Vorlesung vom 05.12.2012:

- Ein „Nachschlag" zu den Wurzeln → in Verbindung mit den 3. Binom
- Einstieg in das Logarithmieren → 2. Umkehroperation zum Potenzieren
- Logarithmengesetze

1) Es darf ein wenig „gewurzelt“ werden.

(21) Ü(a) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = ??$ } Ziel: „Vertreibe“ die „$\sqrt{\ }$“ aus dem „Keller“ des rationalen Ausdrucks

⇒ Also ist der mathematische „Kammerjäger“ gefragt.

Der Mathematiker hat hier einen „Standard“-(Zauber) trick

1. Idee (frei Band): Wenn $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$, dann potenziere bzw. genauer, quadriere den Ausdruck:

1./2. Binom

$$x^2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{(3-\sqrt{5})^2} = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{9-6\sqrt{5}+5} = \frac{14+6\sqrt{5}}{14-6\sqrt{5}}$$

2. Idee: Andere Schreibweise:

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+5^{1/2}}{3-5^{1/2}}$$

„verpuppte“ Wurzel

3. Idee: Erweitere mit „$\sqrt{5}$“:

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}+5}{3\sqrt{5}-5}$$

: Erweitere mit „Ergänzung“ zum 3. Binom:

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})}{\underbrace{(3-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})}_{3.\ \text{Binom!}}} = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{3^2-\underbrace{\sqrt{5}^2}_{=5}} = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{\overbrace{14+6\sqrt{5}}^{=2(7+3\sqrt{5})}}{4}$$

$$= \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = \frac{7}{2}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{5}$$

2. Beispiel:

$$\frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})+\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{3}-\sqrt{5})(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{5}^2}$$

2 Wurzeln!!

gehe dies zuerst an!

3. Binom $(a+b)(a-b)$

1. Binom $\quad \sqrt{5}^2 = 5$

$$= \frac{3+3\sqrt{3}-3\sqrt{5}+\sqrt{3}+3-\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{15}+5}{1+2\sqrt{3}+\underbrace{\sqrt{3}^2}_{3}-5} = \frac{11+4\sqrt{3}-4\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{-1+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{11+4\sqrt{3}-4\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{-1+2\sqrt{3}} \cdot \frac{-1-2\sqrt{3}}{-1-2\sqrt{3}} = \frac{(11+4\sqrt{3}-4\sqrt{5}-2\sqrt{15})(-1-2\sqrt{3})}{(-1)^2-(\underbrace{2\sqrt{3}}_{4\cdot 3})^2}$$

3. Binom

$$= \frac{-11-4\sqrt{3}+4\sqrt{5}+2\sqrt{15}-22\sqrt{3}-8\sqrt{3}^2+8\sqrt{15}+4\sqrt{45}}{1-12} \qquad \sqrt{45}=\sqrt{5\cdot 9}=3\sqrt{5}$$

$$= \frac{-11-4\sqrt{3}+4\sqrt{5}+2\sqrt{15}-22\sqrt{3}-24+8\sqrt{15}+12\sqrt{5}}{-11} = \frac{-35-26\sqrt{3}+16\sqrt{5}+10\sqrt{15}}{-11}$$

$\cdot \frac{(-1)}{(-1)}$

$$= \boxed{\frac{35+26\sqrt{3}-16\sqrt{5}-10\sqrt{15}}{11}} \qquad \sqrt{15}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$$

$$= \frac{35}{11}+\frac{26}{11}\sqrt{3}-\frac{16}{11}\sqrt{5}-\frac{10}{11}\sqrt{15}$$

---

2) Einstieg in das Logarithmieren:

Die Operation „Potenzieren" hat 2 Umkehroperationen: (i) Radizieren und (ii) Logarithmieren

Potenz:

$x = b^a$ bzw. $\boxed{b^a = c}$

Radizieren:

Löse $\boxed{x^n = c}$ „x": Basis gesucht.

Lösung: $x = \sqrt[n]{c}$

Logarithmieren:

$\boxed{b^x = c}$ „x": Exponent gesucht.

Lösung: $x = \log_b c$ — Logarithmus

Basis

„Numerus"

Erste Anwendung der Logarithmen als „Rechenzahlen" um das 15./16. Jh. herum → Logarithmentafeln, Rechenschieber!!

1. „Feindberührung" durch

22 Ü(a) Gesucht ist „x" mit 2/6

$x = \log_5(\sqrt[6]{25}) \Longleftrightarrow \boxed{5^{x} = \sqrt[6]{25} = 25^{1/6} = (5^2)^{1/6} = 5^{1/3}}$

Was ist die zugehörige Potenzgleichung?

$\Longrightarrow \boxed{x = \log_5(\sqrt[6]{25}) = \frac{1}{3}}$

Man argumentiert mit der Eindeutigkeit von Potenzen bei gegebener Basis, d.h. $x \neq y \Rightarrow b^x \neq b^y$ für $b>0, b\neq 1$; oder anders herum:

$\boxed{b^x = b^y \Longrightarrow x = y}$

Ü(e) $\log_x 25 = 2 \Longleftrightarrow x^2 = 25 \xrightarrow{\text{Radizieren!}} \boxed{x = \sqrt{25} = 5}$

gesucht!

