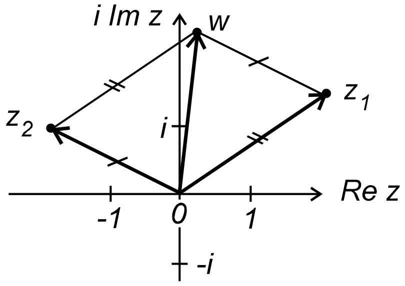
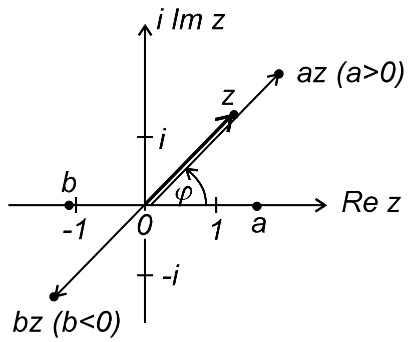
<u>Skizze</u>:



(a) $w=z_1+z_2$



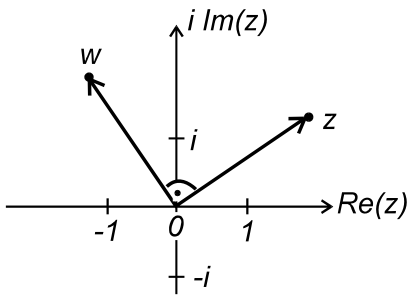
(b) w=az , a reell

- Dem *Produkt* $\boxed{w = i \cdot z = -y + i \cdot x}$ von i und $z \in \boldsymbol{C}$ entspricht der Vektor mit Länge $|w| = |i| \cdot |z| = |z|$ und Richtung $Arg\, w \equiv Arg\, z + 90^{\circ}\ (2\pi)$. Damit entsteht w aus dem „Vektor“ z durch *Drehung um* 90° entgegen dem Uhrzeigersinn (d.h. im math. *positiven* Drehsinn). (Siehe dazu Skizze (c).)
- Dem *Produkt* $\boxed{w = c \cdot z}$ der beiden komplexen Zahlen $c = a + i \cdot b \in \boldsymbol{C}$ und $z \in \boldsymbol{C}$ entspricht der Vektor, der durch Vektoraddition der beiden „Vektoren“ $a \cdot z$ und $b \cdot (i \cdot z)$ entsteht (siehe dazu Skizze (d)).

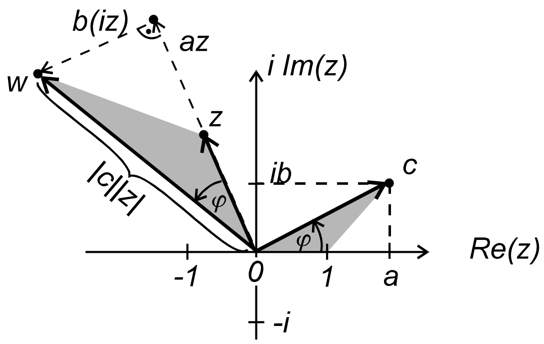
  Damit folgt für Länge und Richtung des Vektors w :

  (*i*) $|w| = |c| \cdot |z|$ und (*ii*) $Arg\, w \equiv Arg\, z + \varphi\ (2\pi)$ mit $Arg\, c = \varphi$.

<u>Skizze</u>:



(c) w=iz



(d) $w= c \cdot z$

Also ist die Multiplikation von $z \in \boldsymbol{C}$ mit einer anderen (festen) komplexen Zahl $c \in \boldsymbol{C}$ interpretierbar als *Drehstreckung* mit *Streckfaktor* $|c|$ und *Drehwinkel* $\varphi = Arg\, c$.

- Dem *Kehrwert* $\boxed{w = z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$ einer beliebigen komplexen Zahl $z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$

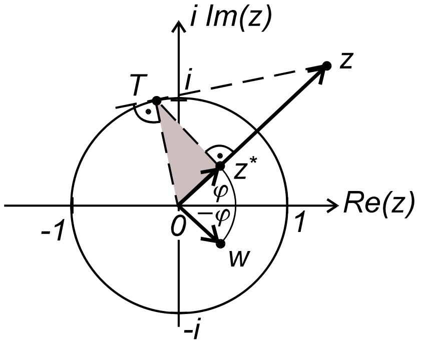
  entspricht der Vektor, welcher aus dem „Vektor“ z durch Hintereinanderausführung der

