	Führt man aber die *imaginäre Einheit* $i := \sqrt{-1}$ als „neue Zahl" und Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ein, erhält man *zwei verschiedene komplexe Lösungen* für die quadratische Gleichung: $$x_1 = \frac{-b}{2a} + i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \; .$$ Insbesondere gilt: $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ *mit* $x_2 = \overline{x}_1$, d.h. beide Lösungen sind *konjugiert komplex*.
Probe für die beiden Lösungen x_1 und x_2 (*Satz von Vieta*):	Ist $a x^2 + b x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, so folgt: (i) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ und (ii) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Dies gilt sowohl im *reellen* als auch im *komplexen* Fall, wobei man in (ii) $i^2 = -1$ verwendet.

Bemerkungen:

- Es gibt eine Reihe anderer Gleichungen, die sich auf die quadratische Gleichung zurückführen lassen. Ein Beispiel ist die *biquadratische Gleichung (4. Grades)*, die da lautet: $\boxed{a x^4 + b x^2 + c = 0}$. *Substituiert* man in dieser Gleichung $\boxed{y = x^2}$, so erhält man die quadratische Gleichung $a y^2 + b y + c = 0$. Ist y_0 eine Lösung dieser quadratischen Gleichung, so erhält man mit $\boxed{x_1 = \sqrt{y_0}}$, $\boxed{x_2 = -\sqrt{y_0}}$ zwei Lösungen der Ausgangsgleichung.

  Beachte: Im Fall $y_0 < 0$ sind beide Lösungen x_i *rein imaginär* und damit *konjugiert komplex*.

- Neben der quadratischen bzw. biquadratischen Gleichung möchte man gerne allgemeine *algebraische Gleichungen* mit reellen *Koeffizienten* der Form

  $(*)$ $\boxed{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$ mit $a_k \in \mathbf{R}$, $a_m \neq 0$ $(k = 1, \ldots m)$

  lösen. Die Mathematiker im 16./17. Jh. haben allgemeine Lösungsformeln für die Fälle $m = 3$ (*kubische* Gleichung) und $m = 4$ entdeckt bzw. entwickelt. Doch konnte man im 19. Jh. beweisen, dass es für $m \geq 5$ keine allgemeinen Lösungsformeln mehr zur Berechnung der *Wurzeln* $x \in \mathbf{C}$ der Gleichung $(*)$ gibt. Man nennt die Lösungen $x \in \mathbf{C}$ von $(*)$ auch die *Nullstellen* des Polynoms $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$

- Allerdings hat der deutsche Mathematiker *C.F. Gauß* als erster den sogenannten *Fundamentalsatz der Algebra* bewiesen. Dieser Satz besagt, dass *jede* Gleichung $(*)$ mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbf{R}$ - ja sogar mit *komplexen* Koeffizienten $a_k \in \mathbf{C}$ - genau m Lösungen besitzt. Dabei können Wurzeln auch *mehrfach* auftreten, müssen also nicht notwendig paarweise verschieden sein. Diese Wurzeln oder Nullstellen sind aber i.a. sogenannte *komplexe Zahlen* der Form $z = x + iy$ mit $x,y \in \boldsymbol{R}$ und $i^2 = -1$.

- Will man ein gegebenes Polynom $(*)$ $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ an einer konkreten *Stelle* $x_0 \in \boldsymbol{R}$ bzw. $x_0 \in \boldsymbol{C}$ auswerten, dann bedient man sich des schon bekannten *Hornerschemas*, welches man zur *Umrechnung b-adischer Zahldarstellungen* der Form $x = \left(a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0\right)_b$ in das Dezimalsystem benutzt hat (siehe Anfang des Skripts). Dabei gilt: $x = a_m \cdot b^m + a_{m-1} \cdot b^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0 = p(b)$ mit dem Polynom $p(y) = a_m \cdot y^m + a_{m-1} \cdot y^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot y + a_0$.
- Die *Polynomdivision* eines Polynoms $p(x)$ durch einen *linearen Term* der Form $x - x_0$ ist im Hornerschema zur Berechnung des Funktionswertes $p(x_0)$ an der Stelle $x_0 \in \boldsymbol{R}$ quasi automatisch mit enthalten.
  Die Zahlen c_m bis c_0 in der letzten Zeile im Hornerschema (siehe Skript S. 4 oben) liefern nämlich für die Polynome $q(x)$ und $r(x)$ mit $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x) + r(x)$ gerade die *Koeffizienten*. Insbesondere gilt: $q(x) = c_m \cdot x^{m-1} + c_{m-1} \cdot x^{m-2} + \ldots + c_2 \cdot x + c_1$ sowie $r(x) \equiv c_0 = p(x_0)$. Im Falle einer *Nullstelle* x_0 von $p(x)$ folgt speziell $r(x) \equiv 0$.
- Um algebraische Gleichungen $(*)$ $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ konkret zu lösen, geht man mit Hilfe der *Polynomdivison* unter „Mitwirkung“ des *Hornerschemas* in folgenden Schritten vor:
  (i) Finde zunächst durch *„intelligentes Raten“* (siehe unten) eine rationale Nullstelle x_0 .
  (ii) Eine anschließende *Polynomdivision* von $a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ durch den Term $x - x_0$ liefert dann eine algebraische Gleichung vom Grad $m-1$. *Man beachte:* Die Polynomdivision geht auf.
  (iii) Man setze die Schritte (i) und (ii) fort, bis man schließlich auf eine *quadratische Gleichung* stößt, die mit der angegebenen Formel explizit gelöst werden kann.
- Ist insbesondere $x_1 = \alpha + i\beta \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}$ eine *komplexe* Lösung der *reellen* Gleichung $(*)$, dann kann man zeigen, dass $x_2 = \bar{x}_1 = \alpha - i\beta \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}$ eine weitere *komplexe* Lösung von $(*)$ ist. D.h.: Nichtreelle Wurzeln von reellen algebraischen Gleichungen tauchen stets als Pärchen von *konjugiert komplexen Zahlen* auf.
- Das *„Intelligente Raten“* einer Nullstelle basiert auf folgender Tatsache:
  Besitzt das reelle Polynom $(*)$ speziell nur *ganzzahlige Koeffizienten* $a_k \in \boldsymbol{Z}$ $(k = 0, \ldots, m)$, so sind die Möglichkeiten für eine *rationale Nullstelle* $x_0 \in \boldsymbol{Q}$ und damit Lösung von $(*)$ stark eingeschränkt. Man kann nämlich zeigen, dass für solche Lösungen gelten muss:

$$\boxed{x_0 = \frac{b}{c} \quad \text{mit} \quad b \mid a_0,\ c \mid a_m} \ .$$

  Dabei bedeutet für zwei ganze Zahlen $a,b \in \boldsymbol{Z}$:

  $a \mid b$ $:\Leftrightarrow$ *„a ist ein Teiler von b“* $\Leftrightarrow$ $b = a \cdot d$ mit $d \in \boldsymbol{Z}$ geeignet.