Probe für die beiden Lösungen x_1 und x_2 (*Satz von Vieta*):	Ist $ax^2 + bx + c = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$, so folgt: (i) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ und (ii) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Dies gilt sowohl im *reellen* als auch im *komplexen* Fall, wobei man in (ii) $i^2 = -1$ verwendet.

Bemerkungen:

- Historisch ist die Forderung nach der Existenz einer Wurzel aus einer *negativen* Zahl die Geburtsstunde der *imaginären Einheit „i“* als Lösung der Gleichung $\boxed{x^2 + 1 = 0}$.
- Es gibt eine Reihe anderer Gleichungen, die sich auf die quadratische Gleichung zurückführen lassen. Ein Beispiel ist die *biquadratische Gleichung (4. Grades)*, die da lautet: $\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$. *Substituiert* man in dieser Gleichung $\boxed{y = x^2}$, so erhält man die quadratische Gleichung $ay^2 + by + c = 0$. Ist y_0 eine Lösung dieser quadratischen Gleichung, so erhält man mit $\boxed{x_1 = \sqrt{y_0}}$, $\boxed{x_2 = -\sqrt{y_0}}$ zwei Lösungen der Ausgangsgleichung.

  Beachte: Im Fall $y_0 < 0$ sind beide Lösungen x_i *rein imaginär* und damit *konjugiert komplex*.
- Neben der quadratischen bzw. biquadratischen Gleichung möchte man gerne allgemeine *algebraische Gleichungen* mit reellen *Koeffizienten* der Form

  $$(*) \quad \boxed{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0} \quad \text{mit } a_k \in \boldsymbol{R},\ a_m \neq 0 \ (k = 1, \ldots m)$$

  lösen. Die Mathematiker im 16./17. Jh. haben allgemeine Lösungsformeln für die Fälle $m = 3$ (*kubische* Gleichung) und $m = 4$ entdeckt bzw. entwickelt. Doch konnte man im 19. Jh. beweisen, dass es für $m \geq 5$ keine allgemeinen Lösungsformeln mehr zur Berechnung der *Wurzeln* $x \in \boldsymbol{C}$ der Gleichung $(*)$ gibt. Man nennt die Lösungen $x \in \boldsymbol{C}$ von $(*)$ auch die *Nullstellen* des Polynoms $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$
- Als erster hat der deutsche Mathematiker *C.F. Gauß* den sogenannten *Fundamentalsatz der Algebra* bewiesen. Dieser Satz besagt, dass *jede* Gleichung $(*)$ mit reellen Koeffizienten $a_k \in \boldsymbol{R}$ - ja sogar mit *komplexen* Koeffizienten $a_k \in \boldsymbol{C}$ - genau m Lösungen besitzt, wenn man den Zahlbereich $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen erweitert. Dabei können Wurzeln auch *mehrfach* auftreten, müssen also nicht notwendig paarweise verschieden sein. Diese Wurzeln oder Nullstellen gehören aber i.a. dem größeren Zahlbereich $\boldsymbol{C}$ der *komplexen Zahlen* an, den wir weiter unten einführen und näher betrachten werden.
- Ist insbesondere $x_0 \in \boldsymbol{C}$ eine *komplexe* Lösung der *reellen* Gleichung $(*)$, dann folgt, wie man mathematisch zeigen kann, dass auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{x}_0 \in \boldsymbol{C}$ eine weitere Lösung von $(*)$ ist. Das heißt:

  Nichtreelle Wurzeln von *reellen* algebraischen Gleichungen tauchen stets als *konjugiert komplexe Pärchen* auf. (Zu komplexen Zahlen siehe später.)

