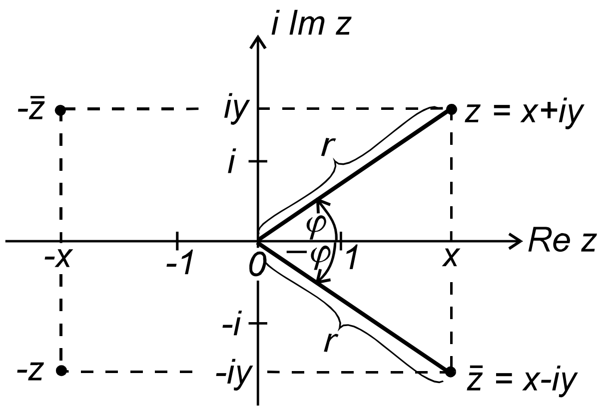
- $x = Re\ z$ und $y = Im\ z$ interpretiert man als die *kartesischen Koordinaten* des „Punktes" $z \in \boldsymbol{Z}$. Damit entsprechen den rein *reellen Zahlen* $z = x \in \boldsymbol{R}$ die Punkte auf der waagerechten *reellen Achse* und den rein *imaginären Zahlen* $z = i \cdot y \in \boldsymbol{C}$ die Punkte auf der vertikalen *imaginären Achse*.
- Auch der Betrag $r = |z|$ und das Argument $arg\ z$ bzw. sein Hauptwert $\varphi = Arg\ z$ besitzen in der komplexen Zahlenebene eine geometrische Interpretation:

  $r = |z|$ beschreibt den *euklidischen Abstand* des Punktes z vom *Koordinatenursprung* $z_0 = 0$, während $\varphi = Arg\ z$ den *positiv* - d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn - *orientierten Winkel* im Grad- oder Bogenmaß unter Beachtung des Vorzeichens von φ bezeichnet, den die vom Ursprung $z_0 = 0$ ausgehende und durch z verlaufende Halbgerade mit der positiven reellen Achse einschließt.

  Damit liefern die *Polarkoordinaten* r und φ neben den *kartesischen Koordinaten* x und y eine zweite eindeutige Beschreibung der komplexen Zahlen $z \in \boldsymbol{C}$ bzw. der ihnen entsprechenden Punkte der Gaußschen Zahlenebene. Man beachte dabei, dass φ nur eindeutig bis auf Vielfache von 360° bzw. $2 \cdot \pi$ - genauer: *„eindeutig modulo $2 \cdot \pi$"* - ist.
- Der zu z konjugiert komplexen Zahl $\boxed{\bar{z} = x - i\,y}$ entspricht geometrisch in der komplexen Zahlenebene das *Spiegelbild* des „Punktes" z an der *reellen Achse* $y = 0$. Analog „ist" $\boxed{-\bar{z} = -x + i\,y}$ das *Spiegelbild* von z an der *imaginären Achse* $x = 0$, während $\boxed{-z = -(\,x + i\,y\,)}$ aus z durch *Punktspiegelung* an dem Koordinatenursprung $z_0 = 0$ entsteht.

  <u>*Skizze*</u>:



  Für den Betrag und das Argument dieser Zahlen gilt insbesondere:

  (i) $\boxed{|z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = |-z|}$, (ii) $\boxed{arg\ \bar{z} = -arg\ z}$,

  (iii) $\boxed{arg\ (-\bar{z}) = 180^\circ - arg\ z}$ bzw. $\boxed{arg\ (-\bar{z}) = \pi - arg\ z}$ und

  (iv) $\boxed{arg\ (-z) = arg\ z + 180^\circ}$ bzw. $\boxed{arg\ (-z) = arg\ z + \pi}$.

