Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik

StR.i.HD. A. Gündel-vom Hofe

WS 2012/2013

Formelsammlung zur „Mathematik I für die Berufliche Fachrichtungen EL und LG“

Die b-adische Darstellung rationaler Zahlen

Wir beginnen zunächst mit der Darstellung von ganzen Zahlen $x \in \mathbf{Z}$ bezüglich einer beliebigen Zahlenbasis $b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$. Wir nennen dies die Darstellung im *b-adischen System*.

Die Darstellung ganzer Zahlen bezügl. verschiedener Basen	
Definition der b-adischen Darstellung einer ganzen Zahl:	$b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$ sei *Basis*, $Z = \{0,\ldots,b\text{-}1\}$ die Menge der zugehörigen *Ziffern*, z.B.: $Z = \{0,\ldots,9\}$ für $b = 10$ (*Dezimal*system), $Z = \{0,1\}$ für $b = 2$ (*Binär*system), $Z = \{0,\ldots,9,A,\ldots,F\}$ für $b = 16$ (*Hexadezimal*system). Für die *b-adische Darstellung* von $x \in \mathbf{Z}$ gilt dann: $x = \pm\left(a_m a_{m-1} \ldots a_0\right)_b := \pm(a_m \cdot b^m + a_{m-1} \cdot b^{m-1} + \ldots + a_0 \cdot b^0)$ mit $a_m \neq 0$, $a_k \in Z$ für $k = 0,\ldots,m$.
Gewinnung der b-adischen Darstellung einer Zahl $x \in \mathbf{N}$:	Fortgesetzte (ganzzahlige) Division von $x \in \mathbf{Z}$ durch b mit Rest liefert: $x = c_1 \cdot b + a_0$; $c_1 = c_2 \cdot b + a_1$; … ; $c_m = 0 \cdot b + a_m$ mit $0 \leq a_k < b$ Dann ist $x = \left(a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0\right)_b$ die b-adische Darstellung von x.
Das kleine Eins-plus-Eins und Ein-mal-Eins im Binärsystem:	Im Fall des Rechnens im System mit Basis $b = 2$ gilt: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = (\mathbf{10})_2$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.
Umwandlung einer Binärzahl in die Darstellung mit Zweierpotenzbasis:	Sei $x = \left(a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0\right)_2$ Binärzahl mit $a_k \in \{0,1\}$, $k = 0,\ldots,m$ und $a_m = 1$ sowie $b = 2^n$ ($n \in \mathbf{N}$) eine neu gewählte Basis. Dann erhält man die Darstellung von x bezügl. b durch (i) *rechtsbündiges* Zusammenfassen der Binärziffern von x in Blöcke der Länge n bei evt. Auffüllen des letzten (linken) Blockes mit Nullen und (ii) Umwandlung der einzelnen Blöcke in b –Ziffern. Also erhält man $x = \left(b_r b_{r-1} \ldots b_1 b_0\right)_b$, wobei für $k = 0,\ldots,r$ gilt: $b_k = a_{(k+1) \cdot n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_{k \cdot n+1} \cdot 2^1 + a_{k \cdot n} \cdot 2^0$

Wir wollen im folgenden die allgemeine b-adische Darstellung für reelle Zahlen einführen und uns dann speziell der b-adischen Darstellung *rationaler* Zahlen $x \in \mathbf{Q}$ zuwenden:

