geshiftet" wird.

(ii) Alternativ kann man wie im Dezimalsystem die schriftliche fortgesetzte Division mit Rest durch den Nenner q durchführen.

Im Dezimalsystem:

$25 : 81 = 0{,}3086\ldots$

```
 250
-243
 ---
  70     70 = 7·10
  700    700 = 70·10
 -648
 ----
   520
  -486
  ----
    340
    usw.
```

Im b-adischen System (hier: $b=3$):

$25 : 81 = (0{,}0221)_3$

```
 75 = 25·3
  (·3)
 225 = 75·3
-162
 ----
  63  (·3)
 189 = 63·3
-162
 ----
  27
  81 = 27·3
 -81
```

Also:

$$\boxed{x = \frac{25}{81} = (0{,}0221)_3}$$

„Tabellarische" Schreibweise für die fortgesetzte Division mit Rest:

| $p$ | DIV $\overset{q}{81}$ | MOD $\overset{q}{81}$ |
|---|---|---|
| 25 | 0 | 25 |
| 75 | 0 | 75 |
| 225 | 2 | 63 |
| 189 | 2 | 27 |
| 81 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | |
| ⋮ | ⋮ | |

$25 \cdot 3 = 75$

$\cdot b$

Abbruch, d.h. endlich viele Nachkommastellen!!

$$\boxed{x = \frac{25}{81} = (0{,}0221)_3}$$

Beispiel eines „gemischten" Bruches:

$x = \frac{1125}{81} = (\ldots)_3$ ?? : $\frac{1125}{81} = \underline{\underline{13}} + \frac{72}{81} = 13\frac{72}{81}$

ganzzahliger Anteil! „echter" Bruch!

Also: $x = \frac{1125}{81} = a + \frac{p}{q}$ mit $a = 13$, $p = 72$, $q = 81$.

$a = 13 = (\quad)_3$

| $a$ | DIV 3 | MOD 3 |
|---|---|---|
| 13 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

$\Rightarrow a = 13 = (111)_3$

$\frac{p}{q} = \frac{72}{81} = (0,\ldots)_3$ ??

| $p$ | DIV 81 | MOD 81 |
|---|---|---|
| 72 | 0 | 72 |
| 216 | 2 | 54 |
| 162 | 2 | 0 |

$72 \cdot \underline{\underline{3}} = 216$

Abbruch!!

$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9} = (0{,}22)_3$

$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} = \frac{2 \cdot 3 + 2}{9}$

$= \frac{8}{9} = \frac{72}{81}$ ✓

Insgesamt:

$x = \frac{1125}{81} = 13 + \frac{72}{81} = (111)_3 + (0{,}22)_3 = (111{,}22)_3$

Wir wenden jetzt das Verfahren (ii) von Aufgabe 6 in Aufgabe 7 an!! Druckfehler?

7 Ü(a)

$x = \frac{2}{11}$ zur Basis $b = 2$ :

| $p$ | DIV $\overset{q}{11}$ | MOD $\overset{q}{11}$ |
|---|---|---|
| 2 | 0 | 2 |
| 4 | 0 | 4 |
| 8 | 0 | 8 |
| 16 | 1 | 5 |
| 10 | 0 | 10 |
| 20 | 1 | 9 |
| 18 | 1 | 7 |
| 14 | 1 | 3 |
| 6 | 0 | 6 |
| 12 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 2 |
| 4 | 0 | 4 |

Vorkomma-bereich

Nachkomma-bereich

1 Perioden-„Pattern" der Länge $\boxed{\lambda = 10}$ (griech. Lambda)

Also: wichtig!

$$\boxed{x = \frac{2}{11} = (0,\overline{0010111010})_2}$$

Vorkomma

$$= (0,2)_{11}$$

Fragen: (i) Woran hängt es, dass für eine rationale Zahl $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ zu einer beliebigen Basis immer entweder ein endlicher oder ein unendlicher periodischer b-adischer Bruch entsteht?

(ii) Und wie lang kann in Abhängigkeit von $q$ eine Periode maximal werden?

Antworten: (i) Da fortlaufend durch $q$ mit Rest geteilt wird und es zu $q$ genau $q-1$ nicht-triviale Reste gibt (d.h. Rest $\neq 0$), so trifft man spätestens im $q$-ten Schritt auf einen „alten Bekannten" $\Rightarrow$ Endlosschleife!!

(ii) Da Wiederholung spätestens im $q$-ten Schritt auftritt, gilt für die Periodenlänge $\lambda$ : $\boxed{1 \leq \lambda \leq q-1}$

**Fazit:** Jede rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ liefert in einem b-adischen System entweder einen endlichen oder einen unendlichen periodischen b-adischen Bruch (= Kommazahl) mit maximaler Periodenlänge $\lambda \leq q-1$.

**Neue Frage:** Ist umgekehrt jeder endliche bzw. unendlich periodische b-adische Bruch „Repräsentant" einer rationalen Zahl $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$?

**Antwort:** Ja; das zeigt die Aufgabe 8 „exemplarisch".

Vorweg 2 Beispiele im Dezimalsystem:

1) $x = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ ??

„Trickkiste": Kommaverschiebung!!

$$\underline{10}\,x = 3,\overline{3} \quad (1)$$
$$b. \qquad x = 0,\overline{3} \quad (2)$$

$$(1)-(2):\ 9x = 3,0 = 3 \ \overset{:9}{\Longrightarrow}\ \boxed{x = \frac{\cancel{3}}{\cancel{9}_3} = \frac{1}{3}}$$

$$10x = 3,\overline{3} = 3,3333\ldots$$
$$x = 0,\overline{3} = 0,3333$$

2) $x = 0,\overline{9} \overset{?}{=} 1$, denn:
$= 0,99999\ldots$

$$10x = 9,\overline{9}$$
$$-\,|\quad x = 0,\overline{9}$$
$$9x = 9,0 = 9 \ \overset{:9}{\Longrightarrow}\ x = \frac{9}{9} = 1 = 3\cdot\tfrac{1}{3}$$
$$= 3\cdot 0,\overline{3} = 0,\overline{9}$$

**Konkret:** Aufgabe

(8) Ü(a) $\quad x = (0,\overline{1011001})_2 = (0,1011001\,1011001\,1011001\ldots)_2$

Periodenlänge: $\lambda = 7$, Basis: $b = 2$

Kommaverschiebung um eine Periodenlänge:

$$b^{\lambda}\cdot x = 2^7\cdot x = (1011001,\overline{1011001})_2 \quad (1)$$
$$-\,|\quad 1\cdot x = (0,\overline{1011001})_2 \quad (2)$$

$(1)-(2): \; (2^7-1)x = (1011001)_2$

$\Leftrightarrow \; 127\,x = (1011001)_2 \;\xRightarrow{:127}\; x = \frac{(1{,}011001)_2}{127} = \frac{(131)_8}{127} = \frac{89}{127} \in \mathbb{Q}$

Hornerrede:

| | 1 | 3 | 1 |
|---|---|---|---|
| ·8 | 0 | 8 | 88 |
| + | 1 | 11 | 89 |

Probe: $x = \frac{89}{127} = ?$

| P | DIV 127 | MOD 127 |
|---|---|---|
| 89 | 0 | 89 |
| 178 | 1 | 51 |
| 102 | 0 | 102 |
| 204 | 1 | 77 |
| 154 | 1 | 27 |
| 54 | 0 | 54 |
| 108 | 0 | 108 |
| 216 | 1 | 89 |
| 178 | ... | ... |

Periodenlänge $\ell = 7$

$x = \frac{89}{127} = (0{,}\overline{1011001})_2$

Neues Thema: „Termodynamik" ← im „alten" Sinne: Algebra

In der Mathematik geht es ganz oft darum, Lösungen von „Nullgleichungen" zu finden. Ein wichtiges Mittel, um dann Lösungen zu finden, besteht darin, den untersuchten Term zu faktorisieren. Denn im Bereich der Zahlen gilt:

$\boxed{\underbrace{a \cdot b}_{\text{Produkt}} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0}$ bzw. logisch äquivalent:

$\boxed{a \neq 0 \text{ und } b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0}$ Nullteilerfreiheit!

z.B.: $\boxed{\underbrace{x^2-1}_{(x+1)\cdot(x-1)} = 0}$

$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

3 Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2-b^2}$

$\Leftrightarrow \; \underbrace{(x+1)}_{a}\cdot\underbrace{(x-1)}_{b} = 0 \Rightarrow \underbrace{x+1}_{a} = 0 \text{ oder } \underbrace{x-1}_{b} = 0$

3. Binom!!

$\Rightarrow x = -1$ oder $x = +1$

$\Rightarrow$ Die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ hat also genau 2 Lösungen „nämlich“ $\boxed{x_1 = -1, \; x_2 = +1}$ bzw. $\boxed{x_{1/2} = \pm 1}$

Dazu (Faktorisierung)

Aufgabe 9 Ü(a) $\boxed{a + a^2 = a \cdot (1 + a)} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a = 0$ oder $a = -1$

Verfahren: Ausklammern = Distributivgesetz
$a \cdot (b + c) = ab + ac$

Aufgabe 10, 11: Anwendung der Binomischen Formeln „vor- und rückwärts“ $\leftarrow$ „Ausklammern“

Dazu gesellt sich das generelle schlagkräftige Werkzeug „Substitution“ genannt.

$u = a^2, v = b^2$ Substitutions„wolke“

(10) Ü(a) $\underbrace{(a^2+b^2)^2}_{\text{1. Binom!}} - \underbrace{(a^2-b^2)^2}_{\text{2. Binom}} = (u+v)^2 - (u-v)^2$

1. Binom! $(u+v)^2$ = 2. Binom $(u-v)^2$

$u = a^2$, $v = b^2$

$$= (u^2 + 2uv + v^2) - (u^2 - 2uv + v^2)$$
$$= \cancel{u^2} + 2uv + \cancel{v^2} - \cancel{u^2} + 2uv - \cancel{v^2} = 4uv$$
$$= 4a^2b^2$$

Ohne „u“, „v“:

$$\underbrace{(a^2+b^2)^2}_{\text{1. Binom!}} - \underbrace{(a^2-b^2)^2}_{\text{2. Binom!}} = \left((a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2\right) - \left((a^2)^2 - 2a^2b^2 + (b^2)^2\right)$$
$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^4 + 2a^2b^2 - b^4 = 4a^2b^2$$

$=0$ $=0$

Zur kommenden Woche:

Alle H-Aufgaben zu Aufgabe 7 bis 11 !!

ENDE der Vorlesung !!