Die Rechengesetze in C

In $\boldsymbol{C}$ gelten speziell folgende *Regeln* für das *Rechnen* mit komplexen Zahlen $z = x + i{\cdot}y \in \boldsymbol{C}$ und $w = u + iv \in \boldsymbol{C}$ wie sie ganz analog auch für die reellen Zahlen gelten. Daher nennt man $\boldsymbol{C}$ auch einen „Körper". Die einzelnen Rechengesetze lauten:

Rechenoperation:	***Gesetze:***
Addition / Subtraktion :	$z \pm w = (x \pm u) + i\,(y \pm v)$
Multiplikation:	$z \cdot w = (xu - yv) + i\,(xv + yu)$
Division (Kehrwert):	$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$, $\frac{z}{w} = \frac{z\cdot\bar{w}}{w\cdot\bar{w}} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\,\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}$
Konjugieren von Summen / Produkten:	$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, $\bar{\bar{z}} = z$
Real- und Imaginärteil mittels z und $\bar{z}$ dargestellt:	$Re\ z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $Im\ z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ Insbesondere folgt: $z \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow Im\ z = 0$
Gesetze für den Betrag:	*(i)* $\lvert z \rvert = \sqrt{z\cdot\bar{z}} \in \boldsymbol{R}$, *(ii)* $\lvert z \rvert = \lvert \bar{z} \rvert$, *(iii)* $\lvert z \rvert \geq 0$ und $\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (*positive Definitheit*) , *(iv)* $\lvert z\cdot w \rvert = \lvert z \rvert \cdot \lvert w \rvert$, $\left\lvert \frac{z}{w} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert w \rvert}$ (*Homogenität*) , *(v)* $\lvert z + w \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert w \rvert$, $\big\lvert \lvert z \rvert - \lvert w \rvert \big\rvert \leq \lvert z - w \rvert$ (*Dreiecksungleichungen*) .

Bemerkungen:

- Im Wesentlichen läuft die Addition, Subtraktion und Multiplikation von komplexen Zahlen nach den Gesetzen der Termrechnung unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$.
- Die Division mit Erweiterung des konjugiert komplexen Nenners fußt (wieder einmal) auf dem *3. Binom*, wie auch die Formel $\lvert z \rvert^2 = z{\cdot}\bar{z}$ zur Berechnung des Betrags/Moduls einer komplexen Zahl. Dies rechtfertigt das eigene Symbol für die *komplex konjugierten Zahl*.
- Die Probe von Vieta im Fall zweier konjugiert komplexer Nullstellen z_1 und $z_2 = \bar{z}_1$ schreibt sich dann auch, wie folgt:

  (i) $z_1 + z_2 = z_1 + \bar{z}_1 = 2 \cdot \mathrm{Re}(z_1) = -\frac{b}{a}$, (ii) $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = \lvert \bar{z}_1 \rvert^2 = \frac{c}{a}$.

Über die Nullstellen einer komplexen quadratischen Gleichung

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung einer allgemeinen Lösungsformel bzw. eines allgemeinen Lösungsverfahrens für die quadratische Gleichung mit *komplexen* Koeffizienten.

<table>
<tr><td>Allgemeine Form der komplexen quadratischen Gleichung:</td><td>$az^2 + bz + c = 0$ mit $a,b,c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ $(z \in \mathbf{C})$</td></tr>
<tr><td>Faktorisierte cForm der Gleichung (= Zerlegung in Linearfaktoren):</td><td>Sind $z_1 \in \mathbf{C}$ und $z_2 \in \mathbf{C}$ die komplexen Lösungen der quadratischen komplexen Gleichung, so gilt:
$$az^2 + bz + c = a \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \quad (z \in \mathbf{C})$$</td></tr>
<tr><td>Lösung der speziellen quadratischen Gleichung
$z^2 = c$ mit $c \in \mathbf{C}$:</td><td>Sei $c = \alpha + i\beta$ mit $\mathrm{Re}\, z = \alpha$, $\mathrm{Im}\, z = \beta$. Dann hat die Gleichung $z^2 - c = 0$ bzw. $z^2 = c$ die folgenden Lösungen $z_1 \in \mathbf{C}$, $z_2 \in \mathbf{C}$:
(i) Fall $\beta \geq 0$:
$\mathrm{Re}\, z_k$ und $\mathrm{Im}\, z_k$ haben dasselbe Vorzeichen und
$$z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} \quad ,$$
$$z_2 = -z_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}$$
(ii) Fall $\beta < 0$:
$\mathrm{Re}\, z_k$ und $\mathrm{Im}\, z_k$ haben verschiedenes Vorzeichen und
$$z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} \quad ,$$
$$z_2 = -z_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}$$</td></tr>
<tr><td>Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung
$az^2 + bz + c = 0$:</td><td>Bezeichne $\Delta := b^2 - 4ac$ die Diskriminante der Gleichung, dann erhält man für $az^2 + bz + c = 0$ die folgenden Lösungen $z_1 \in \mathbf{C}$, $z_2 \in \mathbf{C}$:
$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{-b - w_1}{2a} \quad .$$
Dabei sind $w_1, w_2 \in \mathbf{C}$ mit $w_1 = -w_2$ die beiden Lösungen der Gleichung $w^2 = \Delta = \alpha + i\beta$.</td></tr>
</table>