Die Darstellung rationaler Zahlen bezügl. verschiedener Basen	
*Definition der b-adischen Darstellung einer beliebigen **reellen** Zahl* $x \in \mathbf{R}$:	$b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$ sei *Basis*, $Z = \{0,\ldots,b\text{-}1\}$ die Menge der zugehörigen *Ziffern*. Für die *b-adische Darstellung* von $x \in \mathbf{R}$, $\lvert x \rvert < 1$ gilt dann: $x = \pm\left(0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots\right)_b := \pm\left(a_1 \cdot b^{-1} + a_2 \cdot b^{-2} + a_3 \cdot b^{-3} + \ldots\right)$ mit $a_k \in Z$ für $k \in \mathbf{N}$.
*Definition der **periodischen** b-adischen Darstellung einer **rationalen** Zahl* $x \in \mathbf{Q}$:	Gibt es ein $\mu \in \mathbf{N}$ sowie ein $\lambda \in \mathbf{N}$ (μ, λ minimal gewählt), so daß für alle $k \in \mathbf{N}$ gilt $a_{\mu+\lambda+k} = a_{\mu+k}$, so nennt man die b-adische Darstellung von x (gemischt) periodisch mit *Vorperiodenlänge* μ und *Periodenlänge* λ. Man schreibt in diesem Fall: $x = \left(0{,}a_1 a_2 \ldots a_\mu \overline{a_{\mu+1} a_{\mu+2} \ldots a_{\mu+\lambda}}\right)_b$
Umwandlung des Bruches $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ *in die b-adische Darstellung* $x = \left(b_m \ldots b_0 , a_1 a_2 a_3 \ldots\right)_b$	Ist $p = m \cdot q + r$ mit $m, r \in \mathbf{Z}$ und $0 \leq r < \lvert q \rvert$, dann gilt: $x = m + x'$ mit $x' = \dfrac{r}{q} \in \mathbf{Q}$, $0 \leq x' < 1$. Die *b-adische Darstellung für* $m \in \mathbf{Z}$ erhält man, wie bekannt. Die *b-adische Darstellung für* $x' = \dfrac{r}{q}$ gewinnt man durch fortgesetzte *Division mit Rest durch* q bei wiederholter Multiplikation des Restes mit b : $r \cdot b = a_1 \cdot q + r_1$; $r_1 \cdot b = a_2 \cdot q + r_2$; … ; $r_k \cdot b = a_{k+1} \cdot q + r_{k+1}$; … mit $0 \leq r_k < \lvert q \rvert$, $k \in \mathbf{N}$. Dann ist $x' = \left(0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots\right)_b$ die gesuchte b-adische Darstellung von x' . Bei der b-adischen Entwicklung von x' gibt es zwei Fälle: (i) $r_{n+1} = 0$ für ein $n \in \mathbf{N}$: Dann gilt $a_k = 0$ für alle $k \geq n+1$, und die b-adische Entwicklung $x' = \left(0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots a_n\right)_b$ ist *endlich*. (ii) $r_{\mu+\lambda+1} = r_{\mu+1}$ für $\mu \in \mathbf{N}_0$, $\lambda \in \mathbf{N}$ fest (μ, λ „minimal" gewählt): Dann gilt $a_{\mu+\lambda+k} = a_{\mu+k}$ für $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, und die b-adische Entwicklung $x' = \left(0{,}a_1 a_2 \ldots a_\mu \overline{a_{\mu+1} a_{\mu+2} \ldots a_{\mu+\lambda}}\right)_b$ ist *unendlich periodisch* und besitzt die Vorperiodenlänge $\mu \geq 0$ und die Periodenlänge $\lambda \geq 1$.

Umwandlung der endlichen bzw. unendlichen periodischen b-adischen Darstellung $x = \left(0{,}a_1a_2a_3\ldots\right)_b$ *in einen Bruch* $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$	Wir unterscheiden für $0 \le x < 1$ die beiden Fälle: (i) $x = \left(0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\right)_b$ ist *endlich*. Dann folgt durch Kommaverschiebung um n Stellen nach rechts: $b^n \cdot x = \left(a_1a_2a_3\ldots a_n\right)_b \in \mathbf{Z}$. Also gilt: $x = \frac{p}{q}$ mit $q = b^n \in \mathbf{N}$ und $p = \left(a_1a_2a_3\ldots a_n\right)_b \in \mathbf{Z}$. (ii) $x = \left(0{,}a_1a_2\ldots a_\mu\overline{a_{\mu+1}a_{\mu+2}\ldots a_{\mu+\lambda}}\right)_b$ ist *unendlich periodisch*: Dann erhalten wir durch entsprechende Kommaverschiebung nach rechts: $b^{\mu+\lambda} \cdot x = \left(a_1a_2\ldots a_\mu a_{\mu+1}a_{\mu+2}\ldots a_{\mu+\lambda},\overline{a_{\mu+1}a_{\mu+2}\ldots a_{\mu+\lambda}}\right)_b$ $b^\mu \cdot x = \left(a_1a_2\ldots a_\mu,\overline{a_{\mu+1}a_{\mu+2}\ldots a_{\mu+\lambda}}\right)_b$. Die Differenz beider Ausdrücke führt zum Verschwinden der Periode, und wir haben (beachte, dass $\mu \ge 0$ und $\lambda \ge 1$ ist): $\left(b^{\mu+\lambda} - b^\mu\right) \cdot x = \left(a_1a_2\ldots a_\mu a_{\mu+1}\ldots a_{\mu+\lambda}\right)_b - \left(a_1a_2\ldots a_\mu\right)_b \in \mathbf{Z}$, also $x = \frac{p}{q}$ mit $q = b^{\mu+\lambda} - b^\mu = b^\mu \cdot \left(b^\lambda - 1\right) \in \mathbf{N}$ sowie $p = \left(a_1a_2\ldots a_\mu a_{\mu+1}\ldots a_{\mu+\lambda}\right)_b - \left(a_1a_2\ldots a_\mu\right)_b \in \mathbf{Z}$.

