Geometrische Interpretation der Lösungen z_k (siehe Skizze):

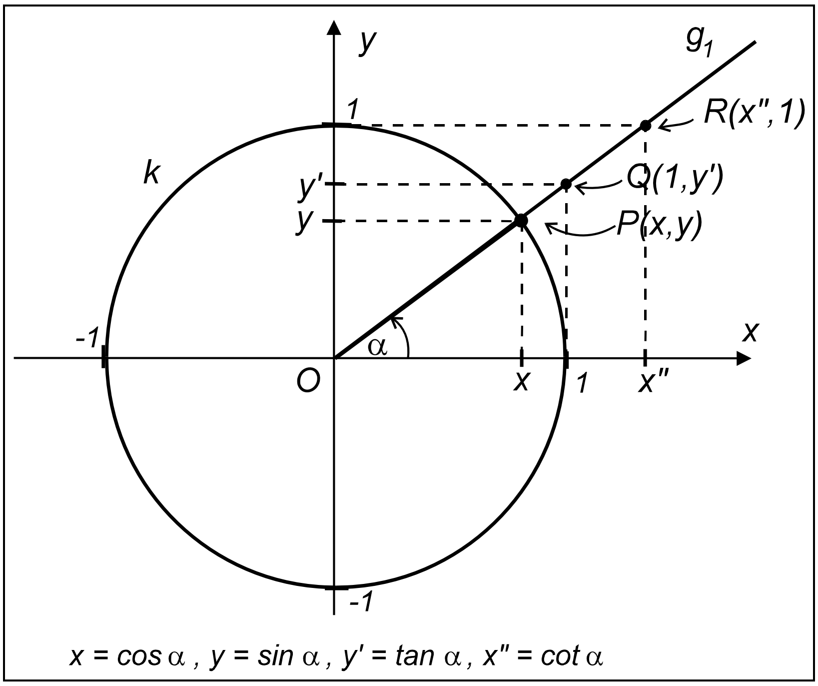
Die n verschiedenenen Lösungen $z_k \in \mathbf{C}$ ($k = 0, \ldots, n-1$) von $z^n = a$ liegen alle auf dem Kreis mit Radius $\rho = \sqrt[n]{|a|}$ um $z = 0$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks (Polygons) mit Anfangswinkel $\alpha_n = Arg\ z_0 = \dfrac{\varphi}{n}$ und Differenzwinkel $\varphi_n = \dfrac{2\pi}{n}$.

Nachtrag: Die trigonometrischen Funktionen als Kreisfunktionen

Zur Erweiterung des Anwendungsbereiches betrachten wir die trigonometrischen Funktionen jetzt in Zusammenhang mit dem *Einheitskreis* k . Aufgrund der an diesem Kreis vollzogenen Erweiterung werden die trigonometrischen Funktionen zuweilen selbst auch als *Kreisfunktionen* bezeichnet. Wir gehen, wie folgt vor:

- Betrachtet wird der Kreis um den *Ursprung* O des ebenen kartesischen Koordinatensystems mit *Radius* $r = 1$ sowie das Winkelfeld, das durch die positive reelle x-Halbachse und eine vom Koordinatenursprung O ausgehende Halbgerade g_1 gebildet wird.

  Skizze:



- Dabei arbeiten wir ab jetzt mit sogenannten *orientierten* Winkeln, d.h. *negative* Winkel sind nun möglich. Dabei gilt:

  (i) $\alpha \geq 0$ (Gradmaß) bzw. $\varphi \geq 0$ (Bogenmaß), wenn g_1 aus der positiven x-Halbachse durch Drehung *links herum*, d.h. durch Drehung im mathematisch *positiven* Drehsinn hervorgeht;

  (ii) $\alpha < 0$ (Gradmaß) bzw. $\varphi < 0$ (Bogenmaß), wenn g_1 aus der positiven x-Halbachse durch Drehung *rechts herum*, d.h.durch

Drehung im mathematisch *negativen* Drehsinn hervorgeht.