Probe für die beiden Lösungen z_1 und z_2 (*Satz von Vieta*):	Wie schon im *reellen* Fall erhält man: (i) $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ und (ii) $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$.

<u>Bemerkungen</u>:

- Wie man erkennt, ist die Lösung quadratischer Gleichungen mit komplexen Koeffizienten in **C** uneingeschränkt möglich. *Unlösbarkeit* gibt es nun nicht mehr !!!
  Nach dem schon genannten *Fundamentalsatz der Algebra* besitzt in **C** die Gleichung

  $\boxed{a_m \cdot z^m + a_{m-1} \cdot z^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = 0}$ mit $a_k \in \mathbf{C}$ $(k = 1, \ldots, m)$, $a_m \neq 0$

  sogar genau n (evt mehrfach gezählte) Lösungen $z_1, \ldots, z_m \in \mathbf{C}$. Für das zugehörige (komplexe) Polynom $p(z)$ gilt dann:

  $\boxed{p(z) = a_m \cdot z^m + a_{m-1} \cdot z^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 - a_m \cdot (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_m)}$.

- Für den Spezialfall $z^m - c = 0$ – also $a_m = 1$, $a_k = 0$ $(k = 1, \ldots, m-1)$, $a_0 = -c$ – erhält man für die m Lösungen $z_1, \ldots, z_m \in \mathbf{C}$ wieder eine explizite Lösungsformel (s. später).

Die geometrische Interpretation komplexer Zahlen als Vektoren

Verbindet man den Koordinatenursprung $z_0 = 0$ der Gaußschen Zahlenebene mit jedem der Punkte dieser Ebene durch einen *gerichteten Pfeil*, so erhält man für die komplexen Zahlen $z \in \mathbf{C}$ eine weitere Interpretation: Die komplexen Zahlen entsprechen dann den *zweidimensionalen Vektoren* - genauer: *Ortsvektoren.*

- Die *Komponenten* des *Vektors*, welcher die komplexe Zahl $z \in \mathbf{C}$ repräsentiert, sind gerade die *kartesischen Koordinaten* $x = Re\, z$ und $y = Im\, z$ von z .
- Entsprechend beschreiben die *Polarkoordinaten* $r = |z|$ und $\varphi = Arg\, z$ von z die *Länge* und *Richtung* dieses die komplexe Zahl z repräsentierenden (Orts-)Vektors.

Auf diese Weise erhält man für die Addition komplexer Zahlen sowie für die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer rellen Zahl folgende geometrische Veranschaulichung:

- Der *Summe* $\boxed{w = z_1 + z_2}$ zweier komplexer Zahlen entspricht der Vektor, der durch Aneinanderhängen der beiden „Vektoren“ z_1 und z_2 gemäß *Parallelogrammregel* (d.h. *Vektoraddition*) entsteht (siehe dazu Skizze (a) auf der folgenden Seite).
- Dem *Produkt* $\boxed{w = a \cdot z}$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbf{C}$ mit einer reellen Zahl $a \in \mathbf{R}$ entspricht der Vektor mit Länge $|w| = |a| \cdot |z|$ und der Richtung $Arg\, w = Arg\, z = \varphi$ im Fall $a > 0$ bzw. der Richtung $Arg\, w = Arg\,(-z) \equiv \varphi + 180^\circ\ (2\pi)$ im Fall $a < 0$. Für $a = 0$ oder $z = 0$ erhält man insbesondere den *Nullvektor* $w = 0$ (siehe dazu Skizze (b) auf der folgenden Seite).