Auf der Grundlage dieser Projektion beruht die folgende Aufgabe:

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\vec{a} \perp \vec{b}$ sowie ein weiterer Vektor $\vec{c} \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Man finde eine *Zerlegung* von $\vec{c}$ der Form $(*)$ $\boxed{\vec{c} = \lambda_c \cdot \vec{a} + \mu_c \cdot \vec{b}}$ mit *Komponenten* $\lambda_c \cdot \vec{a}$ und $\mu_c \cdot \vec{b}$ von $\vec{c}$ in Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung $(*)$ jeweils einmal das SP mit $\vec{a}$, das andere Mal das SP mit $\vec{b}$ und berücksichtigt, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$ – und damit $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ – ist, so ergibt sich für die gesuchten Koeffizienten:

$$\boxed{\lambda_c = \frac{\vec{a} \bullet \vec{c}}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{c}}{a^2}} \quad \text{sowie} \quad \boxed{\mu_c = \frac{\vec{b} \bullet \vec{c}}{\|\vec{b}\|^2} = \frac{\vec{b} \bullet \vec{c}}{b^2}} .$$

Verzichtet man auf die Voraussetzung $\vec{a} \perp \vec{b}$ und fordert nur, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig (*l.u.*) sind, so erhält man für die Koeffizienten in der Linearkombinationdarstellung $(*)$ für $\vec{c}$ das folgende zu lösende LGS:

$$A \cdot \vec{\lambda} = \vec{v} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a^2 & \vec{a} \bullet \vec{b} \\ \vec{a} \bullet \vec{b} & b^2 \end{pmatrix}, \ \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_c \\ \mu_c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{a} \bullet \vec{c} \\ \vec{b} \bullet \vec{c} \end{pmatrix}$$

Das Vektor- oder Kreuzprodukt

Definition:

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ zwei Vektoren. Dann heißt

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} := \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

das Vektor- oder Kreuzprodukt (abgekürzt: *VP*) von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Offensichtlich ist $\vec{a} \times \vec{b} \in \boldsymbol{R}^3$.

Rechenregeln:

Aufgrund des Rückgriffs auf die Rechenregeln für die Determinante gelten für das VP viele Rechenregeln. Insbesondere:

(i) $\vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c} \right) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \mu \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$ für alle $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$

(*Linearität in der 2. Komponente*) und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \boldsymbol{R}^3$,

(ii) $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a} \right)$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{R}^3$,

(*Schiefsymmetrie*)

(iii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, falls $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ mit $\lambda \in \boldsymbol{R}$ geeignet.

(*Charakterisierung der linearen Abhängigkeit*)

Geometrische Deutung des VP:	(i) Sind $\vec{a},\vec{b} \in \boldsymbol{R}^3$ beliebig, so gilt zunächst: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$, denn man rechnet schnell nach: $\vec{a} \bullet \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = 0$ sowie $\vec{b} \bullet \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = 0$. (ii) Für die kanonische Basis $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ des $\boldsymbol{R}^3$ erhält man, wie man ebenfalls durch Nachrechnen zeigt: $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ sowie $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ und $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$. Allgemeiner bilden die 3 Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{a} \times \vec{b}$ (in dieser Reihenfolge) ein *Rechtssystem*. Das bedeutet anschaulich: Zeigt der Daumen der *rechten* Hand in Richtung von $\vec{a}$ und der Zeigefinger in Richtung von $\vec{b}$, so zeigt der Mittelfinger in Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$. (iii)Für die Norm $\left\Vert \vec{a} \times \vec{b} \right\Vert$ von $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ gilt: $c = \left\Vert \vec{a} \times \vec{b} \right\Vert = \left\Vert \vec{a} \right\Vert \cdot \left\Vert \vec{b} \right\Vert \cdot \left\vert \sin \varphi \right\vert = ab \cdot \left\vert \sin \varphi \right\vert$ mit $\varphi = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Damit entspricht die Länge von $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ dem 2-dim. *Flächeninhalt* des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten *Parallelogramms*.

<u>Bemerkungen</u>:

- Anstelle über die (nicht ganz korrekt benutzte) Determinante kann man das Vektorprodukt - analog zum Skalarprodukt - auch über eine Matrizenmultiplikation einführen. Sind nämlich $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ gegeben und definiert man die durch $\vec{a}$ eindeutig bestimmte (3×3)-Matrix $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}}$, so gilt: $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = A \cdot \vec{b}}$.

  Die Matrix A erfüllt insbesondere die Gleichung: $\boxed{A^T = -A}$. Aufgrund dieser Eigenschaft nennt man A auch eine *schiefsymmetrische* Matrix.
- Daneben gibt es eine kleine Hilfskonstruktion - analog zur Sarrusschen oder Jägerzaunregel für eine (3×3)-Determinante -, mit der man das Vektorprodukt schneller findet:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & \qquad & b_1 \\ a_2 & \qquad & b_2 \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

- Zum Beweis der Formel für die Norm $c = \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$ rechnet man zunächst aus, dass gilt:

  $$\boxed{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 + \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2 = a^2 \cdot b^2} \quad .$$

  Unter Verwendung der geometrischen Formel für das SP mithilfe von cos folgt daraus die gewünschte Formel.

