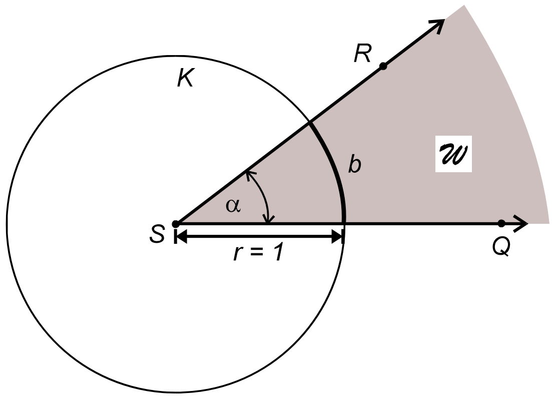
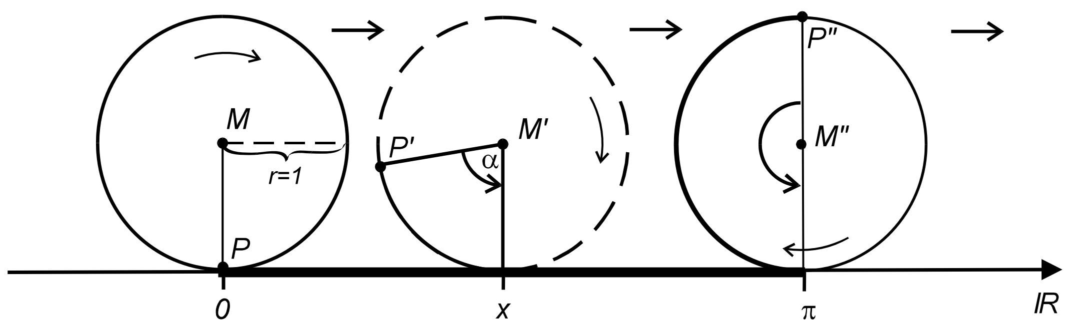
- Das dimensionslose *Bogenmaß* $arc(\mathcal{W})$ des Winkelfeldes $\mathcal{W}$ wird eingeführt als Länge b des anteiligen Kreisbogenstücks von K, der im Winkelfeld $\mathcal{W}$ gelegen ist, nach der Formel: $\boxed{x = arc(\mathcal{W}) := b}$.
- Auf dem Taschenrechner kennzeichnet die Taste / Einstellung $\boxed{DEG}$ die Messung eines Winkels in Grad (*DEG* für engl. *degree*). Dem gegenüber befindet sich zur Kennzeichung der Winkelmessung mittels Bogenmaß auf dem Taschenrechner die Taste / Einstellung $\boxed{RAD}$ für *radiant*.

<u>*Skizze zum Bogenmaß:*</u>



Anschaulich erhält man die *Bogenlänge* eines Kreisbogens bzw. Kreisbogenstücks auf dem Einheitskreis K durch Abrollen von K auf einer horizontalen Geraden. Eine näherungsweise zeichnerische Konstruktion der Bogenlänge des halben Kreisumfangs - *„Abwicklung des Kreises“* genannt - liefert die Ende des 17. Jh. entwickelte sogenannte *Kochanski-Konstruktion*. Schließlich beachte man, dass mit π (sprich: *„Pi“*) speziell die *Bogenlänge der „halben“ Vollkreislinie* K bezeichnet wird.

<u>*Skizze:*</u>



Ursprünglich bezeichnet die Zahl π das Verhältnis von Umfang u zum Durchmesser d eines (beliebigen) Kreises K_r mit gegebenem Radius $r>0$ - also: $\boxed{\pi = \frac{u}{d}}$. Dabei gilt für den *Umfang* u und den *Flächeninhalt* F von K_r unter Rückgriff auf die Bogenlänge der geschlossenen Kreislinie allgemein: $\boxed{u = 2\pi \cdot r \quad , \quad F = \pi \cdot r^2}$.

Wir werden im Folgenden zunächst das *Gradmaß* verwenden.

Die Umrechnungsformeln zwischen Gradmaß $\alpha\,[°]$ und Bogenmaß $x = arc\,(\mathcal{W})$ eines Winkelfeldes $\mathcal{W}$ lauten:

$$\boxed{x = arc(\mathcal{W}) = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha[°]} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\alpha[°] = \frac{180°}{\pi} \cdot x} \; .$$

Die folgende Tabelle enthält einige „charakteristische“ Werte im Bogen- und Gradmaß:

α [°]	$360°$	$270°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$36°$	$30°$	$22{,}5°$
$x = arc\,(\alpha)$	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$

α [°]	$20°$	$18°$	$15°$	$12°$	$10°$	$9°$	$6°$	…	$1°$
$x = arc\,(\alpha)$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{30}$	…	$\frac{\pi}{180}$

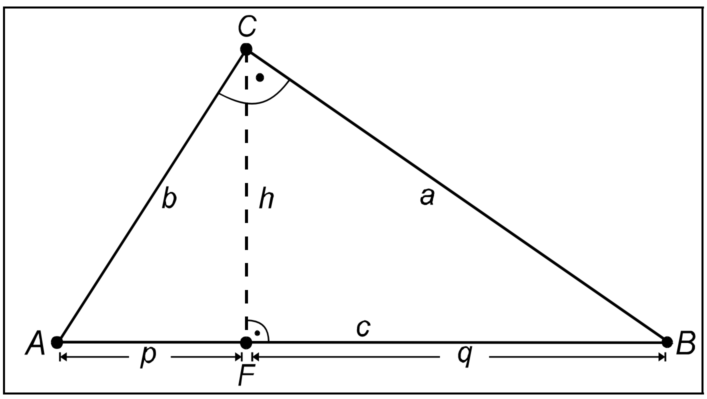
<u>Bemerkung</u>:

Im Bereich der *Vermessungstechnik*, speziell der *Geodäsie*, greift man auch auf *Neugrad* zurück. Dabei entspricht der Einheit *1 gon* der 100. Teil eines rechten Winkels. Der Vollwinkel misst dann *400 gon* . Wir werden zur Angabe von *arg z* jedoch nebeneinander die beiden Varianten (*Alt-*)*Grad* und *Bogenmaß* verwenden.

