Vorlesung vom 06.02.2013 (die vorletzte):

- Noch eine Ü-Aufgabe (Textaufgabe) zu quadratische Gleichung
- Nullstellen von Polynomen höherer Ordnung finden

1) Ü51 Es geht um eine Aufgabe der Physik:

Ohmsches Gesetz: $\boxed{R = \frac{U}{I}}$

R(esistance): Widerstand
I: Stromstärke
U: Spannung

Gleich-strom-kreis!!

Übersetzung des Textes:

Bekannt: $U = 220$ [V] konstant!

Veränderung von R und I: $R_{alt} = x$ unbekannt! $R_{neu} = x + 30$

Einheiten: Ω (Ohm)

$I_{alt} = y \qquad I_{neu} = y - 1{,}65$ || A(mpere)

Beide Größen R, I sind durch das Ohmsche Gesetz „verbandelt":

$$\underline{R_{alt} \cdot I_{alt}} = \underline{\underline{U}} = \underline{R_{neu} \cdot I_{neu}}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{xy = \underline{\underline{220}}} = (x+30)(y-1{,}65) = xy - 1{,}65x + 30y - 49{,}5$$

1. Variante: Umstellen auf eine Unbekannte:

Aus $\cancel{xy} = \cancel{xy} - 1{,}65x + 30y - 49{,}5$ folgt:

nach „y" umstellen!

$$0 = -1{,}65x + 30y - 49{,}5 \quad \xRightarrow{\cdot(-1)} \quad \boxed{1{,}65x - 30y + 49{,}5 = 0}$$

$$\xRightarrow{+30y} 30y = 1{,}65x + 49{,}5$$

$$\xRightarrow{:30} \boxed{y = \frac{1{,}65}{30}x + \frac{49{,}5}{30} = 0{,}055x + 1{,}65}$$

y-Term einsetzen ins Ohmsche Gesetz bzw. in:

$$x \cdot \underline{\underline{y}} = x \cdot \underline{(0{,}055x + 1{,}65)} = 220$$

$$R \cdot I = R \cdot I = U$$

$$\Rightarrow 0{,}055x^2 + 1{,}65x = 220 \quad \xRightarrow{:0{,}055} \quad x^2 + \underbrace{\frac{1{,}65}{0{,}055}}_{30}x = \underbrace{\frac{220}{0{,}055}}_{4{,}000}$$

$$\xRightarrow{-4{,}000} \boxed{x^2 + 30x - 4{,}000 = 0}$$

quadratische Gleichung!!

2.Variante: Umstellung des Ohmschen Gesetzes (alt) auf „y" ergibt:

$$x \cdot y = 220 \Rightarrow \boxed{y = \frac{220}{x}}$$ Einsetzen in: $U = R_{neu} \cdot I_{neu}$:

$R \cdot I = U$

$$220 = (x+30)(y-1{,}65) = (x+30)\left(\frac{220}{x} - 1{,}65\right) = 220 \frac{x}{x} - 1{,}65x + \frac{6.600}{x} - 49{,}5$$

$$\Rightarrow 220 = 220 - 1{,}65x + \frac{6600}{x} - 49{,}5 \quad | \cdot x$$

$$\Rightarrow \cancel{220x} = \cancel{220x} - 1{,}65x^2 + 6.600 - 49{,}5x \quad | -220x$$

$$\Rightarrow 0 = -1{,}65x^2 - 49{,}5x + 6.600 \Rightarrow x^2 + \frac{49{,}5}{1{,}65}x - \frac{6.600}{1{,}65} = 0 \quad | :(-1{,}65)$$

$\frac{49{,}5}{1{,}65} = 30$, $\frac{6.600}{1{,}65} = 4.000$

Also: $\boxed{x^2 + 30x - 4.000 = 0}$

Jetzt Ermittlung der Lösung:

$$x^2 + 30x - 4000 = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = 30,\ c = -4.000$$

Diskriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4.000) = 900 + 16.000 = 16.900 > 0$

$\Rightarrow$ Es gibt 2 reelle Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30 \pm \sqrt{16.900}}{2 \cdot 1} = \frac{-30 \pm 130}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{100}{2} = 50,\quad x_2 = -\frac{160}{2} = -80}$$

Probe (Vieta): (1) $x_1 + x_2 = 50 - 80 = -30 \overset{!}{=} -\frac{b}{a} = \frac{-30}{1}$ ✓

(2) $x_1 \cdot x_2 = 50 \cdot (-80) = -4.000 \overset{!}{=} \frac{c}{a} = \frac{-4.000}{1}$ ✓

