- Die parameterfreie Darstellung $(***)$ einer Geraden $\boldsymbol{g}$ lässt sich äquivalent umschreiben zu: $\boxed{\vec{x}\times\vec{v}=\vec{w}}$ mit dem Vektorprodukt $\boxed{\vec{w}=\vec{a}\times\vec{v}}$. Gilt für den Koordinantenursprung O : $O\in\boldsymbol{g}$, so sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{v}$ *l.a.*, also $\vec{w}=\vec{a}\times\vec{v}=\vec{0}$. Ansonsten ist $\vec{w}$ ein *Normalenvektor* auf der Ebene $\boldsymbol{E}$, welche durch die Gerade $\boldsymbol{g}$ und den Koordinatenursprung O eindeutig festgelegt ist und durch die *l.u.* Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird.
- In den Darstellungen $(**)$ und $(***)$ einer Geraden $\boldsymbol{g}$ stellt $\vec{v}=\vec{b}-\vec{a}$ bzw. $\vec{v}$ selbst jeweils einen Richtungsvektor dieser Geraden dar.

Wir kommen jetzt als Nächstes zur Darstellung einer *Ebene* im Raum in der Analytischen Geometrie.

Die Ebene im Raum	
Parameterdarstellung der Ebene:	Sei $A\,(a_1, a_2, a_3)\in\boldsymbol{R}^3$ ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und seien $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ zwei *l.u.* (d.h. nicht kollineare) Vektoren. Insbesondere ist dann: $\vec{v}\times\vec{w}\neq\vec{0}$. Nun lässt sich die Menge aller Punkte X einer Ebene $\boldsymbol{E}$ durch A, welche durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird, beschreiben durch $(*)\ \boxed{\boldsymbol{E}:\ \vec{x}=\vec{x}(s,t)=\vec{a}+s\cdot\vec{v}+t\cdot\vec{w}\ ,\ \ s,t\in\boldsymbol{R}}$. Man nennt dies die *Parameterform* der Ebene $\boldsymbol{E}$ mit zugehörigen *Parametern* s,t oder auch die *Punkt-Richtungs-Form* der Ebene. Analog zum Fall der Geraden nennt man $\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ den *Parameterbereich* für (s,t) .
Die Dreipunktegleichung der Ebene:	Gesucht ist eine Gleichung der eindeutig bestimmten Ebene $\boldsymbol{E}$, welche durch drei vorgegebene nicht auf einer Geraden liegende – d.h. *nicht kollineare* – Punkte $A,B,C\in\boldsymbol{R}^3$ mit Ortsvektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ verläuft. Man erhält: $(**)\ \boxed{\boldsymbol{E}:\ \vec{x}=\vec{x}(s,t)=\vec{a}+s\cdot(\vec{b}-\vec{a})+t\cdot(\vec{c}-\vec{a})}$ $\boxed{=(1-s-t)\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}+t\cdot\vec{c}\ ,\ \ s,t\in\boldsymbol{R}}$.

Die parameterfreie Hessesche Normalform der Ebenendarstellung:	Ist eine Ebene $\boldsymbol{E}$ in der Parameterdarstellung $(*)$ gegeben, so ist $\vec{n} = \dfrac{\vec{v} \times \vec{w}}{\Vert \vec{v} \times \vec{w} \Vert} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ ein *Normalenvektor* zur Ebene $\boldsymbol{E}$, denn es gilt: $\vec{n} \bullet \vec{v} = \vec{n} \bullet \vec{w} = 0, \quad n = \Vert \vec{n} \Vert = \dfrac{\Vert \vec{v} \times \vec{w} \Vert}{\Vert \vec{v} \times \vec{w} \Vert} = 1$. Bildet man auf beiden Seiten von $(*)$ das *SP* mit dem Vektor $\vec{n}$, so erhält man für jeden Punkt $X \in E$ mit zugehörigem Ortsvektor $\vec{x}$ die folgende *parameterfreie* Darstellung für die Ebene $\boldsymbol{E}$, welche auch *Hessesche* (*Normal*-)*Form* genannt wird: $(***)$ $\boxed{\boldsymbol{E} : \vec{x} \bullet \vec{n} = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d}$ mit $\boxed{d = \vec{a} \bullet \vec{n}}$.