Spiegelung am Einheitskreis - also dem Kreis um $z_0 = 0$ mit Radius $r = 1$ - mit Bild $z^* = \dfrac{z}{|z|^2}$ und der anschließenden *Spiegelung an der reellen Achse* mit Bild $w = \bar{z}^*$ entsteht. Insbesondere gilt dafür (siehe dazu Skizze (e)):

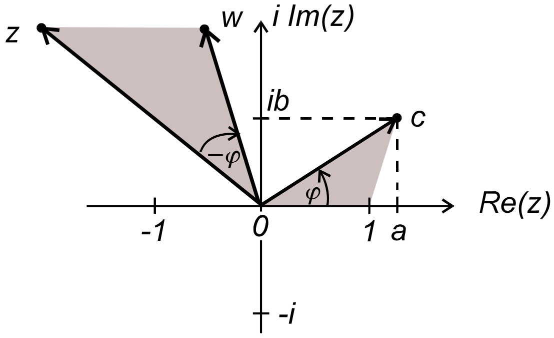
$$|w| = \frac{1}{|z|}\ ,\ Arg\ w = -Arg\ z^* \equiv -Arg\ z = -\varphi\ \ (2\pi)\ .$$

- Die *Division* $\boxed{w = \dfrac{z}{c} = z \cdot \dfrac{1}{c}}$ der komplexen Zahlen $z \in \mathbf{C}$ durch die komplexe Zahl $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ist eigentlich die Multiplikation von z mit $c^* = \dfrac{1}{c}$. Somit wird die Division einer komplexen Zahl $z \in \mathbf{C}$ durch eine andere komplexe Zahl $c \in \mathbf{C}$ mit $c \neq 0$ als *Drehstreckung* interpretierbar. Dabei ist $|c^*| = \dfrac{1}{|c|}$ der *Streckfaktor* und $\varphi^* = Arg\ c^* \equiv -Arg\ c = -\varphi\ \ (2\pi)$ der *Drehwinkel* (siehe dazu Skizze (f)).

<u>Skizze</u>:



(e) w = 1/z (z ≠ 0)



(f) w= z/c (c ≠ 0)

Die Polardarstellung komplexer Zahlen

Für komplexe Zahlen $z = x + i \cdot y,\ w = u + i \cdot v \in \mathbf{C}$ gelten bezüglich der *Polarkoordinaten* im Rückgriff auf trigonometrische Beziehungen die folgenden *Gesetze*:

Polardarstellung / Eulersche Form einer komplexen Zahl	$z = r\,e^{i\varphi} := r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ mit $r = \lvert z \rvert$ und $\varphi = arg\ z$
Umrechnung Kartesisch → Polardarst.	$z = x + i \cdot y \longrightarrow z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ mit $r = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{falls } y < 0 \end{cases}$
Umrechnung Polardarst. → Kartesisch	$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \longrightarrow z = x + i \cdot y$ mit $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$

Formeln von De Moivre und Folgerungen	$(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)\cdot(\cos\psi+i\cdot\sin\psi)=\cos(\varphi+\psi)+i\cdot\sin(\varphi+\psi)$ bzw. $e^{i\cdot\varphi}\cdot e^{i\cdot\psi}=e^{i\cdot(\varphi+\psi)}$ $(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)^n=\cos(n\cdot\varphi)+i\cdot\sin(n\cdot\varphi)\quad(n\in\boldsymbol{N}_0)$ bzw. $\left(e^{i\cdot\varphi}\right)^n=e^{i\cdot n\varphi}\quad(n\in\boldsymbol{N}_0)$ $\frac{1}{\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi}=\cos(-\varphi)+i\cdot\sin(-\varphi)=\overline{\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi}$ bzw. $\frac{1}{e^{i\cdot\varphi}}=e^{-i\cdot\varphi}=\overline{e^{i\cdot\varphi}}$.
Multiplikation / Division komplexer Zahlen in Polardarstellung:	Für $z=r\cdot e^{i\cdot\varphi}=\lvert z\rvert\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)\in\boldsymbol{C}$ und $w=\rho\cdot e^{i\cdot\psi}=\lvert w\rvert\cdot(\cos\psi+i\cdot\sin\psi)\in\boldsymbol{C}$ gilt speziell: (i) $z\cdot w=\lvert z\rvert\cdot\lvert w\rvert\cdot(\cos(\varphi+\psi)+i\cdot\sin(\varphi+\psi))$ bzw. $z\cdot w=r\cdot\rho\cdot e^{i\cdot(\varphi+\psi)}$ (ii) $z^n=\lvert z\rvert^n\cdot(\cos(n\cdot\varphi)+i\cdot\sin(n\cdot\varphi))\quad(n\in\boldsymbol{N}_0)$ bzw. $z^n=r^n\cdot e^{i\cdot n\varphi}$ (iii) $\frac{z}{w}=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}\cdot(\cos(\varphi-\psi)+i\cdot\sin(\varphi-\psi))$ bzw. $\frac{z}{w}=\frac{r}{\rho}\cdot e^{i\cdot(\varphi-\psi)}$