Über die Lösungen einer reellen Gleichung höheren Grades und über den Nachweis der Irrationalität reeller Zahlen

Sucht man die Nullstellen eines Polynoms $\boxed{p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}$ vom Grad $m \geq 3$ und mit Koeffizienten $a_k \in \boldsymbol{R}$, $a_m \neq 0$ $(k = 1, \ldots m)$, so stößt man für den Fall $m \geq 3$ entweder auf relativ komplizierte Lösungsformeln – so für $m = 3$ und $m = 4$ –, oder es gibt – so für $m \geq 5$ – überhaupt *keine allgemeine Lösungsformel* mehr. Dennoch kann man in bestimmten Fällen bei der Suche nach Nullstellen eine Erfolg versprechende Taktik anwenden, und zwar gerade in den Fällen, wo man es mit einem *ganzzahligen* Polynom $p(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$ – das ist ein *reelles* Polynom $p(x)$ mit *ganzzahligen Koeffizienten* $a_k \in \boldsymbol{Z}$ – zu tun hat, welches u.a. *rationale Nullstellen* besitzt.

Die Taktik, um eine Gleichung $(*)$ $\boxed{p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0}$ konkret lösen, besteht aus der Hintereinanderausführung der folgenden Schritte:

(i) Finde zunächst durch *„intelligentes Raten"* (siehe unten) eine *rationale* Nullstelle x_0 aus dem zu $(*)$ gehörigen *rationalen Nullstellen-Pool* unter Verwendung des *Hornerschemas*.

(ii) Führe zu jeder gefundenen Nullstelle x_0 dann die *Polynomdivision* des betrachteten Polynoms $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ durch den Linearterm $x - x_0$ durch. Diese Polynomdivision geht auf und liefert nun ein ganzzahliges Polynom $q(x) = b_{m-1} \cdot x^{m-1} + b_{m-2} \cdot x^{m-2} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0 \in \boldsymbol{Z}[x]$ vom Grad $m - 1$. Auch hierbei ist *Horner* das Mittel der Wahl.

(iii) Setze nun die Schritte (i) und (ii) mit dem neuen Polynom $q(x)$ fort (sogenannter *kaskadierter Horner*), bis man schließlich – hoffentlich – auf eine *quadratische Gleichung* stößt. Dessen (evtl. komplexe) Lösungen kann man dann explizit mit der angegebenen *abc-* oder der *pq-Formel* berechnen.

Das *intelligente Raten* ist eigentlich ein gezieltes Durchprobieren aller möglichen *rationalen Nullstellen* $x_0 \in \boldsymbol{Q}$ von $p(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \in \boldsymbol{Z}[x]$ und fußt auf dem folgenden notwendigen Kriterium für rationale Nullstellen:

$$(**) \quad \boxed{p(x_0) = 0 \text{ für } x_0 = \frac{r}{s} \in \boldsymbol{Q} \quad \Rightarrow \quad r \mid a_0 \text{ und } s \mid a_m} \ .$$

Dabei steht „$|$" für „*teilt ganzzahlig*"; also:

$$a \mid b \text{ für } a,b \in \boldsymbol{Z} \ :\Leftrightarrow \text{„}a \text{ ist ein Teiler von } b\text{"} \ \Leftrightarrow \ b = a \cdot d \text{ mit } d \in \boldsymbol{Z} \text{ geeignet.}$$

Für den rationalen Nullstellen-Pool N_p gilt dann also: $\boxed{N_p = \left\{ x_0 = \frac{r}{s} \in \boldsymbol{Q} \;\middle|\; r \mid a_0 \wedge s \mid a_m \right\}}$.

Man beachte bei der Erstellung aller möglichen Kombinationen auch, dass beide möglichen Vorzeichen „+/–" auftreten können.

Das notwendige Nullstellenkriterium $(**)$ für rationale Nullstellen lässt sich auch sehr vorteilhaft anwenden, um die *Irrationalität* bestimmter *algebraischer Zahlen* $\alpha \in \boldsymbol{R}$ nachzuweisen. Das sind Zahlen, die mittels Wurzeln aus rationalen Zahlen gebildet werden, wie z.B. $\alpha = \sqrt[3]{6} - \sqrt{5}$. Hierzu geht man, wie folgt, vor:

(i) Konstruiere zunächst durch entsprechende Umformung der Gleichung, durch welche α definiert ist, ein *ganzzahliges Polynom* $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$, so dass gilt: $p(\alpha) = 0$. Damit ist dann α eine reelle Nullstelle von $p(x)$.

