Bemerkungen:

- Im Ausdruck $\boxed{a^n = b}$ heißt $a \in \boldsymbol{R}$ die *Basis*, $n \in \boldsymbol{Z}$ der *Exponent* und $b \in \boldsymbol{R}$ der *Potenzwert*. (Man beachte: Für *negative* Exponenten $n < 0$ wird $a \neq 0$ gefordert.)
- Das *Potenzieren* mit natürlichem Exponenten ist quasi eine „Abkürzung" für die *n*-malige Multiplikation ein- und desselben Faktors a , der Basis der Potenz. Analog ist ja auch die Multiplikation $x = n \cdot a$ einer reellen Zahl $a \in \boldsymbol{R}$ mit der natürlichen Zahl $n \in \boldsymbol{N}$ nichts anderes als eine „Abkürzung" für die *n*-malige Addition dieser Zahl.
- In der Verallgemeinerung der Potenzen werden wir als nächstes auch *rationale* und *irrationale* Exponenten zulassen. Dazu benötigen wir zumindest für den Fall eines *rationalen* Exponenten die n-te *Wurzel* aus einer positiven reellen Zahl. Allerdings dürfen für die verallgemeinerte Potenz nur noch Basen $a \in \boldsymbol{R}$ mit $a > 0$ zugelassen werden.

Wurzeln und allgemeine reelle Potenzen

Wir lernen das Wurzelziehen – oder *Radizieren* auf „gut mathematisch" – als eine sogenannte *Umkehroperation* zum Potenzieren mir natürlichem Exponenten kennen.

*Definition der reellen **n-ten Wurzel:***	Für $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$ definiert man die *n-te Wurzel* $\sqrt[n]{a}$ als die eindeutige Zahl $x \in \boldsymbol{R}$, $x \geq 0$ mit $x^n = a$. Speziell definiert man: $\sqrt[n]{0} = 0$ und schreibt gemäß Konvention für $n = 2$ (*Quadratwurzel*) nur: $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.
*Definition von **Potenzen mit rationalen Exponenten** für reelle Basen:*	Für $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{N_0}$ definiert *man:* $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ bzw. $a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$. Für $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $m < 0$ definiert *man:* $a^{\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}$.
*Rechenregeln der reellen Wurzel (**Wurzelgesetze**):*	(1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ für $b > 0$, (2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$, (3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.

Bemerkungen:

- Für die *n*-te Wurzel x aus einer positiven reellen Zahl $a \in \boldsymbol{R}$ gilt also:

$$\boxed{x = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a} \; .$$

Damit ist das *Radizieren* – oder auf gut Deutsch: das *Wurzelziehen* – eine *Umkehroperation* zum Potenzieren und verhält sich zum Potenzieren wie die Subtraktion zur Addition bzw. wie die Division zur Multiplikation.

- Im Ausdruck $\boxed{\sqrt[n]{a} = b}$ heißt $a \in \mathbf{R}$, $a \geq 0$ der *Radikand*, $n \in \mathbf{N}$ der *Wurzelexponent* und $b \in \mathbf{R}$ der *Wurzelwert* bzw. die *Wurzel*.
- Für die soeben eingeführten Potenzen $a^{\frac{m}{n}}$ mit rationalen Exponenten $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ und positiver Basis $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ gelten uneingeschränkt die bekannten *Potenzgesetze*. Aus dieser Sicht stellen die Wurzelgesetze (1) bis (3) nur spezielle Anwendungen der Potenzgesetze dar bzw. lassen sich durch Anwendung derselben beweisen.
- In Brüchen, deren *Nenner* die Form $N = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ bzw. $N = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ mit $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ hat, macht man sinnvoll von der 3. Binomischen Formel Gebrauch, d.h. man erweitert den Nenner entsprechend mit dem Ausdruck $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Auf diese Weise „verschwinden“ die Quadratwurzeln aus dem Nenner.
- Man kann die Potenz a^{α} mit positiver Basis $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ auch für beliebige *irrationale* Exponenten $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ definieren. Dazu betrachtet man die *rationale* „Folge“ der endlichen *Dezimalbrüche* $x_n = c, b_1 b_2 \ldots b_n = c + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} \in \mathbf{Q}$, welche α approximieren, und definiert a^{α} als *Grenzwert von* a^{x_n} . Die bekannten *Potenzgesetze* übertragen sich dann auf beliebige *reelle* Exponenten $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.
- Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen der Quadratwurzel und dem *Betrag* $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \mathbf{R}$, der definiert ist als die *vorzeichenlose Zahl* - also mittels $\boxed{|a| := \begin{cases} a \text{ , falls } & a \geq 0 \\ -a \text{ , falls } & a < 0 \end{cases}}$. Der Zusammenhang ist gegeben durch: $\boxed{|a| = \sqrt{a^2}}$, wodurch unmittelbar klar ist, dass gilt: $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Der Logarithmus zu einer beliebigen Basis