- Das *SP* und das *VP* lassen sich noch zu einem weiteren Produkt im $\boldsymbol{R}^3$ kombinieren:

  Sind drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \boldsymbol{R}^3$ gegeben, dann heißt $\boxed{\left[\, \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \,\right] := \vec{a} \bullet \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)}$ das *Spatprodukt* der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Rechnet man dieses Produkt einmal aus, so erkennt man, dass gilt: $\boxed{\left[\, \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \,\right] := det\left(\, \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \,\right)}$. Insbesondere folgt daraus:

  $$\boxed{det\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b} \times \vec{c}\right\| \cdot cos\psi = abc \cdot \left|sin\varphi\right| \cdot cos\psi}$$

  mit $\varphi = \sphericalangle\left(\, \vec{b}, \vec{c} \,\right)$ und $\psi = \sphericalangle\left(\, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \,\right)$.

  Das ist aber die Berechnungsformel für das *Volumen* des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates (daher der Name „Spatprodukt“).

  Somit lässt sich $det\left(\, \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \,\right)$ geometrisch interpretieren als das (orientierte) Volumen des von den drei Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \boldsymbol{R}^3$ aufgespannten Spates.

Ein wenig Analytische Geometrie

Die *Vektorrechung* findet insbesondere *Anwendung in der Geometrie* der Ebene und des Raumes. Dies gilt speziell für die Darstellung von *Geraden* und *Ebenen* sowie für die Messung des *Abstandes* eines Punktes von einer Ebene oder einer Geraden bzw. für den Abstand zweier windschiefer Geraden im Raum.

Die Einführung von Koordinaten in die Geometrie geht auf René Descartes (*lat.* Cartesius) im 17. Jh. zurück, und man nennt die auf der Vektorrechnung beruhende Geometrie auch *„Analytische Geometrie“*. Speziell die höherdimensionale Analysis - d.h. die Analysis der Funktionen/Abbildungen mehrerer Veränderlicher - greift immer wieder auf die Ergebnisse dieses Zweigs der Geometrie zurück.

Wir behandeln zunächst die Darstellung einer *Geraden* im (dreidimensionalen) Raum.

Die Gerade im Raum

Parameterdarstellung der Geraden:	Sei $A\,(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ ein Punkt im Raum mit Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ein weiterer Vektor. Dann lässt sich die Menge aller Punkte X auf der Geraden $\boldsymbol{g}$ durch A mit *Richtungvektor* $\vec{v} \neq \vec{0}$ beschreiben mittels $(*)\quad \boxed{\boldsymbol{g} : \vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{v},\ \ t \in \mathbf{R}}\ .$ Man nennt dies die *Parameterdarstellung* der Geraden $\boldsymbol{g}$ mit zugehörigem *Parameter* t. Insbesondere bezeichnet man $\mathbf{R}$ auch als den *Parameterbereich* für t. Die Darstellung $(*)$ heißt zuweilen auch die *Punkt-Richtungs-Form* der Geraden $\boldsymbol{g}$.
Die Zweipunktegleichung der Geraden:	Seien $A, B \in \mathbf{R}^3$ mit $A \neq B$ zwei Punkte im Raum mit zugehörigen Ortsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Dann lässt sich die Menge aller Punkte X auf der Geraden $\boldsymbol{g}$ durch A und B beschreiben mittels $(**)\quad \boxed{\boldsymbol{g} : \vec{x} = \vec{x}(t) = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = (1-t) \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b},\ \ t \in \mathbf{R}}\ .$
Die parameterfreie Plückersche Geradendarstellung:	Sei $A\,(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ ein Punkt einer Geraden $\boldsymbol{g}$ mit zugehörigem Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ ein Richtungsvektor von $\boldsymbol{g}$. Dann erhält man für jeden Punkt $X \in \boldsymbol{g}$ mit Ortsvektor $\vec{x}$ unter Verwendung des *VPs* die folgende *parameterfreie* Darstellung der Geraden, welche auch *Plückersche Form* genannt wird: $(***)\quad \boxed{\boldsymbol{g} : (\vec{x} - \vec{a}) \times \vec{v} = \vec{0}}\ .$

<u>*Bemerkungen*</u>:

- Die Gleichung $(*)$ einer Geraden zeigt: $\boldsymbol{g} = \vec{a} + U$ ist ein affiner Teilraum mit Unterraum $U = Lin(\vec{v})$, wobei $(\vec{v})$ wegen $\vec{v} \neq \vec{0}$ eine Basis von U ist.
- Wählt man in der Darstellung $(**)$ einer Geraden speziell für t den eingeschränkten Parameterbereich $I = [0,1]$, so erhält man die *parametrisierte Strecke* $\overline{AB}$ mit *Anfangspunkt* $\vec{x}(0) = \vec{a}$ und *Endpunkt* $\vec{x}(1) = \vec{b}$.