Sätze im rechtwinkligen Dreieck

Gegeben sei im Folgenden das rechtwinklige Dreieck $\Delta\,ABC$ mit $\gamma = 90°$. Dann heißt die Seite c die *Hypotenuse*, die Seiten a und b heißen die *Katheten* des Dreiecks $\Delta\,ABC$.

<u>*Skizze:*</u>



Ist h die *Höhe* von C auf AB mit Höhenfußpunkt $F \in \overline{AB}$, so heißen die beiden durch F entstehenden Teile p und q von c die durch h erzeugten *Hypotenusenabschnitte*.

Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC gelten nun die folgenden (klassischen) Sätze:

Satz	***Formel***
Höhensatz des Euklid	$h^2 = p \cdot q \quad (\gamma = \frac{\pi}{2})$
Kathetensatz des Euklid	$a^2 = c \cdot q \;,\quad b^2 = c \cdot p \quad (\gamma = \frac{\pi}{2})$
Satz des Pythagoras	$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\gamma = \frac{\pi}{2})$

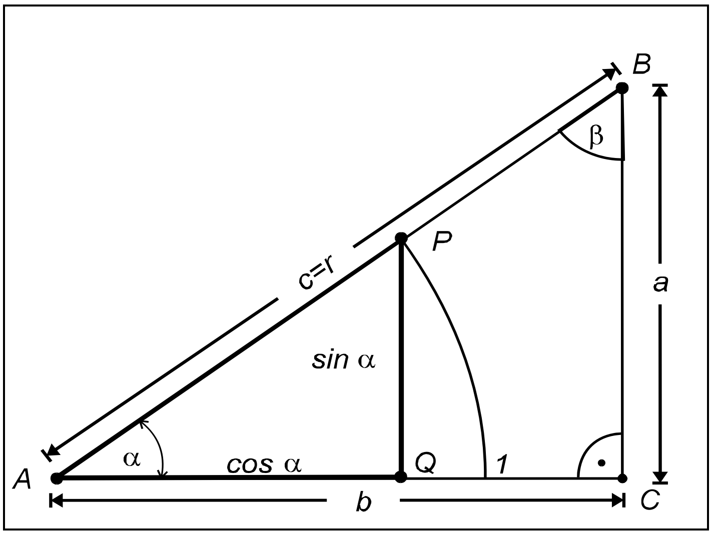
Die trigonometrischen Funktionen im Dreieck

Sei ΔABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$, *Hypotenuse* $c = r$, *Katheten* a und b sowie den *komplementären Winkeln* α und β, für welche wegen der Winkelsumme im Dreieck gilt: $\alpha + \beta = 180° - \gamma = 90°$ und damit für β: $\beta = 90° - \alpha$.

Im Dreieck ΔABC lassen sich nun die *trigonometrischen Funktionen*, wie folgt, einführen (s. Skizze):

$\boxed{\sin \alpha := \frac{a}{r}}$, $\boxed{\cos \alpha := \frac{b}{r}}$, $\boxed{\tan \alpha := \frac{a}{b}}$ und $\boxed{\cot \alpha := \frac{b}{a}}$

<u>*Skizze:*</u>



Unter Beachtung der Definition gilt dann für den Komplementärwinkel β zu α:

$$\boxed{\sin\beta = \frac{b}{r} = \cos\alpha} \quad \text{sowie} \quad \boxed{\cos\beta = \frac{a}{r} = \sin\alpha}$$

Daraus erklärt sich die Bezeichnung *Cosinus* als Abkürzung für *„Sinus complementarii"* (= Sinus des Komplementärwinkels).

<u>Bemerkungen</u>:

- Bezeichnet man die Seite *a* - wie üblich - als *Gegenkathete* und die Seite *b* als *Ankathete* zu α, so ergeben sich folgende *Merkformeln* für die trigonometrischen Funktionen:

$$\boxed{\sin\alpha := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}, \quad \boxed{\cos\alpha := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}},$$

$$\boxed{\tan\alpha := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}}, \quad \boxed{\cot\alpha := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}}$$

- Weiterhin erhält man durch Einsetzen: $\boxed{\tan\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$, $\boxed{\cot\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}}$.
- Bezüglich des *Wertebereichs* der trigonometrischen Funktionen folgt für $\alpha \in [0, 90°]$[1]:

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha \in [0,1] \ \text{ sowie } \ \tan\alpha,\ \cot\alpha \in [0, \infty).$$

- Verwendet man anstelle des Winkelgradmaßes α [°] das *Bogenmaß* x, so gilt:

$$\alpha \in [0, 90°] \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Mittels elementargeometrischer Betrachtungen erhält man dann unter Verwendung des Symbols ∞ für „Unendlich" folgende *Werte* für *sin, cos, tan* und *cot* zu den folgenden speziellen im Bogenmaß angegebenen Winkeln x :

Winkel x	***0***	***π/6***	***π/4***	***π/3***	***π/2***
sin x	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$
cot x	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

[1] Wir verwenden dabei die *Intervallschreibweise* $[a,b] = \{\, x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b \}$ für gegebene reelle Zahlen $a,b \in \mathbf{R}$ sowie $[a,\infty) = \{\, x \in \mathbf{R} \mid a \le x \,\}$ im Fall der nach oben unbeschränkten Menge.