Mit dem *Logarithmieren* lernen wir eine weitere *Umkehroperation* zum Potenzieren kennen.

*Definition des **Logarithmus:***	Seien $a,b \in \mathbf{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$. Dann ist der *Logarithmus* $\log_b a$ von a zur Basis b als die eindeutige Zahl $x \in \mathbf{R}$ definiert mit: $$b^x = a \quad .$$ Speziell gilt: $\log_b x = u \;\Leftrightarrow\; b^u = x$.
*Spezielle **Logarithmenwerte**:*	Für $a,b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt stets: (i) $b^{\log_b a} = a$, (ii) $\log_b 1 = 0$ sowie (iii) $\log_b b = 1$.

Rechenregeln für den Logarithmus:	Sei im folgenden $b > 0$, $b \neq 1$. Dann gilt für beliebige Zahlen $a,x,y \in \boldsymbol{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ sowie für $n \in \boldsymbol{N}$: (1) $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$, (2) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$, (3) $\log_b x^a = a \cdot \log_b x$, speziell: $\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_b x$.
Umrechnung zwischen ***Logarithmen*** *verschiedener Basen:*	Für $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ gilt stets: $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$ bzw. $\log_c a = \log_c b \cdot \log_b a$.

<u>Bemerkungen:</u>

- Im Ausdruck $\boxed{c = \log_b a}$ heißt $b \in \boldsymbol{R}$ die *Basis* und $a \in \boldsymbol{R}$ der *Numerus* des Logarithmus c . Man beachte, dass stets a und b *positiv* gewählt werden müssen mit $b \neq 1$.
- Wählt man als Basis $b = 10$, so erhält man den *dekadischen Logarithmus*. In Zeichen: $\boxed{\lg a := \log_{10} a}$ für $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$.
- Wählt man als Basis $b = e$ mit der Eulerschen Zahl $e = 2{,}71828\ldots \in \boldsymbol{R}$, so erhält man den *natürlichen Logarithmus*. In Zeichen: $\boxed{\ln a := \log_e a}$ für $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$.
- Bezüglich der Umrechnungsformeln zwischen dekadischem und natürlichem Logarithmus gilt für $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ beliebig:

  (i) $\lg a = \lg e \cdot \ln a \approx 0{,}43429 \cdot \ln a$ bzw. (ii) $\ln a = \ln 10 \cdot \lg a \approx 2{,}30259 \cdot \lg a$.
- Bei allgemeinen Rechenregeln für den Logarithmus, die für alle Basen $b > 0$, $b \neq 1$ gelten, lässt man die Angabe von b oft weg. Man schreibt hier also: $\boxed{c = \log a}$.

Anwendungen der Exponential- und Logarithmusfunktion

Viele Vorgänge in der Natur sowie anderen Bereichen (z.B. in der Geldwirtschaft) lassen sich unter Anwendung der Potenz zur *Eulerschen* Basis e - man spricht in diesem Fall von der *Exponentialfunktion* $f(x) = \exp(x) := e^x$ - sowie ihrer Umkehroperation - das ist die natürliche *Logarithmusfunktion* $f^{-1}(x) = \ln(x) := \log_e x$ - beschreiben. Derartige Vorgänge, die mittels der Exponentialfunktion beschreibbar sind, sind z.B.

