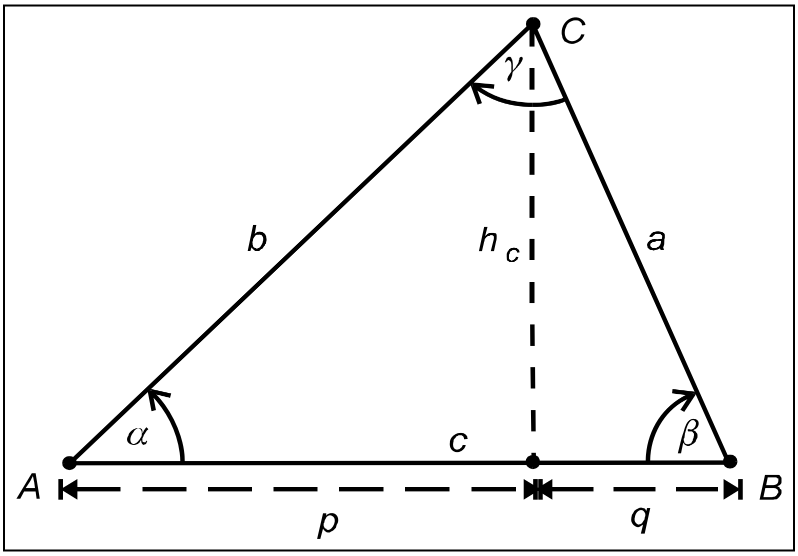
Trigonometrische Sätze im allgemeinen Dreieck

Es sei $\Delta\, ABC$ ein beliebiges Dreieck mit Seitenlängen a,b,c und Winkeln α,β,γ. Dann gelten die folgenden allgemeinen Sätze (siehe dazu die Skizze):

Satz	***Formel***
Sinussatz	$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
Kosinussatz	$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\,c\cdot\cos\alpha$

<u>*Skizze:*</u>



<u>*Bemerkungen*</u>*:*

- Der *Sinussatz* lässt sich vorteilhaft anwenden, wenn im Dreieck $\Delta\, ABC$ gegeben sind
  - *zwei Seiten* sowie *ein Winkel*, welcher einer der Seiten gegenüberliegt (*SSW*) oder
  - *eine Seite* und *zwei Winkel* (*WSW* bzw. *SWW*) .
- Der *Kosinussatz* kann vorteilhaft angewendet werden, wenn im Dreieck $\Delta\, ABC$ gegeben sind
  - alle *drei Seiten* (*SSS*) oder
  - *zwei Seiten* und der von den beiden Seiten eingeschlossene *Winkel* (*SWS*) .

Lineare Gleichungssysteme

- Ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten x_1 , x_2 , … , x_n der Form

$$(*)\quad \boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}}$$

heißt ein *lineares Gleichungssystem* (*LGS*). Die $m{\cdot}n$ Zahlen a_{ik} $(1 \le i \le m\,,\, 1 \le k \le n)$ in $(*)$ heißen die *Koeffizienten des Gleichungssystems*, die m Zahlen b_i $(1 \le i \le m)$ die *Koeffizienten der rechten Seite*.

- Fasst man die Koeffizienten a_{ik} $(1 \le i \le m\,,\, 1 \le k \le n)$ zu einem Rechteckschema

  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ zusammen - A heißt dann eine $m{\times}n$ - *Matrix* - und die Unbekannten x_k $(1 \le k \le n)$ sowie die Koeffizienten b_i $(1 \le i \le m)$ der rechten Seite jeweils zu einem *Spaltenvektor* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$ bzw. $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^m$, erhält man für das LGS die kompakte Darstellung: $\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$.

  (Zur Bedeutung des *Multiplikationszeichen* zwischen A und $\vec{x}$ als sogenanntes Matrizenprodukt siehe später!)
- Im Fall $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ heißt das LGS $(*)$ *homogen*, anderenfalls *inhomogen*.
- Jeder konkrete Zahlenvektor $\vec{x}$, der das LGS $(*)$ löst, heißt ein *Lösungsvektor*, und die Menge aller Lösungsvektoren $\vec{x}$ bezeichnet man als den *Lösungsraum* $\boldsymbol{L}$ des LGS.
- Zur Ermittlung des Lösungsraumes $\boldsymbol{L}$ von $(*)$ kann man anstelle der Gleichungen die sogenannte *erweiterte Systemmatrix* $(A \mid \vec{b})$ betrachten und sie folgendem Algorithmus von sogenannten *elementaren Zeilenoperationen* (*EZOs*) unterziehen:

Gaußscher Algorithmus	
Vertauschung zweier Zeilen:	$(i) \leftrightarrow (k)$: $(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ldots\ a_{in} \mid b_i) \leftrightarrow (a_{k1}\ \ a_{k2}\ \ldots\ a_{kn} \mid b_k)$
Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$:	$(i) \to \lambda{\cdot}(i)$: $(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ldots\ a_{in} \mid b_i) \to (\lambda{\cdot}a_{i1}\ \ \lambda{\cdot}a_{i2}\ \ldots\ \lambda{\cdot}a_{in} \mid \lambda{\cdot}b_i)$
Addition des Vielfachen einer zu einer anderen Zeile:	$(i) \to (i) + \lambda{\cdot}(k)$: $(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ldots\ a_{in} \mid b_i) \to$ $(a_{i1} + \lambda{\cdot}a_{k1}\ \ a_{i2} + \lambda{\cdot}a_{k2}\ \ldots\ a_{in} + \lambda{\cdot}a_{kn} \mid b_i + \lambda{\cdot}b_k)$