Bemerkungen:

- Zur *Umrechnung* einer gegebenen *Dezimalzahl* $x \in \mathbf{Z}$ *in die b-adische Darstellung* zu einer gegebenen Basis $b > 1$ mittels fortgesetzten Teilens mit Rest kann man die *Operatoren* „DIV" für den ganzzahligen Anteil der Zahl b in x sowie „MOD" für den Rest beim Teilen von x durch b verwenden. Zum Beispiel gilt:

  23 DIV $7 = 3$, 23 MOD $7 = 2$; denn: $23 = 3 \cdot 7 + 2$,

  -23 DIV $7 = -4$, -23 MOD $7 = 5$; denn: $-23 = (-4) \cdot 7 + 5$.
- Zur *Umrechnung* einer *b-adischen Zahldarstellung* der Form $x = \left(a_m a_{m-1}\ldots a_1a_0\right)_b$ *ins Dezimalsystem* hilft das folgende *Hornerschema*, welches auf einer geschickten Umklammerung des b-adischen Ausdrucks $x = a_m \cdot b^m + a_{m-1} \cdot b^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0$ beruht.
- Man beachte, dass rationale Zahlen der Form $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ bezüglich *jeder* Basis entweder eine *endliche* oder eine *unendliche* (*gemischt*) *periodische* Darstellung besitzen. Ob die Darstellung dabei endlich oder unendlich periodisch ist, hängt von der Wahl der Basis b und ihrem Bezug zum Nenner q des Quotienten $x = \frac{p}{q}$ ab.

Das Hornerschema	
Umklammerung des Ausdrucks:	Für gegebene Zahlen $a_k \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{R}$ gilt: $a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \; =$ $(\ldots((a_m \cdot x + a_{m-1}) \cdot x + a_{m-2}) \cdot x \ldots + a_1) \cdot x + a_0$
Algorithmische Form:	Setze: $c_m = a_m$; $c_{k-1} = c_k \, x + a_{k-1}$ für $k = m, \ldots, 1$ (k also rückwärts laufend !!). Dann ist $\boldsymbol{c_0}$ das Ergebnis.
Schema:	$\begin{array}{l|cccccc} & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ \hline \text{Produkte:} & 0 & c_m \cdot x & c_{m-1} \cdot x & \ldots c_2 \cdot x & & c_1 \cdot x \\ \hline \text{Summen:} & c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \ldots & c_1 & \boldsymbol{c_0} \\ \hline \end{array}$

<u>Bemerkungen</u>:

- Man füllt im Hornerschema sukzessive die beiden unteren Zeilen *spaltenweise von links nach rechts* aus. Das Ergebnis $\boldsymbol{c_0}$ steht dann in der *rechten unteren Ecke*.
- Das Hornerschema zur Berechnung der b-adischen Darstellung einer Zahl $x \in \boldsymbol{Z}$ kommt mit maximal *2m Rechenoperationen* aus, nämlich *m Multiplikationen* und *m Additionen*. Damit ist dieser Algorithmus äußerst geeignet für die Implementierung auf einem Computer.

Übersicht über die verschiedenen Zahlbereiche

Für die Zahlbereiche gelten folgende Teilmengenbeziehungen: $\boxed{\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{C}}$.

Dabei ist jede *Zahlbereichserweiterung* mit folgendem „Gewinn“ bzw. “Verlust“ verbunden:

Man gewinnt:		*Lösbarkeit von $a + x = b$*		*Lösbarkeit von $a\,x = b$ $(a \neq 0)$*		*Vollständigkeit*		*Lösbarkeit von $x^2 + ax + b = 0$*
	$\mathbb{N}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{Z}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{Q}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{R}$	$\longrightarrow$ $\mathbb{C}$
Man verliert:		*Wohlordnungsprinzip*		*"Vorgänger"- und "Nachfolger"-Beziehung*		*Abzählbarkeit*		*Möglichkeit der Anordnung*

Im Zusammenhang mit vorstehender „Gewinn-Verlust-Rechnung“ - veranschaulicht im vorstehenden Graphen - bei den einzelnen *Zahlbereichserweiterungen* bedeutet: