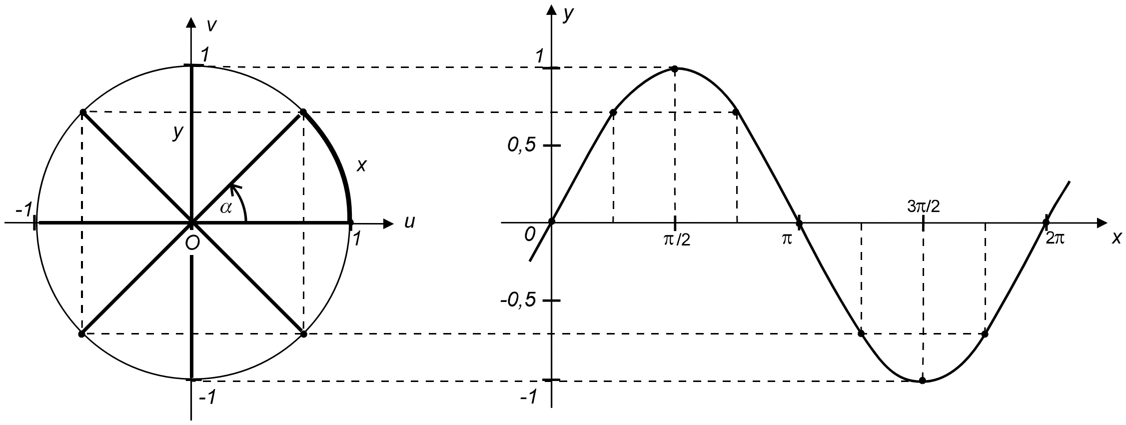
<u>*Skizze:*</u>



Die Operationen Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren

A. Wir behandeln in Erinnerung an die Schulmathematik im Folgenden die ***Potenzrechnung***, und zwar zunächst für reelle Basen $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$ mit Exponenten $n \in \boldsymbol{N}$ bzw. $n \in \boldsymbol{Z}$:

*Definition der **Potenz** als Produkt:*	Für $a \in \boldsymbol{R}$ und $n \in \boldsymbol{N}$ ist die *Potenz* a^n definiert durch: $$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal} \qquad \text{mit} \qquad a^0 := 1 \quad .$$ Für $a \neq 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$ definiert man zusätzlich: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$. Damit ist a^n nun auch für beliebige ganzzahlige Exponenten $n \in \boldsymbol{Z}$ definiert
rekursive Definition der Potenz:	$a^0 := 1 \quad , \quad a^{n+1} := a \cdot a^n \qquad (a \in \boldsymbol{R} \, , \, n \in \boldsymbol{N})$
Rechenregeln der Potenz (Potenzgesetze):	(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m} \quad ,$ (2) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad$ für $\quad b \neq 0 \quad ,$ (3) $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{n \cdot m} \quad .$

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Im Ausdruck $\boxed{a^n = b}$ heißt $a \in \boldsymbol{R}$ die *Basis*, $n \in \boldsymbol{Z}$ der *Exponent* und $b \in \boldsymbol{R}$ der *Potenzwert*. (Man beachte: Für *negative* Exponenten $n < 0$ wird $a \neq 0$ gefordert.)
- Das *Potenzieren* mit natürlichem Exponenten ist quasi eine „Abkürzung“ für die *n*-malige Multiplikation ein- und desselben Faktors a , der Basis der Potenz. Analog ist ja auch die

Multiplikation $x = n \cdot a$ einer reellen Zahl $a \in \boldsymbol{R}$ mit der natürlichen Zahl $n \in \boldsymbol{N}$ nichts anderes als eine „Abkürzung“ für die n-malige Addition dieser Zahl.

- In der Verallgemeinerung der Potenzen werden wir als nächstes auch *rationale* und *irrationale* Exponenten zulassen. Dazu benötigen wir zumindest für den Fall eines *rationalen* Exponenten die n-te *Wurzel* aus einer positiven reellen Zahl. Allerdings dürfen für die verallgemeinerte Potenz nur noch Basen $a \in \boldsymbol{R}$ mit $a > 0$ zugelassen werden.

B. Mit dem ***Wurzelziehen*** – oder, wie man sagt: ***Radizieren*** – lernen wir die erste *Umkehroperation* zum Potenzieren bei gegebenem *natürlichen* Exponenten kennen.

*Definition der reellen **n-ten Wurzel:***	Für $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$ definiert man die *n-te Wurzel* $\sqrt[n]{a}$ als die eindeutige Zahl $x \in \boldsymbol{R}$, $x \geq 0$ mit $x^n = a$. Speziell definiert man: $\sqrt[n]{0} = 0$ und schreibt gemäß Konvention für $n = 2$ (*Quadratwurzel*) nur: $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.
*Definition von **Potenzen mit rationalen Exponenten** für reelle Basen:*	Für $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{N_0}$ definiert *man:* $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ bzw. $a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$. Für $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ und $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $m < 0$ definiert *man:* $a^{\frac{m}{n}} := \dfrac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}$.
*Rechenregeln der reellen Wurzel (**Wurzelgesetze**):*	(1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ für $b > 0$, (2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$, (3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Für die n-te Wurzel x aus einer positiven reellen Zahl $a \in \boldsymbol{R}$ gilt also:

  $$\boxed{x = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a} \; .$$

  Damit ist das *Radizieren* – oder auf gut Deutsch: das *Wurzelziehen* – eine *Umkehroperation* zum Potenzieren und verhält sich zum Potenzieren wie die Subtraktion zur Addition bzw. wie die Division zur Multiplikation.

- Im Ausdruck $\boxed{\sqrt[n]{a} = b}$ heißt $a \in \boldsymbol{R}$, $a \geq 0$ der *Radikand*, $n \in \boldsymbol{N}$ der *Wurzelexponent* und $b \in \boldsymbol{R}$ der *Wurzelwert* bzw. die *Wurzel*.

- Für die soeben eingeführten Potenzen $a^{\frac{m}{n}}$ mit rationalen Exponenten $\alpha = \frac{m}{n} \in \boldsymbol{Q}$ und positiver Basis $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ gelten uneingeschränkt die bekannten *Potenzgesetze*. Aus dieser Sicht stellen die Wurzelgesetze (1) bis (3) nur spezielle Anwendungen der Potenzgesetze dar bzw. lassen sich durch Anwendung derselben beweisen.
- In Brüchen, deren *Nenner* die Form $N = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ bzw. $N = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ mit $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ hat, macht man sinnvoll von der 3. Binomischen Formel Gebrauch, d.h. man erweitert den Nenner entsprechend mit dem Ausdruck $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Auf diese Weise „verschwinden" die Quadratwurzeln aus dem Nenner.
- Man kann die Potenz a^{α} mit positiver Basis $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$ auch für beliebige *irrationale* Exponenten $\alpha \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ definieren. Dazu betrachtet man die *rationale* „Folge" der endlichen *Dezimalbrüche* $x_n = c{,}b_1 b_2 \ldots b_n = c + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{100} + \ldots + \frac{b_n}{10^n} \in \boldsymbol{Q}$, welche α approximieren, und definiert a^{α} als *Grenzwert von* a^{x_n} . Die bekannten *Potenzgesetze* übertragen sich dann auf beliebige *reelle* Exponenten $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.
- Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen der Quadratwurzel und dem *Betrag* $|a|$ einer reellen Zahl $a \in \boldsymbol{R}$, der definiert ist als die *vorzeichenlose Zahl* - also mittels $\boxed{|a| := \begin{cases} a \ , \text{ falls } & a \geq 0 \\ -a \ , \text{ falls } & a < 0 \end{cases}}$. Der Zusammenhang ist gegeben durch: $\boxed{|a| = \sqrt{a^2}}$, wodurch unmittelbar klar ist, dass gilt: $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

C. Mit dem ***Logarithmieren*** erhalten wir eine weitere *Umkehroperation* zum Potenzieren.

*Definition des **Logarithmus:***	Seien $a,b \in \boldsymbol{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$. Dann ist der *Logarithmus* $\log_b a$ von a zur Basis b als die eindeutige Zahl $x \in \boldsymbol{R}$ definiert mit: $$b^x = a \quad .$$ Speziell gilt: $\log_b x = u \quad \Leftrightarrow \quad b^u = x$.
*Spezielle **Logarithmenwerte**:*	Für $a,b \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt stets: (i) $b^{\log_b a} = a$, (ii) $\log_b 1 = 0$ sowie (iii) $\log_b b = 1$.
Rechenregeln für den Logarithmus:	Sei im folgenden $b > 0$, $b \neq 1$. Dann gilt für beliebige Zahlen $a,x,y \in \boldsymbol{R}$ mit $x > 0$, $y > 0$ sowie für $n \in \boldsymbol{N}$: (1) $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$, (2) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$,

	(3) $log_b x^a = a \cdot log_b x$, speziell: $log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot log_b x$.
*Umrechnung zwischen **Logarithmen** verschiedener Basen:*	Für $a,b,c \in \mathbf{R}$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ gilt stets: $log_c a = \frac{log_b a}{log_b c}$ bzw. $log_c a = log_c b \cdot log_b a$.

<u>*Bemerkungen:*</u>

- Im Ausdruck $\boxed{c = log_b a}$ heißt $b \in \mathbf{R}$ die *Basis* und $a \in \mathbf{R}$ der *Numerus* des Logarithmus c . Man beachte, dass stets a und b *positiv* gewählt werden müssen mit $b \neq 1$.
- Wählt man als Basis $b = 10$, so erhält man den *dekadischen Logarithmus*. In Zeichen: $\boxed{lg\ a := log_{10} a}$ für $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$.
- Wählt man als Basis $b = e$ mit der Eulerschen Zahl $e = 2{,}71828\ldots \in \mathbf{R}$, so erhält man den *natürlichen Logarithmus*. In Zeichen: $\boxed{ln\ a := log_e a}$ für $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$.
- Die Umrechnungsformeln zwischen dekadischem und natürlichem Logarithmus für $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ beliebig lauten:

  (i) $\boxed{lg\ a = lg\ e \cdot ln\ a \approx 0{,}43429 \cdot ln\ a}$ bzw. (ii) $\boxed{ln\ a = ln\ 10 \cdot lg\ a \approx 2{,}30259 \cdot lg\ a}$.