- Die trigonometrischen Werte $cos\ \alpha$ bzw. $cos\ \varphi$ und $sin\ \alpha$ bzw. $sin\ \varphi$ für einen gegebenen (positiven oder negativen) Winkel α (im Gradmaß) bzw. φ (im Bogenmaß) erhalten wir als die x,y-Koordinaten des Kreispunktes $P \in k \cap g_1$, der auf g_1 liegt.
- Die trigonometrischen Werte $tan\ \alpha$ bzw. $tan\ \varphi$ sowie $cot\ \alpha$ bzw. $cot\ \varphi$ findet man einerseits als y-Koordinate des Punktes $Q\,(1,y')\in g_1$ mit $x = 1$ bzw. andererseits als x-Koordinate des Punktes $R\,(x'',1)\in g_1$ mit $y = 1$.

Unter Rückgriff auf *orientierte* Winkel im Bogenmaß φ erhält man als *Definitionsbereich* D_f und *Wertebereich* W_f für die trigonometrischen Funktionen folgende zugeordnete Bereiche:

f (x)	D_f	W_f
sin φ	$\varphi \in \boldsymbol{R}$	$sin\ \varphi \in [-1,1]$
cos φ	$\varphi \in \boldsymbol{R}$	$cos\ \varphi \in [-1,1]$
tan φ	$\varphi \in \boldsymbol{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$	$tan\ \varphi \in (-\infty,+\infty)$
cot φ	$\varphi \in \boldsymbol{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$	$cot\ \varphi \in (-\infty,+\infty)$

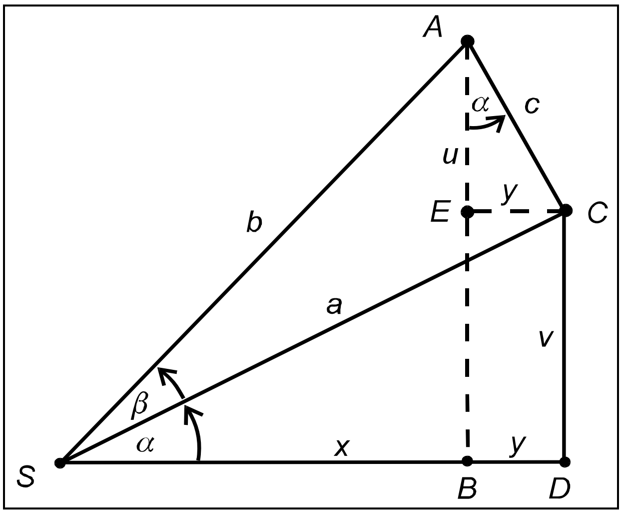
Weiterhin ergeben sich aus der geometrischen Betrachtung am Einheitskreis folgende Eigenschaften für die erweiterten trigonometrischen Funktionen:

Eigenschaft	***Kriterium***
2π-Periodizität	$\forall \varphi \in \boldsymbol{R}\ \forall k \in \boldsymbol{Z}: \sin(\varphi + 2k\pi) = \sin\varphi,\ \cos(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi$
Nullstellen	$\forall \varphi \in \boldsymbol{R}: \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \tan\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = k \cdot \pi \quad (k \in \boldsymbol{Z})$ $\forall \varphi \in \boldsymbol{R}: \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \cot\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \boldsymbol{Z})$
Komplementarität	$\forall \varphi \in \boldsymbol{R}: cos\,(\frac{\pi}{2} - \varphi) = sin\,\varphi,\ sin\,(\frac{\pi}{2} - \varphi) = cos\,\varphi$
„trigonometrischer Pythagoras“	$\forall \varphi \in \boldsymbol{R}: sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$
Symmetrieeigenschaften:	$\forall \varphi \in \boldsymbol{R}: \sin(-\varphi) = -\sin\varphi,\ \cos(-\varphi) = \cos\varphi$ (d.h. *sin* ist „ungerade“, *cos* „gerade“ Funktion) $\forall \varphi \in \boldsymbol{R}: \tan(-\varphi) = -\tan\varphi,\ \cot(-\varphi) = -\cot\varphi$ (d.h. *tan* und *cot* sind „ungerade“ Funktionen)