<u>Bemerkungen</u>:

- Die Polardarstellung bzw. Eulersche Form der komplexen Zahlen macht noch einmal deutlich: Die Multiplikation von $z\in\boldsymbol{C}$ beliebig mit einer (festen) komplexen Zahl $c=r\cdot e^{i\cdot\varphi}=\lvert c\rvert\cdot(\cos\psi+i\cdot\sin\psi)$, $c\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$ sich geometrisch deuten lässt als *Drehstreckung* der komplexen Ebene $\boldsymbol{C}$ um den *Streckfaktor* $r=\lvert c\rvert$ und den *Drehwinkel* $Arg\ c=\psi$.
- De Moivre's Formeln stellen die *komplexe Form der Additionstheoreme* der trigonometrischen Funktionen *sin* und *cos* dar. Insbesondere gelangt man zu den bekannten Additionsformeln für *sin* und *cos* , wenn man den Real- und Imaginärteil des Produktes $e^{i\cdot\varphi}\cdot e^{i\cdot\psi}$ mit dem Real- und Imaginärteil von $e^{i\cdot(\varphi+\psi)}$ vergleicht.
- Durch die Schreibweise $\boxed{e^{i\cdot\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi}$ (auch *Eulersche Formel* genannt) wird der enge Zusammenhang zwischen *Additionstheoremen* und *Potenzgesetzen* offenbar. Dass Euler hier $e^{i\cdot\varphi}$ verwendet, hat seinen tieferen Bezug zur *Exponentialfunktion* e^x , die wir später noch betrachten werden. Hier können wir die Eulersche Formel auch als Definition für den komplexen Term $e^{i\cdot\varphi}$ betrachten.
- Setzt man in die Eulersche Formel $x=\pi$ ein, erhält man die wunderschöne mathematische „Weltformel“: $\boxed{e^{i\cdot\pi}=\cos\pi+i\cdot\sin\pi=-1}$ bzw. $\boxed{e^{i\cdot\pi}+1=0}$.

Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl $a \in \mathbf{C}$

Die n-ten Einheitswurzeln:	Die Gleichung $z^n - 1 = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ hat in $\mathbf{C}$ genau n verschiedene Lösungen $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$, gegeben durch $$\zeta_k = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k}{n}\right) \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$ bzw. $$\zeta_k = e^{i \cdot \frac{2\pi \cdot k}{n}} \quad (k = 0, \ldots, n-1) .$$ $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ heißen die *n-ten Einheitswurzeln*.
Die n-ten Wurzeln der Zahl $a \in \mathbf{C}$:	In $\mathbf{C}$ hat die Gleichung $$z^n - a = 0 \ (n \in \mathbf{N}) \text{ mit } a = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \in \mathbf{C}$$ genau n verschiedene Lösungen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ mit: $$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$ bzw. $$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

Bemerkung:

(i) Für die n-ten Einheitswurzeln ζ_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ gilt: $\boxed{\zeta_k = \zeta_1^k \quad (k = 0, \ldots, n-1)}$.

(ii) Für die n komplexen Wurzeln z_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ von $a = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \in \mathbf{C}$ gilt:

$$\boxed{z_k = z_0 \cdot \zeta_1^k \ (k = 0, \ldots, n-1) \text{ mit } z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi}{n}\right) \text{ bzw. } z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}}} \ .$$

(iii) Außerdem erfüllen die n Lösungen z_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ der Gleichung $z^n - a = 0$ mit $a \in \mathbf{C}$ die Gleichung:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} z_k = z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0} \ .$$

Skizze: (für den Fall $n = 6$)