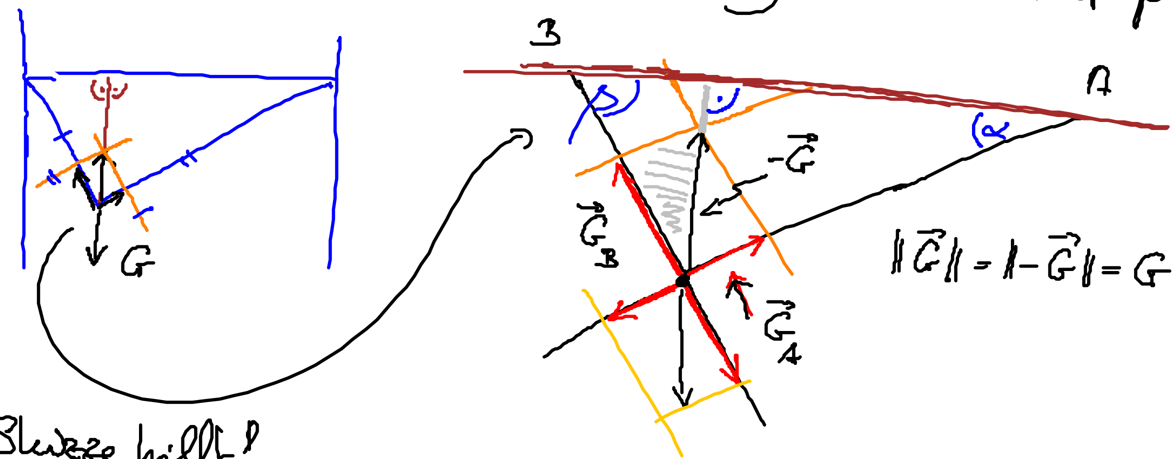
Antwort: Da Ohmsche Widerstände positive Werte haben, haben wir als eindeutige Lösung unseres Problems: $\boxed{R = x = 50\,[\Omega]}$.

Daraus ergibt sich für die Stromstärke:

$$\boxed{I = \frac{U}{R} = \frac{220}{50} = 4{,}4\,[A]}$$

Zur Aufgabe 3 Probeklausur:

Bei der „Aufteilung der Kräfte" entsteht ein sogenanntes Kräfteparallelogramm:



$\|\vec{G}\| = \|-\vec{G}\| = G$

Skizze hilft!

Beachte die Änderung der Formulierung zu Aufgabe 2 im Netz!!

Neuer Teil: Auf dem Weg zu Aufgabe 57 (siehe auch Probeklausur-Aufgabe 6)

$\Rightarrow$ siehe Skript S. 21/22 !!

Wir steigen in die Aufgabe 57 ein. Vorweg noch einmal Polynomdivision mit Horner:

57 Ü(a) Polynom $\boxed{p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2}$

Auswertung (= Funktionswert) des Polynoms an der Stelle $x_0 = 3$

heißt: Berechne $p(3) = 3^3 + 2\cdot 3^2 - 3^1 - 2\cdot 3^0 = 27 + 2\cdot 9 - 3 - 2$

bei b-adischen Zahldarstellungen $= 27 + 18 - 5 = 40$

Horner:

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	2	-1	-2
$x_0 = 3$	0	3	15	42
+	1	5	14	40

$40 = p(3)$

Polynomdivision von $p(x)$ durch $(x - x_0) = (x-3)$:

$$p(x) : (x-3) = (x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x-3) = x^2 + 5x + 14 + \frac{40}{x-3}$$

$$\begin{array}{rl}
-| & x^3 - 3x^2 \\
\hline
 & 5x^2 - x - 2 \\
-| & 5x^2 - 15x \\
\hline
 & 14x - 2 \\
-| & 14x - 42
\end{array}$$

$\odot$ $\odot$ $\odot$

$\underline{\underline{40}}$ Rest!

Beziehungsweise: $\boxed{p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-3)\cdot\underbrace{(x^2+5x+14)}_{=q(x)} + \underbrace{40}_{=r(x)=p(3)}}$

Jetzt „intelligentes Raten" einer Nullstelle
(ergibt alle „möglichen rationalen Nullstellen $x_0 \in \mathbb{Q}$ des Polynoms $p(x)$)
Das Kriterium lautet (s. Skript S. 22 unten):

Ist $x_0 = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ mit $ggT(b,c) = 1$ (größter gemeinsamer Teiler) eine Nullstelle des Polynoms
$p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, dann
muss gelten: $\boxed{b \mid a_0 \text{ und } c \mid a_m}$ ganzzahliger Teiler („$|$")

Hier:
$y = p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \implies m = 3,\ \boxed{a_3 = 1},\ a_2 = 2,\ a_1 = -1,\ \boxed{a_0 = -2}$ ($m=3$)

Für jede rationale Nullstelle $x_0 = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ von $p(x)$ muss gelten:
$b \mid a_0 = -2$, $c \mid a_3 = 1 \implies b \in \{\pm 1, \pm 2\}$, $c \in \{\pm 1\}$

„kombiniere"!! $\implies \boxed{x_0 = \frac{b}{c} \in N_p = \{\pm 1, \pm 2\}}$ („$\frac{\pm 1}{1}$", „$\frac{\pm 2}{1}$")

„Nullstellenreservoir aus $\mathbb{Q}$ für $p(x)$"