<u>Bemerkungen</u>:

- Die Gleichung $(*)$ einer Ebene zeigt: $\boldsymbol{E} = \vec{a} + U$ ist ein affiner Teilraum mit Unterraum $U = Lin(\vec{v}, \vec{w})$, wobei $(\vec{v}, \vec{w})$ eine Basis von U ist.
- Wählt man in der Darstellung $(**)$ einer Geraden speziell den eingeschränkten Parameterbereich $s,t \in I = [0,1]$, so erhält man eine Parametrisierung des *Parallelogramms* mit Eckpunkt A, welches durch die Vektoren $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{c} - \vec{a}$ aufgespannt wird.
- In der Hesseschen Normalform $(***)$ lässt sich $|\, d \,| = |\, \vec{a} \bullet \vec{n} \,|$ als Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung O interpretieren.
- Sind zwei Ebenen $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{E}_2$ in der Hesseschen Normalform $\boxed{\boldsymbol{E}_i : \vec{x} \bullet \vec{n}_i = d_i}$ gegeben ($i = 1,2$), so erhält man im Fall $\boldsymbol{E}_1 \cap \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{g}$ mit einer Schnittgeraden $\boldsymbol{g}$ für den *Schnittwinkel* φ, unter welchem sich die beiden Ebenen schneiden:

  $\boxed{\cos \varphi = \vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2}$ bzw. $\boxed{\varphi = \arccos\left(\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2\right)}$.

  Weiter erhält man mit $\boxed{\vec{v} := \vec{n}_1 \times \vec{n}_2}$ einen Richtungsvektor für die Schnittgerade $\boldsymbol{g}$.
- Durch Einsetzen der Parameterdarstellung $\boxed{\vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{v}}$ einer Geraden $\boldsymbol{g}$ in die Hessesche Normalform $\boxed{\vec{x} \bullet \vec{n} = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d}$ einer Ebene $\boldsymbol{E}$ kann man schnell und elegant den Schnittpunkt $\{S\} = \boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{g}$ von Ebene und Gerade - genauer seinen Ortsvektor $\vec{s} = \vec{a} + t_0 \cdot \vec{v}$ - berechnen. Desweiteren erhält man den *Schnittwinkel* φ, unter welchem die Gerade $\boldsymbol{g}$ die Ebene $\boldsymbol{E}$ schneidet, mittels der Formel

  $$\boxed{\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{n}}{v}\right) \right|} \ .$$

Wir schließen den Abschnitt zur Analytischen Geometrie mit einigen *Abstandsformeln* ab. Dabei geht es um Abstände von Punkten zu Geraden und Ebenen im Raum sowie zwischen Geraden und Ebenen und zwischen Geraden untereinander im Raum.