Additionstheoreme für sin , cos und tan	$\forall \varphi,\psi \in \mathbf{R}:\ \sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi\cdot\cos\psi+\cos\varphi\cdot\sin\psi$ $\forall \varphi,\psi \in \mathbf{R}:\ \cos(\varphi+\psi)=\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi$ $\forall \varphi,\psi \in \mathbf{R}:\tan(\varphi+\psi)=\dfrac{\tan\varphi+\tan\psi}{1-\tan\varphi\cdot\tan\psi}$
Monotonieverhalten:	$\forall \varphi_1,\varphi_2 \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]:\ \varphi_1<\varphi_2 \Rightarrow \sin\varphi_1<\sin\varphi_2$ $\forall \varphi_1,\varphi_2 \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[:\ \varphi_1<\varphi_2 \Rightarrow \tan\varphi_1<\tan\varphi_2$ (d.h. sin , tan ist in $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton wachsend) $\forall \varphi_1,\varphi_2 \in [0,\pi]:\ \varphi_1<\varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_1>\cos\varphi_2$ $\forall \varphi_1,\varphi_2 \in [0,\pi]:\ \varphi_1<\varphi_2 \Rightarrow \cot\varphi_1>\cot\varphi_2$ (d.h. cos , cot ist in $[\,0,\ \pi\,]$ streng monoton fallend)

Eine geometrische Herleitung der *Additionstheoreme an rechtwinkligen Dreiecken* ergibt sich aus folgender Skizze, wobei wir unter α und β jetzt Winkel im *Grad-* oder im *Bogenmaß* verstehen.

Skizze:



Folgerungen aus den Additionstheoremen:

Aus den Additionstheoremen für *sin* und *cos* lassen sich speziell weitere *Formeln* herleiten:

(i) $\forall \varphi \in \mathbf{R}:\ \boxed{\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\,,\ \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi}$,

(ii) $\forall \varphi \in \boldsymbol{R}$: $\boxed{1+\cos\varphi = 2\cdot\cos^2(\frac{\varphi}{2}) \;\;,\;\; 1-\cos\varphi = 2\cdot\sin^2(\frac{\varphi}{2})}$.

Mit $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ und $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$ folgt:

(iii) $\forall \alpha,\beta \in \boldsymbol{R}$: $\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$,

(iv) $\forall \alpha,\beta \in \boldsymbol{R}$: $\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

<u>Folgerungen</u> aus der Monotonieeigenschaft:

Aus der Monotonie von *sin , cos , tan* und *cot* (und *Stetigkeit* der Funktionen) in dem jeweils angegebenen Intervall folgt:

- *Zu jeder beliebigen Zahl x aus dem entsprechenden Wertebereich der jeweiligen trigonometrischen Funktion $x = f(\varphi)$ gehört ein eindeutiger Winkel φ im Monotonieintervall, der durch die trigonometrische Funktion f auf x abgebildet wird.*

D.h.: Die trigonometrischen Funktionen lassen sich *umkehren*, und die entsprechenden Umkehrfunktionen lauten:

(i) $\arcsin x = \sin^{-1}(x) = \varphi \;\Leftrightarrow\; x = \sin\varphi$ für $x \in [-1,1]$ beliebig mit $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *arcsin* heißt der *Arcus Sinus* ,

(ii) $\arccos x = \cos^{-1}(x) = \varphi \;\Leftrightarrow\; x = \cos\varphi$ für $x \in [-1,1]$ beliebig mit $\varphi \in [0, \pi]$. *arccos* heißt der *Arcus Kosinus* ,

(iii) $\arctan x = \tan^{-1}(x) = \varphi \;\Leftrightarrow\; x = \tan\varphi$ für $x \in \boldsymbol{R}$ beliebig mit $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *arctan* heißt der *Arcus Tangens* ,

(iv) $\operatorname{arccot} x = \cot^{-1}(x) = \varphi \;\Leftrightarrow\; x = \cot\varphi$ für $x \in \boldsymbol{R}$ beliebig mit $\varphi \in \left]0, \pi\right[$. *arccot* heißt der *Arcus Kotangens* .

Wählt man nun als Variablennamen x statt φ und trägt man die *Funktionswerte* $\sin x$ jeweils über dem entsprechenden *Funktionsargument* x - das ist nun der zugehörige Winkel im Bogenmaß – ab, so erhält man den sogenannten *Graphen* der Sinusfunktion:

$$\boxed{\Gamma_f = \{(x,y) \mid y = \sin x \,;\, x \in \boldsymbol{R}\} \subseteq \boldsymbol{R}^2} \;.$$

Die zugehörige Skizze als Teilmenge der Ebene siehe auf der nächsten Seite!

Wir kommen auf die trigonometrischen *Funktionen* und ihre Umkehrfunktionen noch einmal im Rahmen der Theorie der elementaren Funktionen zurück.