Jetzt Durchtesten all dieser Möglichkeiten mit Horner (beinhaltet dann zugleich auch die Polynomdivision durch den linearen Term $(x - x_0)$)

$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

	a_3	a_2	a_1	a_0	
	1	2	−1	−2	
·2	0	2	8	14	
+	1	4	7	$12 = p(2) \neq 0$	keine Nullstelle!
·1	0	1	3	2	
+	1	3	2	$0 = p(1)$	$\implies \boxed{x_1 = 1}$ ist Nullstelle

$\implies x_1 = 1$ ist Nullstelle, und es gilt:
$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = \underbrace{(x-1)}_{x - x_0}\cdot(x^2 + 3x + 2) = (x-1)\cdot q(x)$

Betrachte nun weiter:

$q(x) = x^2 + 3x + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ b = 3,\ c = 2$

quadratisches Polynom!

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

$\Longrightarrow$ 2 weitere reelle Lösungen: $x_{2/3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{x_2 = \frac{-2}{2} = -1}, \quad \boxed{x_3 = \frac{-4}{2} = -2}$

Probe (Vieta):

$x_2 + x_3 = -1 - 2 = -3 \overset{!}{=} -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1}$ ✓

$x_2 \cdot x_3 = (-1)\cdot(-2) = +2 \overset{!}{=} \frac{c}{a} = \frac{2}{1}$ ✓

Dann haben wir:

$$\boxed{p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - \underbrace{x_1}_{1})(x - \underbrace{x_2}_{-1})(x - \underbrace{x_3}_{-2}) = (x-1)(x+1)(x+2)}$$

Zerlegung in Linear-faktoren

Folgerung:

$p(112) = (112-1)(112+1)(112+2) = 111 \cdot 113 \cdot 114 =$

Jetzt Beispiel

57 Ü(b) $\boxed{p(x) = 3x^4 - 13x^3 + 22x^2 - 18x + 4 \overset{!}{=} 0}$

Polynom 4. Grades!

„Westevorrat"

(i) 1. Schritt: Rationalen Nullstellenpool ermitteln und testen

$n = 4$: $a_0 = 4$, $a_n = a_4 = 3$ Dann: $x_0 = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ muss erfüllen:

$b \mid a_0 = 4$, $c \mid a_4 = 3 \Rightarrow b \in \{\pm 4, \pm 2, \pm 1\}$, $c \in \{\pm 3, \pm 1\}$

Kombination? $\Longrightarrow$ $\boxed{N_p = \{x_0 = \frac{b}{c} \mid b \mid 4,\ c \mid 3\}}$

$= \{\underbrace{\pm 1, \pm 2, \pm 4}_{c=1}, \underbrace{\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}}_{c=3}\}$ Nullstellenpool.

Hornertest:

Beachte: Für nicht auftretende Potenzen x^k steht der Koeffizient $a_k = 0$

Polynom vom Grad 3

	3	-13	22	-18	4
·2	0	6	-14	16	-4
+	3	-7	8	-2	0 = p(2)
·2	0	6	-2	12	
+	3	-1	6	10 ≠ 0	
·(+1/3)	0	+1	-2	2	
+	3	-6	6	0 = p(1/3)	

$0 = p(2) \Rightarrow \boxed{x_1 = 2}$ ist erste N.St.

$0 = p(\frac{1}{3}) \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{3}} \in \mathbb{Q}$ ist zweite N.St.

quadratisches Polynom!

Es gilt: $p(x) = 3x^4 - 13x^3 + 22x^2 - 18x + 4$

$$= \underbrace{(x-2)}_{x-x_1}\underbrace{(x-\tfrac{1}{3})}_{x-x_2}\cdot(3x^2 - 6x + 6) \overset{!}{=} 0$$

Also: $3x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow a = 3, b = -6, c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot 3\cdot 6 = 36 - 72 = -36 < 0 \Rightarrow$ 2 komplexe Nullstellen!

$$\Rightarrow x_{3/4} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{+6 \pm i\sqrt{36}}{6} = \frac{6 \pm 6i}{6} = \frac{\cancel{6}(1 \pm i)}{\cancel{6}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_3 = 1 + i, \; x_4 = 1 - i = \overline{x_3}} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

"$-$": x_3 konjugiert!!

Wir erhalten schließlich als Zerlegung von $p(x)$ in Linearfaktoren:

$$p(x) = 3x^4 - 13x^3 + 22x^2 - 18x + 4 = (x-2)(x-\tfrac{1}{3})\cdot(3x^2 - 6x + 6)$$

$$= \underbrace{3}_{= a_4}\cdot(x-2)(x-\tfrac{1}{3})\cdot\underbrace{(x-(1+i))}_{(x-x_3)}\cdot\underbrace{(x-(1-i))}_{(x-x_4)} = 3(x-2)(x-\tfrac{1}{3})(x-1-i)(x-1+i)$$

gehört zu $q(x) = 3x^2 - 6x + 6$!

ENDE der Vorlesung!