Abstände zu bzw. zwischen Geraden und Ebenen	
Abstand eines Punktes von einer Geraden:	Sei $P(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ ein *Punkt* mit Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{g}: \vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R}$ eine *Gerade* mit $P \notin \boldsymbol{g}$. Dann ist der *Abstand* $d = dist(P, \boldsymbol{g})$ von P zur Geraden $\boldsymbol{g}$ gegeben durch: $\boxed{d = \frac{1}{v} \cdot \lVert \vec{v} \times (\vec{p} - \vec{a}) \rVert}$.
Abstand zweier windschiefer Geraden:	Gegeben seien zwei zueinander *windschiefe Geraden* $\boldsymbol{g}_1: \vec{x} = \vec{x}(s) = \vec{a}_1 + s \cdot \vec{v}_1,\ s \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{g}_2: \vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{a}_2 + t \cdot \vec{v}_2,\ t \in \mathbb{R}$. Also gilt: $det(\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq 0$. Dann ist der *Abstand* $d = dist(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2)$ der beiden Geraden zueinander gegeben durch: $\boxed{d = \frac{V}{A} = \frac{\lvert det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a}_2 - \vec{a}_1) \rvert}{\lVert \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \rVert}}$.
Abstand eines Punktes von einer Ebene:	Sei $P(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ ein *Punkt* mit Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{E}: \vec{x} \bullet \vec{n} = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ eine *Ebene* in Hessescher Normalform sowie $\boldsymbol{E}_1: \vec{x} \bullet \vec{n} = \vec{p} \bullet \vec{n} = d_1$ die zu $\boldsymbol{E}$ parallele Ebene durch den Punkt P. Dann gilt für den *Abstand* $e = dist(P, \boldsymbol{E}) = dist(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E})$ des Punktes P zur Ebene $\boldsymbol{E}$: $\boxed{e = \lvert d_1 - d \rvert = \lvert \vec{p} \bullet \vec{n} - d \rvert = \lvert (\vec{p} - \vec{a}) \bullet \vec{n} \rvert}$

<u>Bemerkungen</u>:

- Der Abstandmessung eines Punktes P zu einer Geraden $\boldsymbol{g}$ bzw. zu einer Ebene $\boldsymbol{E}$ bzw. zwischen zwei windschiefen Geraden $\boldsymbol{g}_1$ und $\boldsymbol{g}_2$ liegt geometrisch die Länge des entsprechenden *Lotes* zurunde.
- In der Formel des Abstands zweier winschiefer Geraden steht V für das entsprechend gebildete Spatvolumen und A für den entsprechenden Parallelogrammflächeninhalt.

Über die Lösungen einer reellen quadratischen Gleichung

Die nach den *linearen* auftauchenden Gleichungen höheren Grades sind zunächst die *quadratischen*, die wir im Folgenden erst einmal als rein reelle behandeln wollen. Zu dem in den Formeln auftretenden Zahlbereich **C** der sogenannten *komplexen Zahlen* (lat. *complex* = dt. *zusammengesetzt*) kommen wir direkt im Anschluss an diesen Abschnitt.

Allgemeine Form der reellen quadratischen Gleichung:	$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a,b,c \in \mathbf{R}$ ($x \in \mathbf{R}$ bzw. $x \in \mathbf{C}$)
faktorisierte Form der Gleichung (= Zerlegung in *Linearfaktoren*):	$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit $a \in \mathbf{R}$ ($x \in \mathbf{C}$) $x_1 \in \mathbf{R}$ *und* $x_2 \in \mathbf{R}$ – bzw. $x_1 \in \mathbf{C}$ *und* $x_2 \in \mathbf{C}$ (s.u.) – heißen auch die *reellen* bzw. *komplexen Nullstellen* des quadratischen Polynoms $p(x) = ax^2 + bx + c$.
Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$:	Bezeichne $\Delta := b^2 - 4ac$ die sogenannte *Diskriminante* der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Dann gilt: (i) *Fall* $\Delta > 0$: Die reelle quadratische Gleichung hat *zwei verschiedene relle Lösungen*, nämlich $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (ii) *Fall* $\Delta = 0$: Die reelle quadratische Gleichung hat *eine doppelte reelle Lösung*, nämlich $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ (iii) *Fall* $\Delta < 0$: Die reelle quadratische Gleichung hat *keine reelle Lösung*. Führt man aber die *imaginäre Einheit* $i := \sqrt{-1}$ als „neue Zahl" und Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ein, erhält man *zwei verschiedene* ***komplexe*** *Lösungen* für die quadratische Gleichung: $x_1 = \frac{-b}{2a} + i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b}{2a} - i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$. Insbesondere unterscheiden sich die beiden Lösungen x_1 und x_2 im Vorzeichen vor dem *„i"* . Man schreibt: $x_2 = \overline{x}_1$ und nennt beide Lösungen (zueinander) *konjugiert komplex*.