Bzw.: $x^2 = 25 = 5^2$

Ü(j) $\log_2 x = 6 \Longleftrightarrow 2^6 = \boxed{x = 64}$

Potenzieren!!

---

3) Logarithmengesetze: ← sind quasi „umgedrehte" Potenzgesetze!!

Zunächst gilt: (i) $\boxed{b^{\log_b a} = a}$ ← D.h. Logarithmieren und Potenzieren zur selben Basis heben sich auf!

Beweis: $x = \log_b a \Longleftrightarrow b^{x} = a = b^{\log_b a}$ ✓ Analog: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

(ii) $\boxed{\log_b 1 = 0}$ Denn: $x = \log_b 1 \Longleftrightarrow b^{x} = 1 = b^{0}$

$\xRightarrow{\text{Exponentenvergleich}} \boxed{x = \log_b 1 = 0}$ ✓

(iii) $\boxed{\log_b b = 1}$ Denn: $x = \log_b b \Longleftrightarrow b^{x} = b = b^{1}$

„Basis b"

$\xRightarrow{\text{Exporegl.}} \boxed{x = \log_b b = 1}$ ✓

Weitere Gesetze/Regeln:

(1) $\boxed{\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$ ← Logarithmus wandelt ein Produkt in eine Summe!

(2) $\boxed{\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y}$ ← Logarithmus wandelt einen Quotienten in eine Differenz!

(3) $\boxed{\log_b(x^a) = a\cdot\log_b x}$ ← Logarithmus wandelt eine Potenz in ein Produkt.

Beweis zu (1): Setzt man $u := \log_b x$, $v := \log_b y$, dann gilt:

$$b^u = x,\ b^v = y \implies x\cdot y = b^u\cdot b^v = b^{u+v}$$

Potenzgesetz!

$$\overset{\text{Definition}}{\implies} u+v = \log_b(x\cdot y)$$

Definition Logarithmus über Potenzgleichung!

Also: $u+v = \log_b x + \log_b y = \log_b(x\cdot y)$ ✓

Beweis zu (2): Mit denselben u, v folgt:

$$b^u = x,\ b^v = y \implies \frac{x}{y} = \frac{b^u}{b^v} \overset{\text{Potenzgesetz}}{=} b^{u-v}$$

Potenzgleichung!!

$$\implies u-v = \log_b x - \log_b y = \log_b\left(\frac{x}{y}\right)$$ ✓

Beweis zu (3): Für $u := \log_b x$ gilt: $b^u = x \implies \underbrace{x^a}_{c} = (b^u)^a \overset{\text{Potenzgesetz!!}}{=} \underbrace{b^{a\cdot u}}_{= b^y}$

$$\implies \underbrace{a\cdot u}_{=y} = a\cdot\log_b x = \underbrace{\log_b(x^a)}_{=\log_b c}$$ ✓

Anwendung der Regeln / Gesetze in:

23 Ü(a) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2) - \frac{1}{2}\lg(a-b) - \frac{1}{2}\lg(a+b)$

$\lg := \log_{10}$ mit $b = 10$ heißt dekadischer oder Briggs'scher Logarithmus

$$= \frac{1}{3}\lg(a^2-b^2) - \frac{1}{2}\left[\lg(a-b) + \lg(a+b)\right]$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{3}\lg(a^2-b^2) - \frac{1}{2}\lg\left[(a-b)\cdot(a+b)\right]$$

3. Binom!

$$= \frac{1}{3}\lg(a^2-b^2) - \frac{1}{2}\lg(a^2-b^2) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}_{=\frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}}\lg(a^2-b^2)$$

$$= -\frac{1}{6}\lg(a^2-b^2) \overset{(3)}{=} \lg\left[(a^2-b^2)^{-1/6}\right] = \lg\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^2-b^2}}\right)$$

Beachte dabei, dass gelten muss:

$\boxed{a-b>0 \;,\; a+b>0}$, damit lg definiert ist!

$\Longrightarrow a^2-b^2 = (a-b)\cdot(a+b) > 0$

Zu Aufgabe 24: Übung/Tutorium mit Logarithmengesetzen in anderer Richtung!!

z.B.: 24 Ü(a) $\lg(a^4-b^4) = \lg[(a^2+b^2)(a^2-b^2)] \overset{(1)}{=} \lg(a^2+b^2) + \lg(a^2-b^2)$

Zerlege in ein Produkt (3. Binom)

$= \lg(a^2+b^2) + \lg[(a+b)(a-b)]$

noch einmal 3. Binom!

$\overset{(1)}{=} \lg(a^2+b^2) + \lg(a+b) + \lg(a-b)$

Dabei muss gelten, damit alle Terme definiert sind: $\boxed{\begin{matrix} a+b>0 \\ a-b>0 \end{matrix}}$

ENDE der heutigen Veranstaltung! Also alle H-Aufgaben von 21) bis 24)!