(ii) Bilde anschließend unter Berücksichtigung des notwendigen Kriteriums $(**)$ den *rationalen Nullstellen-Pool* N_p zu diesem Polynom.

(iii) Teste dann mittels *Hornerschema* alle möglichen Werte aus N_p durch und zeige: Es befindet sich keine(!) Nullstelle darunter. Dann muss für α wegen $p(\alpha) = 0$ gelten: $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, d.h. α ist *irrational*.

Hier ein Beispiel:

$\alpha = \sqrt[n]{r}$ mit einer *Primzahl* $r \in \mathbf{P}$ und $n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$ ist Nullstelle von $p(x) = x^n - r \in \mathbf{Z}[x]$; das heißt: $p(\alpha) = 0$. Da r als Primzahl nur die trivialen Teiler ± 1 und $\pm r$ besitzt, erhält man für den möglichen rationalen Nullstellen-Pool: $N_p = \{1, -1, r, -r\}$. Direktes Einsetzen dieser Werte in das Polynom liefert als Funktionswerte (ohne Horner), da r Primzahl ist:

(i) $p(\pm 1) = (\pm 1)^n - r \neq 0$, da $r \neq \pm 1$;

(ii) $p(\pm r) = (\pm r)^n - r = r \cdot \left[(\pm 1)^n \cdot r^{n-1} - 1\right] \neq 0$, da $r \neq 0,\ r^{n-1} \neq \pm 1$ wegen $n \geq 2$.

Also können wir schließen: $\alpha = \sqrt[n]{r} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ist eine *irrationale* Zahl.

Einführung in die komplexen Zahlen

In der Geschichte der Mathematik stieß man im 16. Jh. im Zusammenhang mit der Suche nach Formeln zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen höheren Grades auf Quadratwurzeln von *negativen Zahlen*. Ausschlaggebend war ein Lösungsverfahren für die kubische Gleichung $x^3 = p \cdot x \pm q$ mit natürlichen Zahlen $p, q \in \mathbf{N}$, welches vom Rechenmeister *Tartaglia* aus Italien stammte und vom italienischen Mathematiker *Cardano* 1545 veröffentlicht wurde. In dieser sogenannten *Cardanischen Lösungsformel* kann es passieren, dass Quadratwurzeln mit einem *negativen Radikanden* berücksichtigt werden müssen, um am Ende (mindestens) eine reelle Lösung als Ergebnis der Rechnung zu erhalten.

1777 trieb *Leonhard Euler* die komplexen Zahlen durch Einführung des Symbols i voran, indem er definierte: $i := \sqrt{-1}$. Euler nannte diese Quadratwurzel – im Gegensatz zu den *reellen* Zahlen – *imaginäre Einheit*. Die charakteristische Eigenschaft der neuen Zahl i ist also: $\boxed{i^2 = -1}$. Mittels dieser Zahl definieren wir weiter:

Definition:

Die Menge $\boxed{\mathbf{C} = \{z = x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbf{R}\}}$ mit der imaginären Einheit i heißt der Zahlbereich der *komplexen Zahlen*. Er bildet hinsichtlich der (üblichen) Addition und Multiplikation unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ einen *Körper*. In ihm ist der „alte“ Zahlbereich $\mathbf{R}$ „eingebettet“ in der Form: $\boxed{\mathbf{R} = \{z = x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbf{R},\ y = 0\} \subseteq \mathbf{C}}$.