(i) das *Wachstum einer Population*,
(ii) die *Kapitalvermehrung bei Zinseszins*,
(iii) die *Erwärmung* bzw. *Abkühlung* eines Objektes in einer gleichmäßig temperierten Umgebung oder auch
(iv) der *radioaktive Zerfall* einer chemischen Substanz.

Zur Beschreibung dieser zeitlich abhängigen Vorgänge

- verwendet man einerseits die *Variable* t für die Zeit ($t = time$),
- andererseits bezeichnet man mit $N(t)$ o.ä. die untersuchte Quantität (z.B. Stoffmenge, Kapital, Temperatur usw.) zum Zeitpunkt $t > 0$.

Insbesondere stellt damit $N(t)$ eine *Funktion* der Zeit t dar.

Bezeichnet weiterhin $N_0 = N(0)$ die *Ausgangsquantität* der betrachteten Größe zum Zeitpunkt $t = 0$, so erhält man unter Verwendung der sogenannten *Wachstumskonstanten* $a > 0$ bzw. $\lambda \in \mathbf{R}$ das folgende zugehörige allgemeine (Wachstums-)Gesetz:

$$(*) \qquad \boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t} \ , t \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}} \ , t \geq 0 \, .$$

Benutzt man die Identität $\boxed{a = e^{\ln a}}$ für die linke Gleichung, so liefert ein Vergleich der beiden Darstellungen: $\boxed{\lambda = \ln a}$. Somit ergeben sich folgende drei Fälle für das Verhalten von $N(t)$:

(i) $a = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$: Es ist $N(t) \equiv N_0$; d.h. $N(t)$ ist zeitlich konstant.
(ii) $a > 1 \Leftrightarrow \lambda > 0$: Es liegt *Wachstum* vor ($a^t > 1$ für alle $t > 0$).
(iii) $a < 1 \Leftrightarrow \lambda < 0$: Es liegt *Abnahme* bzw. *Verminderung* vor ($a^t < 1$ für alle $t > 0$).

Im Fall eines *abnehmenden* $N(t)$ schreibt man auch $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$ ($t \geq 0$) mit $\lambda > 0$.
Hier interessiert vor allem der Zeitpunkt $\tau > 0$, an welchem die Ausgangsquantität N_0 sich auf die Hälfte verringert hat. Für diese sogenannte *Halbwertszeit* gilt dann:

$$\boxed{N(\tau) = \frac{N_0}{2}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}} \ .$$

Zum Bogenmaß und Gradmaß

Der Winkelmessung eines Winkels (oder Winkelfeldes) $\mathcal{W} = \sphericalangle QSR$ mit Scheitelpunkt S (siehe nachfolgende Skizze) im *Gradmaß* $\alpha\,[°]$ liegt die Einteilung der geschlossenen Kreislinie K des sogenannten *Einheitskreises* mit Mittelpunkt S und Radius $r = 1$ in 360 gleich große Teile zugrunde. Jedem dieser 360 Kreislinienteile entspricht dann das Gradmaß $1°$ (lies: *„1 Grad“*). Verfeinerungen der Unterteilung sind $1° = 60'$ (lies: *„60 Minuten“*) und $1' = 60''$ (lies: *„60 Sekunden“*). Damit gilt insbesondere: $1° = 3600''$.

Die Winkelmessung ist eng mit der von den Babyloniern entwickelten *Zeitrechnung* verbunden und verweist auf das von ihnen verwendete Hexagesimalsystem.

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Das *Gradmaß* $\alpha\,[°]$ des Winkelfeldes $\mathcal{W}$ beschreibt also das Maß des anteiligen Kreisbogens von K – in Bezug auf $360°$ als Maß für die Vollkreislinie –, der von dem Winkelfeld W aus K ausgeschnitten wird.