Ziel der *EZOs* ist es, durch schrittweises Umformen der *Systemmatrix* $(A \mid \vec{b})$ diese auf die sogenannte *Zeilen-Stufen-Form* (ZSF), d.h. auf *obere Dreiecksgestalt*, zu bringen. Die entsprechend umgeformte Matrix $(A' \mid \vec{b}')$ hat dann die folgende Gestalt:

$$(A' \mid \vec{b}') = \left(\begin{array}{c|c} * * * * * * * \ldots * & b'_1 \\ 0 \ldots 0 \; * * * \ldots * & b'_2 \\ 0 \ldots\ldots 0 * * \ldots * & b'_3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 * \ldots * & b'_r \\ 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b'_m \end{array}\right)$$, d.h. die ersten r Zeilen sind von der Form

$(0 \ldots 0 \; a'_{i,j} \; a'_{i,j+1} \ldots a'_{i,n} \mid b'_i)$ mit $a'_{i,j} \neq 0$, $(1 \le i \le r \, , \, i \le j)$.

Dabei kann man zusätzlich sogar für den „führenden“ Koeffizienten $a'_{i,j} = 1$ erzwingen.

- Das System $(A' \mid \vec{b}')$ bzw. das zugehörige LGS und das Ausgangssystem $(A \mid \vec{b})$ besitzen dann wegen der Umkehrbarkeit der vorgenommenen Zeilenoperationen (EZOs) dieselbe Lösungsmenge $\boldsymbol{L}$.
- Ausgehend von den führenden *Kopf-Einsen* in der ZSF des LGS kann man durch entsprechende Manipulationen der jeweils über einer Zeile stehenden Zeilen mittels der EZOs erreichen, dass auch oberhalb der führenden Einsen in den Zeilen Nullen auftauchen. Wir nennen das die *normierte Zeilenstufenform* (NZSF) eines LGS und sprechen dann vom *erweiterten Gaußalgorithmus* oder *Gauß-Jordan-Algorithmus*.
- Die Zahl r der auf der linken Seite von $(A' \mid \vec{b}')$ verbleibenden nichttrivialen Zeilen nennt man auch den *Rang* – genauer: *Zeilenrang* $r = rg\,(A')$ – der Matrix A' , die Anzahl $s \ge r$ der verbleibenden nichttrivialen Zeilen in $(A' \mid \vec{b}')$ – in Zeichen: $s = rg\,(A' \mid \vec{b}')$ – der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix bzw. des LGS. Beide Zahlen stellen eine *Invariante* unter den EZOs dar.
- Bezüglich der Lösbarkeit des LGS $(*)$ können wir anhand der Gestalt von $(A' \mid \vec{b}')$ – bzw. anhand der beiden Rangzahlen r und s – folgendes ablesen:

Mögliche Fälle für die Lösungsmenge $\boldsymbol{L}$ von $(*)$	
$\boldsymbol{L} = \emptyset$:	$r < m$ und $b'_i \neq 0$ für mindestens ein i mit $r+1 \le i \le m$, d.h.: $r = rg\,(A') < s = rg\,(A' \mid \vec{b}')$
$\boldsymbol{L}$ *eindeutig:*	$b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_m = 0$ bzw. $r = m$ und $s = r = n$: Dann haben alle Stufen die Breite 1 , und die letzte Gleichung lautet: $a'_{n,n}\, x_n = b'_n$ mit $a'_{n,n} \neq 0$, woraus man x_n erhält. Einsetzen von x_n in die *vorletzte* Gleichung $a'_{n-1,n-1}\, x_{n-1} + a'_{n,n}\, x_n = b'_{n-1}$ mit $a'_{n-1,n-1} \neq 0$ liefert x_{n-1} . Sukzessive Fortsetzung des Einsetzungsverfahrens liefert dann

	eine(n) *eindeutig bestimmte(n) Lösung(svektor)* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$.
L *mehrdeutig:*	$b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_m = 0$ bzw. $r = s \leq m$ und $r < n$: Dann gibt es $n - r$ Variablen – nennen wir sie x_{t_1} bis $x_{t_{n-r}}$ –, welche sich frei wählen lassen, z.B. in der Form: $x_{t_1} = s$, $x_{t_2} = t$, … , $x_{t_{n-r}} = u$. Mit diesen $n - r$ *Parametern* $s, t, u, \ldots$ bestimmt man dann - wie im eindeutigen Fall - sukzessive die restlichen, nicht frei wählbaren x_k und erhält so *unendlich viele Lösung(svektor)en* $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n$. Man gewinnt so die Lösungsmenge ***L*** in der sogenannten *parametrisierten Darstellung*.

Über die Lösungen einer reellen quadratischen Gleichung

Allgemeine Form der reellen quadratischen Gleichung:	$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ ($x \in \boldsymbol{R}$ bzw. $x \in \boldsymbol{C}$)
faktorisierte Form der Gleichung (= Zerlegung in *Linearfaktoren*):	$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit $a \in \boldsymbol{R}$ ($x \in \boldsymbol{C}$) $x_1 \in \boldsymbol{C}$ *und* $x_2 \in \boldsymbol{C}$ heißen auch die *reellen* bzw. *komplexen Nullstellen* des quadratischen Polynoms $p(x) = ax^2 + bx + c$.
Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$:	Bezeichne $\Delta := b^2 - 4ac$ die sogenannte *Diskriminante* der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Dann gilt: (i) *Fall* $\Delta > 0$: Die reelle quadratische Gleichung hat *zwei verschiedene relle Lösungen*, nämlich $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (ii) *Fall* $\Delta = 0$: Die reelle quadratische Gleichung hat *eine doppelte reelle Lösung*, nämlich $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ (iii) *Fall* $\Delta < 0$: Die reelle quadratische Gleichung hat *keine reelle Lösung*.