Einen alternativen Zugang zu $\boldsymbol{C}$ hat der irische Mathematiker *Hamilton* im Jahre 1837 gefunden, indem er in der Menge $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \{(a,b) \mid a,b \in \boldsymbol{R}\}$ der *geordneten reellen Paare* $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2$ die beiden Rechenoperationen *„Addition“* und *„Multiplikation“* einführte mittels:

(i) $\boxed{(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)}$ bzw. (ii) $\boxed{(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c - b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c)}$.

Hamilton konnte damit zeigen, dass in $\boldsymbol{R}^2$ aufgrund dieser Definitionen dieselben Rechengesetze - also *Assoziativ-, Kommutativ-, Distributivgesetz* usw. - gelten wie in $\boldsymbol{R}$.

Setzt man jetzt $\boxed{i := (0,1)}$ und bettet mittels der *Identifikation* $\boxed{a := (a,0)}$ die „alten“ reellen Zahlen $a \in \boldsymbol{R}$ in $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{R}^2,+,\cdot)$ ein, so gilt speziell:

(i) $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$ sowie

(ii) $z = (x,y) = (x,0)+(0,y) = (x,0)+(0,1)\cdot(y,0) = x + iy$.

Also erhalten wir für $\boldsymbol{C}$ die „altbekannte“ Darstellung (s.o.): $\boxed{\boldsymbol{C} = \{z = x + i\cdot y \mid x,y \in \boldsymbol{R}\}}$.
Wir definieren weiter:

Definition:

- Ist $z = x + iy \in \boldsymbol{C}$, so heißt $x \in \boldsymbol{R}$ der *Realteil von* z (in Zeichen: $\boxed{Re\, z := x}$) und $y \in \boldsymbol{R}$ der *Imaginärteil von* z (in Zeichen: $\boxed{Im\, z := y}$).
- Die Zahl $\boxed{\bar{z} := x - i\cdot y}$ nennt man die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.
- Die (positive reelle) Zahl $\boxed{r = |z| := \sqrt{x^2 + y^2}}$ heißt der *Betrag* (oder *Modul*) *von* z .
- Die Menge $\boxed{arg\, z := \{\varphi + 2k\pi \mid k \in \boldsymbol{Z}\}}$ mit $\boxed{\varphi = Arg\, z := \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) \ , \text{ für } y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{r}) \ , \text{ für } y < 0 \end{cases}}$

  heißt das *Argument* (oder *Phase*) *von* z und $\varphi = Arg\, z \in (-180°,180]$ im *Gradmaß* bzw. $\varphi \in (-\pi,\pi]$ im *Bogenmaß* der *Hauptwert* von $arg\, z$. Wir schreiben auch: $arg\, z \equiv \varphi \ (2\pi)$ und sagen: *„arg z ist kongruent* φ *modulo* 2π*“*.

  Zur Beziehung zwischen *Gradmaß* und *Bogenmaß* siehe den folgenden Abschnitt im Skript.
- Man beachte, dass $z = 0$ *kein Argument* besitzt. Dafür gilt ja: $\boxed{|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0}$. Weiterhin bezeichnet *arccos* in der Definition des Hauptwerts $\varphi = Arg\, z$ die *Umkehrfunktion* des Cosinus – das ist der *Arcus Cosinus* –, der (z.B. auf dem *Taschenrechner*) auch mit cos^{-1} bezeichnet wird. In manchen Büchern wird zur Darstellung des Hauptwertes $\varphi = Arg\, z$ anstelle von *arccos* auch *arctan* bzw. tan^{-1} – das ist der *Arcus Tangens* – verwendet (siehe dazu später den Abschnitt über die *trigonometrische Funktionen*).

Geometrische Interpretation der komplexen Zahlen als Punkte der Gaußschen Ebene:

Die komplexen Zahlen $z = x + i\cdot y \in \boldsymbol{C}$ können mit den Punkten der (zweidimensionalen) *komplexen* - oder wie man sagt: *Gaußschen - Zahlenebene* identifiziert werden (s. dazu die *Skizze* auf der folgenden Seite).